PHYSIKALISCHE HYDRODYNAMIK

MIT ANWENDUNG AUF DIE DYNAMISCHE METEOROLOGIE

VON

V. BJERKNES
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT OSLO
RESEARCH ASSOCIATE DES CARNEGIE INSTITUTES
IN WASHINGTON

J. BJERKNES · H. SOLBERG
PROFESSOR AM GEOPHYSIKALISCHEN INSTITUT · BERGEN
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT OSLO

T. BERGERON
WISSENSCHAFTLICHER BERATER
IM NORWEGISCHEN WETTERDIENST

MIT 151 ABBILDUNGEN

Published and distributed in the Public Interest by Authority of the Alien Property Custodian under License No. A-31

Photo-Lithoprint Reproduction
EDWARDS BROTHERS, INC
LITHOPRINTERS
ANN ARBOR, MICHIGAN
1943

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1933

DEM ANDENKEN
AN
C. A. BJERKNES
IN FORTSETZUNG SEINER LEBENSARBEIT
ENTSTAND DIES WERK

Vorwort.

Wir Menschen leben, atmen und fliegen in einem gasförmig-flüssigen Medium, der Atmosphäre, die die Erde umgibt. Auch das Meer, das drei Viertel der Erde bedeckt, spielt in unserem Leben eine wichtige Rolle; und einige Kilometer unterhalb der festen Erdoberfläche beginnt nach unserer heutigen Ansicht wiederum der flüssige Zustand. Die Sonne und die Fixsterne, die uns ihr Licht senden, sind gasförmig-flüssige Körper, und ganze Welten scheinen aus gasförmigen Nebeln zu entstehen. Und, wenn es schließlich einen Äther gibt, der den Raum erfüllt, und Licht und Fernwirkungen überträgt, so muß dieser Äther jedenfalls eine Eigenschaft mit den flüssigen Medien gemein haben, nämlich die Eigenschaft, bewegte Körper durchzulassen. Mit HERAKLEITOS können wir sagen: *πάντα ῥεῖ*, alles fließt.

Hiernach scheint die Hydrodynamik, die Lehre von der Bewegung der flüssigen Medien, berufen zu sein, eine zentrale Stellung unter den physikalischen Wissenschaften einzunehmen.

Vorläufig hat sie sich jedoch nur in engen Grenzen entwickelt. In der klassischen hydrodynamischen Literatur hat man fast durchweg angenommen, daß das flüssige Medium entweder homogen und inkompressibel sei, oder wenn Kompressibilität berücksichtigt wird, hat man vorausgesetzt, daß die Dichte zeitlich wie räumlich nur von dem Drucke abhängt. Diese Voraussetzungen geben die Grenzen der *klassischen Hydrodynamik*, und die Bedingungen, unter denen die bekannten Wirbelerhaltungssätze gültig sind.

Die Flüssigkeit der klassischen Hydrodynamik ist zufolge ihrer Definitionseigenschaften unfähig, als arbeitende Substanz in einer thermodynamischen Maschine zu dienen. Die Verbindung der Hydrodynamik mit der Thermodynamik, und dadurch mit der ganzen übrigen Physik, ist dadurch unterbrochen. Die klassische Hydrodynamik ist *reine* Hydrodynamik. Jedes Eingehen auf die Wechselwirkung der Bewegung mit der Zu- und Abfuhr von Wärme durch Leitung und Strahlung, und damit auf die großen hydrodynamisch-geophysikalischen oder hydrodynamisch-kosmischen Probleme, führt über die Grenzen dieser klassischen Hydrodynamik hinaus. Solche Probleme gehören der allgemeineren *physikalischen Hydrodynamik* an, wo man der Flüssigkeit volle physikalische Realität gibt, vor allem dadurch, daß man die Temperatur als gleichberechtigte Variable neben Druck und Dichte

(oder Volumen) in der Zustandsgleichung auftreten läßt, oder wenigstens Platz für sie offen läßt, wenn man sie nicht explizite einführt.

Es ist das Ziel dieses Buches, die ersten Grundlagen und die nächstliegenden Anwendungen dieser physikalischen Hydrodynamik zu geben. Wie ich zu der Befassung mit einer solchen Aufgabe geführt wurde, ist in den historischen Erläuterungen entwickelt, die der Bibliographie am Schlusse des Buches beigegeben sind.

Dieses Betreten eines neuen Gebietes hätte aber sicher nicht weit geführt, wenn nicht die *Carnegie Institution of Washington* eine von mir geplante meteorologisch-hydrographische Arbeit in großzügigster Weise unterstützt hätte. Als Research Associate des Carnegie Institution habe ich seit 1906 das Privilegium gehabt, junge Wissenschaftler als Assistenten zu mir zu ziehen. Aus der langen Reihe dieser Assistenten nenne ich hier nur diejenigen, die mehr als ein Jahr bei mir gearbeitet und sich auch später als selbständige Forscher in den hierher gehörenden Gebieten ausgezeichnet haben. Der erste in der Reihe war J. W. SANDSTRÖM, der mich schon seit 1898 unterstützt hatte, jetzt Direktor des Schwedischen Meteorologischen Instituts in Stockholm. Dann folgten 1908—15 TH. HESSELBERG, jetzt Direktor des Norwegischen Meteorologischen Instituts, Oslo, 1908—10 O. DEVIK, Mitglied des Chr. Michelsen Instituts, Bergen-Norwegen, und 1910—17 H. U. SVERDRUP, jetzt Mitglied desselben Instituts. Dann traten die drei Herren hinzu, deren Namen man auf dem Titelblatt des Buches findet: J. BJERKNES 1916, H. SOLBERG 1917 und T. BERGERON 1919. Sie sind seit jener Zeit fast ohne Unterbrechung in dieser Arbeitsrichtung tätig gewesen, in den letzten Jahren besonders mit ihren Beiträgen zu diesem Buche. Dabei fiel sämtliche schwierigere mathematische Arbeit Herrn SOLBERG zu, während die beiden anderen die Verantwortung für die empirisch-meteorologische Seite zu tragen haben. Während dieser abschließenden Arbeit ist C. L. GODSKE ein außerordentlich wertvoller Mitarbeiter gewesen, sowohl durch seine mathematischen Fähigkeiten, wie durch seine in allen Richtungen bewiesene Arbeitstüchtigkeit und seinen Arbeitseifer.

Indem ich im Namen der vier Verfasser allen übrigen Mitarbeitern unseren herzlichsten Dank ausspreche, möchte ich zwei von ihnen noch besonders erwähnen, Herrn SANDSTRÖM, ohne dessen wertvolle Stütze ich mich kaum entschlossen hätte, das mir so fremde Gebiet der Meteorologie zu betreten, und Herrn C. L. GODSKE, dessen Arbeit für die Vollendung des Buches von unschätzbarem Wert gewesen ist.

Meinen ersten Versuch, die physikalische Hydrodynamik systematisch darzustellen, bildeten die Vorlesungen „Physical Hydrodynamics", die ich in Pasadena auf Einladung an der California Institute of Technology im Jahre 1924 hielt. Mit Rücksicht auf die vielen noch ungelösten

Spezialprobleme wurde aber die unmittelbare Herausgabe dieser Vorlesungen aufgegeben. Den Anstoß zu der endgültigen Ausarbeitung gab die Einladung, über das Thema in Paris vorzutragen und die vollständige Darstellung in der Serie „Conférences-Rapports sur la Physique“ erscheinen zu lassen. Im Einverständnis mit dem Direktor dieser Conférences-Rapports erscheint diese deutsche Ausgabe gleichzeitig mit der französischen.

Die sprachliche Verbesserung des deutschen Textes verdanke ich für den theoretischen Teil Herrn Dr. H. SCHLICHTING, Göttingen, und für den empirisch-meteorologischen Teil Herrn Dr. B. HAURWITZ, Leipzig.

Schließlich ist es mir eine angenehme Pflicht, der Verlagsbuchhandlung Julius Springer für bewiesene Sorgfalt bei der Herausgabe des Buches meinen besten Dank abzustatten.

Oslo, Oktober 1932.

V. BJERKNES.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Physikalische Hydrodynamik.

Symbolverzeichnis.

a, b, c Lagrangesche Numerierungskoordinaten 51.

c_A Höhe der verschwindenden Horizontalbewegung 348.

c_D Höhe des verschwindenden Störungsdruckes 348.

c_p, c_v Spezifische Wärme bei konstantem Druck bzw. Volumen 176.

d, ∂ Differentialsymbole.

e
- 2, 718 . . .
- Wahre elektrische Dichte, spez. Ausdehnungsgeschwindigkeit 198, 202.
- Innere Energie pro Masseneinheit 82.

$f = 0$ Gleichung einer Diskontinuitätsfläche 60.

f_s Spezifische Feuchtigkeit 196.

g Größe der Schwerebeschleunigung 89.

h_p, h_φ, h_s, h_q Dicke von isobaren, äquipotentiellen, isosteren und äquidensen Einheitsschichten 91.

$i = \sqrt{-1}$ Imaginäre Einheit.

m Masse 97.

dm Massenelement 173.

p Flüssigkeitsdruck 42.

$q = dm/d\tau$ Dichte 81.

$s = d\tau/dm$ Spezifisches Volumen 81.

t Zeit.

d/dt Individuelle Zeitableitung im Eulerschen System 57.

$\partial/\partial t$
- Individuelle Zeitableitung im Lagrangeschen System 53.
- Lokale Zeitableitung im Eulerschen System 57.

w Wärmemenge 82.

dw Zugeführte Wärmemenge 82.

w_e, w_m Elektrische bzw. magnetische Energie 198.

x, y, z
- Cartesische Lagekoordinaten im Lagrangeschen System.
- Cartesische Ortskoordinaten im Eulerschen System.

A, B, C, D Amplituden bei Wellenbewegungen 308.

C, C_0^1 Zirkulation bzw. Prozession der Geschwindigkeit 66.

$\bar{C}, \bar{C}_0^1$ Zirkulation bzw. Prozession der Bewegungsgröße 68.

$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}, \quad D_0 = \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)}$ Funktionaldeterminanten 55.

E Totale innere Energie 174.

$F = 0$ Gleichung einer Diskontinuitätsfläche im Grundzustand 278.

G Druckgradient 42.

H_A, H_H, H_L Höhe der adiabatischen, der homogenen Atmosphäre und der Atmosphäre mit linearem Temperaturfeld 94.

H Doppelte Zellenhöhe 337.

J_λ Besselfunktion erster Art 368.

L Wellenlänge 76.

$N(\alpha, \beta)$ Solenoidanzahl 19.

P Flüssigkeitsdruck im Grundzustand 278.
Q Dichte im Grundzustand 278.
$R = 287{,}05$ Gaskonstante 86.
S Spezifisches Volumen im Grundzustand 278.
T { Periode einer Wellenbewegung 76. / Kinetische Energie 97.
T_T Transversalperiode 332.
U Konstante Grundgeschwindigkeit längs der x-Achse 375.
$\overline{V}$ Massentransport 193.
W Totale zugeführte Wärme 174.
X, Y, Z Lagekoordinaten des Grundzustandes 278.
Y_λ Besselfunktion zweiter Art 434.

γ Piezotropiekoeffizient 84.
Variationssymbol.
$= -\frac{\partial \theta}{\partial z}$ Vertikaler Temperaturgradient 181.

$\delta_a = \frac{g}{c_p}$, δ_{pa} Adiabatischer bzw. feuchtadiabatischer Temperaturgradient 181.
ε Dielektrizitätskonstante 193.
Reibungskoeffizient 113.
Thermodynamischer Wirkungsgrad 189.
$= i\zeta$ Hilfsgröße 336.
θ { Absolute Temperatur 81. / Neigungswinkel der Stromflächen 561.
θ_d Neigungswinkel der Diskontinuitätsflächen nullter Ordnung 125.
θ_{dr} Neigungswinkel der Disk.-Flächen in relativer Bewegung 136.
θ_d Neigungswinkel der Diskontinuitätsflächen erster Ordnung 126.
θ_p Neigungswinkel der Isobarflächen 121.
θ_{pr} Neigungswinkel der Isobarflächen in relativer Bewegung 132.
θ, ψ, r Polarkoordinaten 298, 304.
ϑ Potentielle Temperatur 87.
$\varkappa$ { $= c_p/c_v$ 95. / $= 2\pi/L_e$ Wellenzahl senkrecht zur Rotationsachse 430.
$\lambda = 2\pi/L_a$ Wellenzahl längs der Rotationsachse 431.
μ { $= 2\pi/L$ Wellenzahl 76. / Anguläre Wellenzahl 425. / Magnetische Permeabilität 198.
ν Frequenz 75.
ν_T Transversalfrequenz 328.
π { $= 3{,}141\ldots$ / $= \int s(p)\,dp$ 110.
ϱ, ψ, z Zylinderkoordinaten 295, 320.
τ Variation der kinetischen Energie T 218.
$d\tau$ Volumenelement 16.
φ Schwerepotential 89.
φ' Potential der reinen Anziehung 455.
$\varphi_A, \varphi_H, \varphi_L$ Dynamische Höhe der adiabatischen, der homogenen Atmosphäre und der Atmosphäre mit linearem Temperaturfeld 94.
$\chi(s, p, \theta, A, B, \ldots) = 0$ Thermodynamische Zustandsgleichung 81.
ψ_1, ψ_2, ψ_3, Verallgemeinerte Koordinaten 50.
ω Winkelgeschwindigkeit 69.

$\tilde{\omega}$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen 76.

$\tilde{\omega}_L$ Laplacesche Schallgeschwindigkeit 323.

Γ Barotropiekoeffizient 85.

Θ Absolute Temperatur des Grundzustandes 273.

Θ, Ψ, R Polare Lagekoordinaten des Grundzustandes 298.

P, Ψ, Z Zylindrische Lagekoordinaten des Grundzustandes 295.

Σ Projektion von Flächeninhalt auf Äquatorebene 146, 484.

Φ { Totale potentielle Energie 173.
Schwerepotential im Grundzustande 279.

Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 Verallgemeinerte Lagekoordinaten eines Grundzustandes 278.

Ω { Winkelgeschwindigkeit im Grundzustande 296, 303.
Winkelgeschwindigkeit der Erde 132, 454.

$\boldsymbol{A}, A, A_x, A_y, A_z$ Vektor, dessen absoluter Betrag und Komponenten 5.

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ Skalares Produkt 8.

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ Vektorprodukt 8.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ Unbestimmtes Produkt, Dyade 34.

$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}^*$ Totale bzw. erzwungene magnetische Induktion 198.

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}'$ Elektrische bzw. magnetische Stromdichte 255.

$\mathfrak{c} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$ Coriolisbeschleunigung 455.

$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}^*$ Totale bzw. erzwungene elektrische Verschiebung 198.

∇ Hamiltonscher Operator, „Del" 9.

$\nabla \cdot = \mathrm{div}$ Divergenz 10.

$\nabla \times = \mathrm{curl}$ Wirbeln 10.

∇^2 Laplacescher Operator 11.

$\boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B}$ Direkte Vektorliniendifferentiation 36.

$\nabla \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ Konjugierte Vektorliniendifferentiation 36.

$\boldsymbol{f}$ Äußere Kraft 42.

$\boldsymbol{f}_e, \boldsymbol{f}_m$ Elektrische bzw. magnetische Feldkraft 198.

$\boldsymbol{g} = -\nabla \varphi$ Schwerebeschleunigung 89.

$\boldsymbol{G} = -\nabla p$ Druckgradient 42.

$\boldsymbol{H}$ Magnetische Feldstärke 198.

$\boldsymbol{i}$ Elektrische Stromdichte 260.

$\boldsymbol{j} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ Beschleunigung 42, 50.

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ Einheitsvektoren 46.

$\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ Allgemeine Grundvektoren 43.

$\boldsymbol{n}$ Einheitsnormal eines Flächenelementes 18.

$\boldsymbol{P}^n$ Spannungsvektor 39.

$\boldsymbol{r}$ Vadiusvektor 49.

$d\boldsymbol{r}$ Vektorlinienelement, geometrisches 14.

$\delta\boldsymbol{r}$ Vektorlinienelement, materielles 66.

$\boldsymbol{R}$ Radiusvektor der Lage im Grundzustand 278.

$\boldsymbol{S}$ Resultierende Kraft der Reibung 42.

$d\boldsymbol{\sigma}$ Vektorflächenelement 15.

$= \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ Geschwindigkeit 50.

$\bar{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v}$ Spezifische Bewegungsgröße 68.

$\boldsymbol{v}^*$ Erzwungene (eingeprägte) Geschwindigkeit 201.

$\boldsymbol{v}^{**}$ Aktionsgeschwindigkeit, Magnetisierungsintensität 218.

$\boldsymbol{V}$ Geschwindigkeit der Grundströmung 299.

$\boldsymbol{V}^{**}$ Aktionsmoment, magnetisches Moment 218.

ψ Verallgemeinerter Radiusvektor 50.
Ψ Verallgemeinerter Radiusvektor im Grundzustande 278.
Ω Winkelgeschwindigkeit der Erde 132, 454.

$\mathcal{A}$ Tensor 27.
$\mathcal{A}'$ Tensor konjugiert zu $\mathcal{A}$ 27.
$\mathcal{A}^{-1}$ Tensor reziprok zu $\mathcal{A}$ 28.
$\mathcal{E}$ Einheitstensor 28.
$\mathcal{P}$ Spannungstensor 40.
$\mathcal{A} \cdot \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \cdot \mathcal{A}$ Skalare Produkte von Tensor und Vektor 27.

Berichtigungen.

S. 128 Formel (8) soll heißen: $\chi = -\frac{1}{2}\omega^2 \varrho^2$ gibt $\psi = gz - \frac{1}{2}\omega^2 \varrho^2$.

S. 128 Formel (9) soll heißen: $\chi = -\frac{2\omega_0^2 \varrho_0^2}{1 + \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}}$ gibt $\psi = gz - 2\omega_0^2 \varrho_0^2$

S. 136 Formel (5) linke Seite: statt $\operatorname{tg}\theta_d$ lies $\operatorname{tg}\theta_0$.

S. 156 Z. 5 v. u. statt „Volumenaszendenten“ lies „Dichteaszendenten“.

S. 159 Z. 9 v. u. statt $(\bar{s}_{\varrho_1} - \bar{s}_{\varrho_0})$ lies $(\bar{s}_{\varrho_0} - \bar{s}_{\varrho_1})$.

S. 159 Z. 8 v. u. statt $(\bar{q}_{\varrho_1} - \bar{q}_{\varrho_0})$ lies $(\bar{q}_{\varrho_0} - \bar{q}_{\varrho_1})$.

S. 159 Formel (4 A) linke Seite: statt $\bar{s}_{\varrho_1} - \bar{s}_{\varrho_0}$ lies $\bar{s}_{\varrho_0} - \bar{s}_{\varrho_1}$.

S. 159 Formel (4 B) linke Seite: statt $\bar{q}_{\varrho_1} - \bar{q}_{\varrho_0}$ lies $\bar{q}_{\varrho_0} - \bar{q}_{\varrho_1}$.

S. 160 Formel (6) linke Seite: statt $\bar{s}_{\varrho_1} - \bar{s}_{\varrho_0}$ lies $\bar{s}_{\varrho_0} - \bar{s}_{\varrho_1}$.

S. 160 Z. 15 v. o. statt $= H(p)$, lies $+H(p) = 0$,

S. 160 Z. 17 v. o. statt $= H'(p)\,dp$, lies $+H'(p)\,dp = 0$,

S. 161 Z. 18 v. u. statt $(\bar{\theta}_{\varrho_1} - \bar{\theta}_{\varrho_0})$ lies $(\bar{\theta}_{\varrho_0} - \bar{\theta}_{\varrho_1})$.

S. 161 Formel (13) linke Seite
S. 161 Formel (14) linke Seite
S. 161 Formel (14) linke Seite
} statt $\bar{\theta}_{\varrho_1} - \bar{\theta}_{\varrho_0}$ lies $\bar{\theta}_{\varrho_0} - \bar{\theta}_{\varrho_1}$.

S. 163 Abb. 22 φ_1 und φ_2 sind zu vertauschen.

S. 164 Z. 15 v. o. statt r^{-1}, lies ϱ^{-1}.

S. 318 Z. 8 v. u. statt $\frac{' - \theta}{\theta'}$ lies $\frac{\Theta' - }{\Theta'}$.

S. 319 Z. 14 v. o. statt $(\theta' - \theta)/\theta'$ lies $(\Theta' - \Theta)/\Theta'$.

S. 364 Formel (24'b) statt $\frac{\theta' - \theta}{\theta'}$ lies $\frac{\Theta' - \Theta}{\Theta'}$.

S. 368 Formel (3) statt θ_0 lies Θ_0.

S. 486 Z. 7 v. o. statt $(p_1 - p_0)$ lies $(p_0 - p_1)$.

S. 486 Z. 11 v. o. statt „$\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{L}$“ lies „$\bar{\boldsymbol{v}}_0 \times \boldsymbol{L}$ und $\bar{\boldsymbol{v}}_1 \times \boldsymbol{L}$“

S. 490 Formel (7) statt $\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_b$ lies $\bar{\theta}_b - \bar{\theta}_a$.

Erster Teil.

Physikalische Hydrodynamik.

Erstes Kapitel.

Skalaren, Vektoren, Tensoren.

1. Skalarfelder. Wir werden im folgenden immer mit der Vorstellung der räumlichen Verteilung oder des *Feldes* von physikalischen Größen skalarer, vektorieller oder tensorieller Natur zu arbeiten haben. In der Einleitung werden wir an einige allgemeine Eigenschaften solcher Felder erinnern, und vor allem auch unsere Wahl der Terminologie und der Bezeichnungen festlegen, die leider in der Literatur wenig einheitlich sind. Da diese Einleitung nichts prinzipiell Neues enthält, können wir für die Entwicklungen und die Beweise auf die gewöhnliche Lehrbücherliteratur verweisen.

Den Skalargrößen, die wir betrachten, schreiben wir gewöhnlich volle Eindeutigkeit zu, d. h. die Funktion $\alpha(x, y, z)$ soll in keinem Punkte des Raumes mehr als einen Wert haben. Allerdings verwendet man in der mathematischen Physik auch vielfach mehrdeutige Skalargrößen, aber immer nur als Hilfsgrößen, wie Potentiale, Stromfunktionen usf., die in indirekter Weise die real physikalischen Felder darstellen. Solche Hilfsgrößen werden wir aber relativ selten verwenden.

Das Feld einer unserer eindeutigen Skalarfunktionen $\alpha(x, y, z)$ stellen wir durch *äquiskalare Flächen* dar, die wir gewöhnlich für ganzzahlige Werte der Konstante zeichnen:

$$\alpha(x, y, z) = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Dabei wollen wir die Einheit hinlänglich klein wählen, um die Darstellung des Feldes in allen Einzelheiten zu erhalten. Bei jedem wirklichen Zeichnen bleibt die Einheit immer endlich. Abstrakte Sätze werden wir aber so formulieren, als wäre die Einheit infinitesimal, so daß man von Bruchteilen der Einheit absehen kann.

Wir nehmen an, daß die Flächen nie im Felde aufhören. Sie erstrecken sich entweder bis ins Unendliche, oder sie laufen in sich selbst zurück, oder sie endigen an den Feldgrenzen. Aus der Eindeutigkeit folgt, daß zwei verschiedene Äquiskalarflächen sich nie schneiden

können. Nichts hindert aber, daß gewisse Äquiskalarflächen sich selbst schneiden.

Die äquiskalaren Flächen für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$, die wir als äquiskalare Einheitsflächen bezeichnen wollen, zerlegen das Feld in eindeutiger Weise in *Einheitsschichten* oder *Lamellen*. Wenn man die Einheit genügend klein wählt, erhält man beliebig dünne und im Grenzfall infinitesimale Lamellen. Dann können wir sagen, daß zwischen zwei beliebigen Punkten x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1 im Felde immer eine eindeutig bestimmte Anzahl $N(\alpha)$ von Lamellen liegt, die gleich der Differenz der Funktionenwerte in den beiden Punkten ist:

$$(1') \qquad \alpha(x_1, y_1, z_1) - \alpha(x_0, y_0, z_0) = N(\alpha).$$

Eine Skalarfunktion kann in eine Konstante ausarten, und zwar in der Weise, daß die Lamellen ins Unendliche anschwellen, bis eine Lamelle den ganzen Raum erfüllt, und die Anzahl von Lamellen zwischen irgend zwei Punkten identisch Null wird. Im Grenzfall ist dann jede Fläche im Raume eine Fläche α = konst., d. h. der Verlauf der Äquiskalarfläche ist unbestimmt.

In demselben Raume können zwei Skalarfunktionen

$$(2) \qquad \alpha = \alpha(x, y, z), \qquad \beta = \beta(x, y, z)$$

gleichzeitig gegeben und jede durch ihre Äquiskalarflächen dargestellt sein. Diese Flächen schneiden sich längs der zweifach äquiskalaren Kurven (α, β). Auf einer solchen Kurve haben sowohl α wie β bestimmte konstante Werte. Die Einheitsflächen der einen Größe zerlegen die Einheitsschichten der anderen in Röhren mit parallelogrammartigen Querschnitten, die *Einheitsröhren* oder *Solenoide* (α, β). Aus den Voraussetzungen über die Äquiskalarflächen folgt, daß diese Kurven und die entsprechenden Röhren nie im Felde aufhören können. Sie erstrecken sich entweder ins Unendliche oder laufen in sich selbst zurück oder endigen an den Feldgrenzen. Denkt man sich im Felde eine geschlossene Kurve, so kann man deshalb mit voller Eindeutigkeit von der Anzahl von Solenoiden $N(\alpha, \beta)$ reden, die von der Kurve umschlossen wird.

Besteht zwischen den beiden Größen α und β eine Relation:

$$(3) \qquad F(\alpha, \beta) = 0,$$

so ist eine Fläche α = konst. auch eine Fläche β = konst. und umgekehrt, und die beiden Funktionen α und β haben dasselbe System von äquiskalaren Flächen. Die Einheitsflächen der einen Funktion fallen dagegen gewöhnlich nicht mit den Einheitsflächen der anderen zusammen, d. h. man muß die Flächen verschieden numerieren, je nachdem ob sie die Funktion α oder β darstellen sollen.

Es wird oft vorkommen, daß zwischen zwei physikalisch verschiedenen Größen eine solche Beziehung besteht, und deshalb ist es von Wichtigkeit, eine bequeme Terminologie hierfür zu haben. Gegeben sei z. B. ein Druckfeld durch *isobare* Flächen oder ein Temperaturfeld durch *isotherme* Flächen. Das Feld irgend einer anderen Skalargröße, z. B. einer Dichte, nennen wir dann *barotrop* („nach dem Druckfelde eingestellt"), wenn die Äquiskalarflächen dieser Größe mit den Isobarflächen zusammenfallen, dagegen *baroklin* („zum Druckfelde geneigt"), wenn ihre Äquiskalarflächen gegen die Isobarflächen geneigt sind und sie schneiden. Analog nennen wir das Feld dieser Skalargröße *thermotrop* („nach dem Temperaturfelde eingestellt"), wenn die Äquiskalarflächen dieser Größe mit den Isothermflächen zusammenfallen, im anderen Falle *thermoklin* („zum Temperaturfelde geneigt"). Ganz allgemein wollen wir zwei Skalarfunktionen α und β zueinander *homotrop* („ähnlich eingestellt") nennen, wenn sie ein gemeinsames System von Äquiskalarflächen haben, dagegen *heterotrop* („verschieden eingestellt"), wenn dies nicht der Fall ist. Die Gleichung (3), die eine gegenseitige Abhängigkeit zweier Funktionen α und β ausdrückt, nennen wir ganz allgemein die *Bedingung der Homotropie* und bei spezieller physikalischer Bedeutung der als unabhängig zu betrachtenden Größe die Bedingung der Barotropie, der Thermotropie usf.

Gehen wir von einem Raumpunkt x, y, z zu einem naheliegenden $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ über, so erhalten die Größen α und β Zuwächse, die wir $d\alpha_G$ und $d\beta_G$ bezeichnen werden. Der Index G ist hinzugefügt, um an die zugrunde liegende rein geometrische Betrachtung zu erinnern. Die beiden Zuwächse stehen gemäß der Relation (3) in einer ganz bestimmten Relation zueinander. Wir werden ihre Verhältniszahl

$$\Gamma = \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_G \tag{4}$$

allgemein den *Homotropiekoeffizienten* von β nach α nennen, speziell den *Barotropiekoeffizienten*, wenn man die unabhängige Variable α als Druck, und den *Thermotropiekoeffizienten*, wenn man sie als Temperatur deutet. Dieser Homotropiekoeffizient kennzeichnet also äußere räumliche Beziehungen, nicht innere physikalische Beziehungen der Größen α und β.

Explizite findet man diesen Koeffizienten, entweder indem man die Gleichung (3) nach β auflöst und dann nach α differentiiert, oder auch indem man die Gleichung (3) total differentiiert und dann in bekannter Weise

$$\Gamma = \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)_G = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial F}{\partial \beta}} \tag{5}$$

bildet.

Die Homotropie und die Existenz eines eindeutig bestimmten Homotropiekoeffizienten tritt als ein Spezialfall der allgemeinen Heterotropie auf. Dieser Ausnahmefall kann in zweierlei Weise zustande kommen: Die eine der Größen α oder β artet in eine Konstante aus, wobei der Homotropiekoeffizient entweder unendlich oder Null wird; oder der Winkel, den die äquiskalaren Flächen der beiden Systeme miteinander bilden, konvergiert gegen Null; dabei wird der Homotropiekoeffizient endlich.

In beiden Fällen schwellen aber die Solenoide des heterotropen Systems unbegrenzt an, indem sie in Lamellen übergehen. Ihre Zahl $N(\alpha, \beta)$ innerhalb einer jeden geschlossenen Kurve wird gleich Null.

In ähnlicher Weise können wir den Fall betrachten, indem in demselben Raume drei Skalarfunktionen

(6) $$\alpha = \alpha(x, y, z), \quad \beta = \beta(x, y, z), \quad \gamma = \gamma(x, y, z)$$

gleichzeitig gegeben sind. Man hat dann drei Systeme von äquiskalaren Flächen und Lamellen und drei Systeme von zweifach äquiskalaren Kurven und Solenoiden, (β, γ), (γ, α), (α, β). Die Einheitsflächen einer jeden der drei Skalarfunktionen zerlegen die Solenoide der beiden anderen in ein System von Einheitszellen (α, β, γ) parallelepipedischer Form.

Drei solche Systeme von Äquiskalarflächen bilden das allgemeinste krummlinige Koordinatensystem. Die Flächen (6) sind die Koordinatenflächen, die Kurven (β, γ), (γ, α), (α, β) die Koordinatenkurven. Die Auflösung nach x, y, z ergibt die Gleichungen:

(7) $$x = x(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma),$$

die den Übergang von den cartesischen Koordinaten x, y, z zu den krummlinigen α, β, γ vermitteln.

Als Koordinaten können aber die drei Skalarfunktionen (6) nur dann dienen, wenn sie voneinander unabhängig sind und somit der Übergang zu (7) möglich ist. Die Ausartung tritt ein, wenn zwischen den drei Skalargrößen eine Relation

(8) $$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

besteht. Die Werte $\beta = \beta_0$, $\gamma = \gamma_0$ von zwei der Größen bestimmen dann auch gleich den Wert $\alpha = \alpha_0$ der dritten. Das heißt, man hat nicht mehr drei verschiedene Systeme von zweifach äquiskalaren Kurven, sondern nur *ein* System von *dreifach* äquiskalaren Kurven. Die drei Flächenscharen (6) schneiden sich also nur in einem System von Kurven, und man kann alle Flächen als von einem einzigen Kurvensystem erzeugt ansehen. Es existieren keine Einheitszellen mehr, sondern nur noch Einheitsröhren oder Solenoide. Man begegnet drei Formen der Ausartung.

Die Gleichung (8) enthält nur eine der drei Größen α, β, γ und sagt aus, daß diese in eine Konstante ausgeartet ist; oder sie enthält zwei der drei Größen und sagt aus, daß diese zwei Größen homotrop sind, mit nur einem System von Äquiskalarflächen; oder endlich, die Gleichung enthält alle drei Größen, und die Ausartung geht in der Weise vor sich, daß die Flächen des einen Flächensystems einen gegen Null konvergierenden Winkel mit den Schnittkurven der beiden anderen bilden. In allen Fällen ergibt sich dasselbe Resultat, nämlich daß sich die Einheitszellen ins Unendliche verlängern und Solenoidform annehmen.

Besteht neben (8) noch eine davon unabhängige Relation:

$$F'(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \tag{9}$$

so sind alle drei Funktionen (6) gegenseitig homotrop.

2. Vektorfelder. Ein Vektor ist eine Größe mit Richtung im Raume, analytisch darstellbar durch seine Komponenten in Richtung von drei nicht in einer Ebene liegenden Achsen. Den Vektor als solchen werden wir durch einen fett gedruckten Buchstaben darstellen, seinen absoluten Betrag durch den entsprechenden Buchstaben in gewöhnlichem Druck, und seine Komponenten in Richtung der drei rechtwinkligen Achsen x, y, z durch diesen Buchstaben mit angehängten Indices x, y, z, also z. B. $\boldsymbol{A}, A, A_x, A_y, A_z$.

Die Felder der drei Skalargrößen $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$, $A_z(x, y, z)$ bestimmen eindeutig das Feld $\boldsymbol{A}(x, y, z)$, d. h. die Richtung und Größe dieses Vektors in jedem Punkte x, y, z des Raumes. Wenn eine Beziehung zwischen den Skalarfunktionen A_x, A_y, A_z besteht, ist der Vektor durch weniger als drei unabhängige Skalarfunktionen darstellbar, entweder durch zwei oder durch nur eine. Dies gibt eine Einteilung der Vektoren in dreifach, zweifach und einfach skalare Vektoren. Die spezielleren zweifach oder einfach skalaren Vektoren können weiter in verschiedene Klassen geteilt werden, je nach den endlichen oder infinitesimalen Beziehungen, durch welche die ursprüngliche Zahl der drei Skalarfunktionen auf zwei oder auf eine reduziert wird.

Die unmittelbare Darstellung der Vektoren durch Komponenten in einem beliebigen Achsensystem gibt gewöhnlich kein anschauliches Bild des Feldes. Ein wichtiges Hilfsmittel, um anschauliche Darstellungsformen zu bekommen, bilden die *Vektorlinien*, die überall tangentiell zur Richtung des Vektors verlaufen. Eine aus Vektorlinien erzeugte Fläche heißt eine *Vektorfläche*, und wenn diese Fläche röhrenförmig ist, begrenzt sie eine *Vektorröhre*.

Die Vektorlinien findet man durch Integration des simultanen Systems:

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{} = \frac{dz}{A_z}. \tag{1}$$

Die Integration führt zu zwei Skalarfunktionen $\alpha(x, y, z)$ und $\beta(x, y, z)$, deren zweifach äquiskalare Kurven

(2a) $$\alpha(x, y, z) = \text{konst.}, \qquad \beta(x, y, z) = \text{konst.}$$

die Vektorlinien darstellen.

Wenn die Vektorlinien bekannt sind, braucht man nur noch den absoluten Betrag des Vektors in jedem Punkte des Raumes zu kennen. Schreibt man $\left|\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\right| = \gamma$, so geben die Äquiskalarflächen der Funktion γ:

(2b) $$\gamma(x, y, z) = \text{konst.},$$

den Zahlenwert des Vektors in jedem Punkte des Raumes an. Die drei Skalarfunktionen (2a) und (2b) geben das anschaulichste Bild eines ganz allgemeinen Vektors.

Eine modifizierte, physikalisch sehr anschauliche Darstellungsform ergibt sich aus der Bemerkung, daß die Solenoide (α, β) der Skalargrößen (2a) Vektorröhren unseres Vektors sind. Das Produkt des Zahlenwertes des Vektors mit dem Querschnitt einer Vektorröhre an der betreffenden Stelle nennen wir den *Vektorfluß*. Dieser Vektorfluß ist gewöhnlich von Querschnitt zu Querschnitt einer und derselben Röhre verschieden. Ist aber das Röhrensystem festgelegt, so wird dieser Fluß eine überall im Raume eindeutig gegebene Skalargröße $\gamma'(x, y, z)$ sein. Man kann dann das Feld des Vektors darstellen durch das System (2a) von Vektorröhren mit zugehörigen Flächen gleichen Flusses:

(2c) $$\gamma'(x, y, z) = \text{konst.}$$

Man bemerke, daß der Fluß erst dann eine bestimmte Größe wird, wenn das System der Vektorröhren festgelegt worden ist. Sind α' und β' Funktionen von α und β, also $\alpha' = \alpha'(\alpha, \beta)$, $\beta' = \beta'(\alpha, \beta)$, so stellen

(3a) $$\alpha'(x, y, z) = \text{konst.}, \qquad \beta'(x, y, z) = \text{konst.}$$

dieselben Vektorlinien wie (2a) dar, geben aber eine andere Zerlegung in Einheitsröhren, so daß man eine andere Funktion

(3b) $$\gamma''(x, y, z) = \text{konst.}$$

zur Darstellung des Flusses in diesen Röhren bestimmen muß.

Wenn die Flußfunktion γ' oder γ'' zu einer Funktion von α und β bzw. α' und β' ausartet, so durchschneiden die Flächen (2c) bzw. (3b) nicht mehr die Röhren (2a) bzw. (3a). Man hat dann denselben Fluß in allen Querschnitten einer und derselben Röhre, wie bei der Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Das Feld dieses speziellen Vektors kann dann vollständig durch Röhren gleichen Flusses dargestellt werden:

der Vektor ist überall längs der Röhrenachse gerichtet, und sein absoluter Betrag ist dem Querschnitt der Röhre umgekehrt proportional. Durch eine geeignete Neuzerlegung wie bei dem Übergang von (2a) zu (3a) kann man immer erzielen, daß die Einheitsröhren oder Solenoide (α, β) gleichzeitig Röhren des Flusses Eins des Vektors wird. Ein in dieser Weise darstellbarer Vektor heißt ein *solenoidaler* oder auch *quellenfreier Vektor,* und die Röhren des Flusses Eins heißen die Solenoide des Vektors. Der solenoidale Vektor ist ein zweifach skalarer Vektor.

Die durch die Differentialgleichungen (1) oder durch die Gleichungen (2a) in endlicher Form dargestellten Vektorkurven bilden ein System von Raumkurven allgemeinster Art. Jedes Bündel dieser Kurven ist wie die Fibern eines Fadens tordiert, man kann zu diesen Kurven gewöhnlich keine Normalfläche legen. Wir können aber jetzt von unserem Vektor verlangen, daß seine Vektorlinien zu einer beliebigen Flächenschar $\alpha(x, y, z) =$ konst. normal sein sollen. Die Vektorkomponenten A_x, A_y, A_z müssen dann den Richtungsgrößen $\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ der Normalen dieser Flächenschar proportional sein. Wir können dann die folgenden Bedingungsgleichungen aufschreiben, wo n noch die Länge in der Normalenrichtung zu den Flächen $\alpha =$ konst. bedeutet und β eine beliebige Funktion der Koordinaten x, y, z ist:

$$\frac{A_x}{\frac{\partial \alpha}{\partial x}} = \frac{A_y}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} = \frac{A_z}{\frac{\partial \alpha}{\partial z}} = \frac{A}{\frac{\partial \alpha}{\partial n}} = \beta(x, y, z). \tag{4}$$

Ein Vektor, dessen Komponenten diese Gleichung befriedigen, ist ein *flächennormaler* Vektor, und als solcher ein Vektor, dessen Feld man durch zwei Skalargrößen α und β darstellen kann: er ist senkrecht zu den Flächen $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ gerichtet und hat den absoluten Betrag:

$$A = \beta \frac{d\alpha}{dn} = \frac{\beta}{h}, \tag{5}$$

wo h die Dicke einer α-Lamelle ist.

Wenn die Funktionen α und β homotrop sind, d. h. wenn zwischen ihnen eine Relation $F(\alpha, \beta) = 0$ besteht, so wird der Vektor $\boldsymbol{A}$ einfach skalar. Seine Richtung ist senkrecht zu den Flächen $\alpha =$ konst. oder $\beta =$ konst., und durch Neunumerierung der Flächen kann man seinen absoluten Betrag in der Form

$$A = \frac{d\alpha}{dn} = \frac{1}{h} \tag{6}$$

schreiben, wo h die Dicke der Lamellen nach dieser Neunumerierung ist. Man nennt ihn einen *lamellaren* Vektor, weil sein Feld unmittelbar durch die Lamellen des Skalars α dargestellt wird. Den allgemeinsten

flächennormalen Vektor nennt man auch (KELVIN) zusammengesetzt lamellar oder *zweifach lamellar*, weil bei der Darstellung seines Feldes die Lamellen zweier Skalargrößen auftreten.

3. Die fundamentalen Vektoroperationen. Die Äquivalenz des einen Vektorsymbols mit den drei Skalargrößen, die den Vektor analytisch definieren, können wir durch

$$A \equiv \begin{cases} A_x \\ A_y, \\ A_z \end{cases} \quad B \equiv \begin{cases} B_x \\ B_y \\ B_z \end{cases} \tag{1}$$

symbolisieren. Das explizite Rechnen mit den Skalargrößen $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ kann in den Fällen, wo die Beziehung der Vektoren zu dem zufällig gewählten Koordinatensystem nebensächlich ist, durch ein symbolisches Rechnen mit den Zeichen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ersetzt werden. Dabei sind die Grundoperationen die folgenden:

Die *Vektorsumme* ist ein Vektor, dessen Komponenten gleich der Summe der Komponenten der einzelnen Vektoren sind:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \equiv \begin{cases} A_x + B_x \\ A_y + B_y. \\ A_z + B_z \end{cases} \tag{2}$$

Geometrisch bildet man die Vektorsumme nach dem Parallelogrammgesetz.

Das *Produkt eines Vektors mit einem Skalar* ist ein Vektor, dessen Komponenten die Produkte der Komponenten des Vektors mit dem Skalar sind:

$$\boldsymbol{A}\alpha \equiv \begin{cases} A_x\alpha \\ A_y\alpha. \\ A_z\alpha \end{cases} \tag{3}$$

Das *skalare Produkt* zweier Vektoren ist eine Skalargröße:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB\cos\theta, \tag{4}$$

gleich dem Produkte der Skalarwerte der beiden Vektoren multipliziert mit dem Kosinus des dazwischen liegenden Winkels θ. Das Verschwinden des skalaren Produktes zweier Vektoren ist die notwendige und hinreichende Bedingung, daß zwei von Null verschiedene Vektoren senkrecht zueinander stehen.

Das *Vektorprodukt* zweier Vektoren ist der Vektor:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \equiv \begin{cases} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z. \\ A_x B_y - A_y B_x \end{cases} \tag{5}$$

Er steht senkrecht zu den beiden Vektorfaktoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, und sein positiver Sinn wird nach der *Schraubenregel* durch die kürzeste Drehung

von dem ersten Vektorfaktor $\boldsymbol{A}$ zu dem zweiten $\boldsymbol{B}$ gegeben[1]. Sein absoluter Betrag ist $|AB\sin\theta|$, d. h. gleich dem Flächeninhalt des von $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ gebildeten Parallelogrammes.

Aus (5) folgt:
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}.$$

Das Verschwinden des Vektorproduktes der zwei Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0$, ist die notwendige und hinreichende Bedingung, daß zwei von Null verschiedene Vektoren parallel sind.

An die Vorstellung von Skalarfeldern und Vektorfeldern knüpfen sich drei Differentialoperationen, die für deren Diskussion grundlegend sind, und den drei Produktoperationen (3), (4) und (5) formal entsprechen. Wir verstehen durch ∇ (das HAMILTONsche Symbol, nach GIBBS-WILSON „Del" genannt) eine Differentialoperation mit den drei Operationskomponenten $\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z$, welche die partiellen Differentiationen nach x, y, z sind:

$$\nabla \equiv \begin{cases} \nabla_x = \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \nabla_y = \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \nabla_z = \dfrac{\partial}{\partial z} \end{cases}. \tag{6}$$

Der Gleichung (3) formal entsprechend bilden wir aus der Skalargröße α ihren Ansteigevektor oder *Aszendenten:*

$$\nabla\alpha \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} \end{cases}, \tag{7}$$

der nichts anderes ist als der lamellare Vektor, den man durch die Lamellen der Skalargröße α darstellt. Der lamellare Vektor mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, der Fallvektor $-\nabla\alpha$, heißt der *Gradient* der skalaren Größe α, und bei spezieller physikalischer Bedeutung

---

[1] Die einfachste typische Raumkurve ist die Schraubenlinie, gekennzeichnet durch konstante Krümmung und konstante Torsion. Mit gleichen numerischen Werten dieser beiden Größen erhält man zwei Schraubenlinien, die Rechts- und die Linksschraubenlinie, die eine ist ein Spiegelbild des anderen. Käufliche Schrauben sind Rechtsschrauben, Linksschrauben werden nur für Ausnahmezwecke hergestellt. Die Bewegung einer Schraube in seinem Loche verknüpft eineindeutig einen Rotationssinn um eine Achse mit einem Translationssinn längs dieser Achse. Die Verknüpfung von Translations- und Rotationssinn durch die Rechtsschraube oder die gewöhnliche Schraube nennen wir kurz die Verknüpfung nach der *Schraubenregel.*

des Skalars Druckgradient, Temperaturgradient, Potentialgradient usf. Während rechnerisch die Aszendenten die bequemeren Größen sind, haben die Gradienten eine mehr konkrete physikalische Bedeutung: Der Druckgradient stellt die beschleunigende Wirkung des Druckfeldes dar, der Temperaturgradient gibt die Richtung des Wärmestromes, usf. Die Skalargröße α wird auch das Potential des Vektors $\nabla\alpha$ oder $-\nabla\alpha$ genannt, und zwar können wir sie zur Unterscheidung das Aszendentenpotential von $\nabla\alpha$ und das Gradientenpotential von $-\nabla\alpha$ nennen.

Der Gleichung (4) formal entsprechend bilden wir die Skalargröße $\nabla\cdot\boldsymbol{B}$, die auch mit $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$ bezeichnet wird:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \operatorname{div}\boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \tag{8}$$

und gewöhnlich die *Divergenz* des Vektors $\boldsymbol{B}$ genannt wird. Ist $\boldsymbol{B}$ die spezifische Bewegungsgröße (Produkt von Dichte und Geschwindigkeit) in einem materiellen Medium, so hat $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$ die Bedeutung des Massenausflusses aus dem *ruhenden geometrischen* Volumenelement, bezogen auf Volumen- und Zeiteinheit. Ist $\boldsymbol{B}$ die Geschwindigkeit in einem solchen Medium, so stellt $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$ die auf die Volumeneinheit bezogene kubische Expansionsgeschwindigkeit des *bewegten physischen* Volumenelementes dar.

Der Gleichung (5) formal entsprechend bilden wir den Vektor $\nabla\times\boldsymbol{B}$, der auch mit $\operatorname{curl}\boldsymbol{B}$ oder $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ bezeichnet wird:

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \operatorname{curl}\boldsymbol{B} \equiv \begin{matrix} \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z} \\[2mm] \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y} \end{matrix}\,. \tag{9}$$

Wir werden diesen Vektor die *Wirbeldichte* oder kürzer das *Wirbeln* des Vektors $\boldsymbol{B}$ nennen. Ist $\boldsymbol{B}$ die Geschwindigkeit in einem materiellen Medium, so stellt $\operatorname{curl}\boldsymbol{B}$ die *doppelte* Winkelgeschwindigkeit des bewegten Volumenelementes um dessen momentane Rotationsachse dar[1].

Ein Vektor, der die Eigenschaft

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0 \tag{10}$$

hat, heißt *divergenzfrei* oder *quellenfrei*. Ein Vektor, der die Eigenschaft

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{A} = 0 \tag{11}$$

hat, heißt *wirbelfrei*. Der Aszendent einer Skalargröße, also der lamellare Vektor ist wirbelfrei. Denn nach (7) und (9) hat man:

$$\operatorname{curl}\nabla\alpha = 0\,. \tag{12}$$

[1] Wenn MAXWELL die von ihm anfänglich benutzte Bezeichnung $\operatorname{rot}\boldsymbol{B}$ später verwarf und zu $\operatorname{curl}\boldsymbol{B}$ überging, so tat er dies sicher, um jede Verwirrung mit zwei Bedeutungen des klassischen Wortes Rotation zu vermeiden.

Das Wirbeln eines beliebigen Vektors ist ein divergenzfreier Vektor. Denn nach (9) und (8) findet man:

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \boldsymbol{A} = 0. \tag{13}$$

Dagegen ist der Aszendent eines beliebigen Skalars im allgemeinen nicht divergenzfrei. Denn bildet man nach (8) die Divergenz von $\nabla\alpha$, so findet man:

$$\operatorname{div} \nabla\alpha = \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} = \nabla^2\alpha. \tag{14}$$

Diese Operation zweiter Ordnung, die LAPLACE*sche Operation:*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{15}$$

kann man die *sphärische Ableitung* nennen. Sie kennzeichnet die allseitige Zu- oder Abnahme der Funktionenwerte von dem betrachteten Punkte aus: Es sei $\bar{\alpha}(r)$ der Mittelwert der Funktion $\alpha(x, y, z)$ auf einer kleinen Kugelfläche von Radius r, und $\alpha(0)$ der Funktionenwert im Mittelpunkte der Kugel. Bildet man die Differenz $\bar{\alpha}(r) - \alpha(0)$ dieser Werte, dividiert durch r^2 und läßt r gegen Null konvergieren, so bekommt man als Grenzwert einen Ausdruck, der mit dem numerischen Faktor $1 \cdot 2 \cdot 3$ multipliziert die sphärische Ableitung der Funktion α in dem betrachteten Punkte gibt:

$$\nabla^2\alpha = 6 \lim_{r \to 0} \bar{\alpha}(r) - \alpha(0) \tag{16}$$

Eine Skalarfunktion, die der LAPLACE*schen Gleichung*

$$\nabla^2\alpha = 0 \tag{17}$$

genügt, kann man eine *sphärisch konstante* Funktion nennen: sie hat die Eigenschaft, daß ihr Mittelwert auf einer Kugel von beliebigem Radius gleich dem Funktionenwert im Mittelpunkte der Kugel ist.

Ein lamellarer Vektor $\nabla\alpha$, dessen Potential α sphärisch konstant ist, ist gleichzeitig solenoidal und lamellar, also geometrisch darstellbar gleichzeitig durch Solenoide und Lamellen. Dieser gewissermaßen einfachste von allen Vektoren wird auch LAPLACE*scher Vektor* genannt.

Die sphärische Ableitung kann auch auf die drei skalaren Komponenten eines Vektors und damit auf den Vektor selbst angewandt werden. Die Bedeutung der Operation bleibt dabei die genau entsprechende und läßt sich durch die Gleichung

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = 6 \lim_{r \to 0} \frac{\bar{\boldsymbol{A}}(r) - \boldsymbol{A}(0)}{r^2} \tag{18}$$

ausdrücken, wo jetzt $\bar{A}(r)$ das Vektormittel des Vektors A auf der Kugelfläche ist, und $A(0)$ der Wert des Vektors im Mittelpunkte der Kugel. Einen Vektor, welcher der Vektorgleichung

$$(19) \qquad \nabla^2 A = 0$$

genügt, kann man eine sphärisch konstante Vektorfunktion nennen. Im Felde eines sphärisch konstanten Vektors ist der Mittelwert des Vektors auf einer Kugelfläche gleich dem Vektorwert im Mittelpunkte der Kugel.

Bildet man nach (9) zweimal das Wirbeln eines beliebigen Vektors, so kommt man auf die Gleichung:

$$(20) \qquad \mathrm{curl}^2 A = -\nabla^2 A + \nabla \,\mathrm{div} A .$$

Man hat also die folgende Äquivalenz von Operationen zweiter Ordnung:

$$(21) \qquad \mathrm{curl}^2 = -\nabla^2 + \nabla \,\mathrm{div} .$$

Wenn der Vektor divergenzfrei ist, sind die Operationen curl^2 und $-\nabla^2$ einander äquivalent.

4. Hauptklassen der Vektoren. Nach dieser Definition der fundamentalen Vektoroperationen können wir zu der Klassifikation der Vektoren und deren Darstellung durch Skalargrößen zurückkehren.

Aus einer einzigen Skalargröße $\alpha(x, y, z)$ leitet man den fundamentalen einfach skalaren Vektor

$$(1) \qquad A = \nabla \alpha$$

ab. Dies ist ein lamellarer Vektor, der durch die Lamellen der Skalargröße α darstellbar ist, und der seinerseits als Hilfsvektor zur Darstellung weiterer zusammengesetzter Vektorgrößen dient.

Sind zwei Skalargrößen $\alpha(x, y, z)$ und $\beta(x, y, z)$ gegeben, so kann man aus jedem einen einfach lamellaren Vektor bilden, $\nabla \alpha$ und $\nabla \beta$. Die Summe dieser beiden Vektoren ergibt keinen neuen Vektortypus, sondern nur wieder einen lamellaren Vektor $\nabla(\alpha + \beta)$. Dagegen gibt die Produktverbindung

$$(2) \qquad B = \beta \nabla \alpha$$

einen neuen Vektortypus, offenbar den allgemeinsten flächennormalen oder zweifach lamellaren Vektor mit den Flächen $\alpha =$ konst. als Normalflächen. Der ähnlich gebaute Vektor $B' = \alpha \nabla \beta$ hat die Flächen $\beta =$ konst. als Normalflächen.

Endlich gibt das Vektorprodukt der beiden Hilfsvektoren $\nabla \alpha$ und $\nabla \beta$ einen neuen Typus zweifach skalarer Vektoren:

$$(3) \qquad C = \nabla \beta \times \nabla \alpha .$$

Dieser Vektor steht senkrecht zu dem zweifach lamellaren (2), hat folglich die zweifach lamellaren Kurven (β, α) als Vektorkurven, und

der positive Sinn längs dieser Kurven ist nach der Schraubenregel durch den Drehsinn von $\nabla\beta$ zu $\nabla\alpha$ gegeben. Der absolute Betrag von (3) ist:

(3a) $$|\nabla\alpha| \, |\nabla\beta| \, |\sin\theta| = \frac{|\sin\theta|}{h_1 h_2}$$

wo θ der Winkel ist, unter dem sich die α-Flächen und die β-Flächen schneiden, während h_1 die Dicke der α-Lamellen und h_2 die Dicke der β-Lamellen ist. Nun ist aber $h_1 h_2/\sin\theta$ der Flächeninhalt desjenigen Parallelogrammes mit den Höhen h_1 und h_2 und dem Winkel θ, das den Querschnitt der (β, α)-Solenoide bildet, so daß das Produkt von den Zahlenwerten des Röhrenquerschnittes und des Vektors gleich Eins wird. Hieraus folgt:

Der Vektor $\nabla\beta \times \nabla\alpha$ ist der solenoidale Vektor, der durch die Solenoide (β, α) der beiden beliebigen Skalargrößen β und α dargestellt wird, und (3) ist die allgemeine Darstellung des solenoidalen Vektors.

Zwischen dem doppelt lamellaren Vektor $\beta\nabla\alpha$ und dem solenoidalen Vektor $\nabla\beta \times \nabla\alpha$, der durch dieselben beiden Skalaren dargestellt wird, besteht eine enge Beziehung. *Bildet man nämlich das Wirbeln des zweifach lamellaren Vektors $\beta\nabla\alpha$, so bekommt man den solenoidalen Vektor $\nabla\beta \times \nabla\alpha$:*

(4) $$\boldsymbol{C} = \operatorname{curl}\boldsymbol{B} = \operatorname{curl}(\beta\nabla\alpha) = \nabla\beta \times \nabla\alpha\,.$$

Diese Gleichung enthält auch den Satz, daß der zweifach lamellare Vektor $\boldsymbol{B} = \beta\nabla\alpha$ auf seinem Wirbeln $\operatorname{curl}\boldsymbol{B} = \nabla\beta \times \nabla\alpha$ senkrecht steht, oder also die Eigenschaft hat:

(5) $$\boldsymbol{B} \cdot \operatorname{curl}\boldsymbol{B} = 0\,.$$

Dies ist die Differentialgleichung des flächennormalen oder des zweifach lamellaren Vektors. Dieser Vektor wird durch Senkrechtstehen zu seinem Wirbeln charakterisiert, genau wie der einfach lamellare Vektor durch seine Wirbelfreiheit, und der solenoidale Vektor durch seine Divergenzfreiheit.

Sind schließlich drei voneinander unabhängige Skalargrößen gegeben:

$$\alpha(x, y, z)\,, \quad \beta(x, y, z)\,, \quad \gamma(x, y, z)\,,$$

so kann man in verschiedener Weise einen ganz allgemeinen dreifach skalaren Vektor darstellen. Wir merken uns die folgenden:

(6) $$\beta\nabla\alpha + \nabla\gamma\,, \quad \nabla\beta \times \nabla\alpha + \nabla\gamma\,, \quad \gamma\nabla\beta \times \nabla\alpha\,,$$

also die Summe eines doppelt und eines einfach lamellaren Vektors, die Summe eines solenoidalen und eines lamellaren Vektors und das Produkt eines solenoidalen Vektors mit einem skalaren Faktor.

Der Ausdruck $\beta\nabla\alpha + \nabla\gamma$ wird für uns besonders wichtig sein. Wenn man sein Wirbeln bildet, kommt man auf den Ausdruck $\nabla\beta \times \nabla\alpha$, der ein allgemeiner solenoidaler Vektor ist. Man folgert hieraus, daß

der allgemeine solenoidale Vektor durch das Wirbeln curl$\boldsymbol{\Phi}$ eines allgemeinen Vektors dargestellt werden kann. Unter Anwendung dieses Resultates und unter Beachtung der Form $\nabla\beta \times \nabla\alpha + \nabla\gamma$ des allgemeinen Vektors folgert man, daß man einen jeden Vektor durch eine skalare Hilfsgröße φ und eine vektorielle Hilfsgröße $\boldsymbol{\Phi}$ in der Form

$$\boldsymbol{A} = \nabla\varphi + \operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi} \tag{7}$$

darstellen kann, wie man sagt, durch ein *skalares Potential* φ und ein *Vektorpotential* $\boldsymbol{\Phi}$. Als Vektorpotential kann ein beliebiger Vektor $\boldsymbol{\Phi}$ dienen, es genügt jedoch ein zweifach lamellarer Vektor oder ein solenoidaler Vektor.

Um mit physikalisch anschaulicheren Größen zu arbeiten, schreibt man auch oft das erste Glied von (7) mit dem negativen Vorzeichen:

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi' + \operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi}, \tag{7a}$$

wo also $\varphi' = -\varphi$, d. h. man stellt den betreffenden Vektor oder Vektoranteil als Gradient des Gradientenpotentiales φ', anstatt als Aszendent des Aszendentenpotentiales φ dar[1].

5. Linienintegral und Flächenintegral eines Vektors. Es sei $d\boldsymbol{r}$ das Vektorlinienelement einer Kurve. Das skalare Produkt $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ hängt nur von der Tangentialkomponente des Vektors ab, und

$$\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{1}$$

stellt das Linienintegral der Tangentialkomponente des Vektors dar. Hat $\boldsymbol{A}$ die Bedeutung der Verrückung oder der Geschwindigkeit materieller Punkte, so kann man das Integral die *Prozession* dieser Punkte *längs*

[1] Es haben sich hier in ungünstiger Weise physikalische und mathematische Terminologie gekreuzt. Druckgradient, Temperaturgradient, Potentialgradient hatten in der Physik und der Meteorologie schon längst die Bedeutung von Fallvektoren, als um die Jahrhundertwende Verfasser vektoranalytischer Arbeiten die alte, an sich so wertvolle HAMILTONsche Bezeichnung $\nabla\alpha$ durch grad α ersetzten, und dem Gradienten die veränderte Bedeutung eines Ansteigevektors zulegten. In einem Buche wie dem vorliegenden, in dem man wichtige Anwendungen auf die Meteorologie macht, würde es hoffnungslose Verwirrungen bringen, wenn man das eigentliche Hauptwort der meteorologischen Wissenschaft in anderer Bedeutung als sonst in der ganzen meteorologischen Literatur seit mehreren Menschenaltern gebräuchlich anwenden würde. — Daß diese verschiedene Terminologie überhaupt aufgetreten ist, rührt daher, daß man in Wirklichkeit Namen für beide Vektoren nötig hat, für den mathematisch bequemeren sowie für den physikalisch konkreteren. Dabei hätte es nahe gelegen, die beiden einander entsprechenden Wörter Aszendent und Deszendent vorzuschlagen, wenn nicht Gradient in der Meteorologie unausrottbar gewesen wäre. — Wenn man es als sprachlich richtiger hat hinstellen wollen, durch Gradient den Ansteigevektor statt den Fallvektor zu bezeichnen, so beruht das nach von uns befragten sprachlichen Autoritäten auf einem Irrtum. Das lateinische Wort gradio bezieht sich nur auf das Handeln des Gehens, ganz davon abgesehen, ob es sich wie bei ascendo um ein Aufwärtssteigen oder bei descendo um ein Abwärtssteigen handelt.

der Kurve nennen und, wenn die Kurve geschlossen ist, die *Zirkulation* dieser Punkte *längs* der geschlossenen Kurve. Ist die Kurve eine physische Kurve und $\boldsymbol{A}$ die Verrückung oder Geschwindigkeit ihrer materiellen Punkte — in diesem Falle werden wir später gewöhnlich $\delta \boldsymbol{r}$ für $d\boldsymbol{r}$ schreiben —, so stellt (1) die Prozession oder die Zirkulation *der Kurve selbst* dar. Die Bezeichnungen Prozession und Zirkulation wollen wir unter Zugrundelegung des kinematischen Bildes auch bei beliebiger Bedeutung des Vektors $\boldsymbol{A}$ beibehalten.

Ist $\boldsymbol{A}$ speziell der Aszendent einer Skalargröße, $\boldsymbol{A} = \nabla\alpha$, so löst das Integral (1) die Aufgabe, das Feld des Skalars α zu rekonstruieren oder, wie wir es auch ausdrücken können, das Potential α des potentiellen Vektors $\nabla\alpha$ zu bestimmen. Da $\nabla\alpha \cdot d\boldsymbol{r} = d\alpha$ das vollständige Differential der Größe α längs der Strecke $d\boldsymbol{r}$ bedeutet, hat man:

$$\int_0^1 \nabla\alpha \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 d\alpha = \alpha_1 - \alpha_0 = N(\alpha). \tag{2}$$

Durch $N(\alpha)$ haben wir dabei die Anzahl von Lamellen der Größe α bezeichnet, die sich zwischen den Punkten 0 und 1 befinden, 1 (1'). Die Integration (2) kommt darauf hinaus, daß man die Lamellen algebraisch zählt, welche die Kurve auf ihrem Wege von 0 bis 1 durchsetzt. Das in dieser Weise bestimmte Potential eines lamellaren Vektors wird im einfach zusammenhängenden Raume immer eindeutig, kann aber im mehrfach zusammenhängenden Raume mehrdeutig werden.

Es sei jetzt $d\boldsymbol{\sigma}$ ein Vektorflächenelement, d. h. ein Vektor, dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des Elementes ist und der die Richtung der Normalen des Elementes hat. Das skalare Produkt $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ nennen wir dann den Fluß des Vektors durch das Element, und das über eine begrenzte Fläche erstreckte Integral

$$\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{3}$$

den *Fluß* (oder auch *Transport*) durch die Fläche. Stellt $\boldsymbol{A}$ die Geschwindigkeit in einem materiellen Medium dar, so ist der Fluß gleich dem pro Zeiteinheit durchströmenden Volumen und ergibt das von der Fläche selbst beschriebene Volumen, wenn die Fläche materiell ist und mitbewegt wird. Ist $\boldsymbol{A}$ die spezifische Bewegungsgröße in dem Medium, so wird der Fluß durch die pro Zeiteinheit durchströmte Masse gemessen. Der durch eine geschlossene Fläche nach außen gerichtete Fluß heißt der *Ausfluß* (oder auch *Export*). Wenn der Vektor $\boldsymbol{A}$ die Geschwindigkeit im materiellen Medium darstellt, so ist der Volumenausfluß pro Zeiteinheit mit der kubischen Expansionsgeschwindigkeit des Volumens innerhalb der bewegten geschlossenen Fläche identisch.

Wenn die Kurve geschlossen ist, gilt für das Linienintegral (1) die STOKES*sche Identität*:

$$\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int \operatorname{curl} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{4}$$

wo das Flächenintegral rechts über eine beliebige Fläche zu erstrecken ist, welche die gegebene geschlossene Kurve als Randkurve hat.

Wenn die Fläche geschlossen ist, gilt für das Flächenintegral (3) die GAUSSsche *Identität:*

$$\int \boldsymbol{A} \cdot d\sigma = \int \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, d\tau \,, \tag{5}$$

wo das Volumenintegral rechts über das gesamte Volumen innerhalb der geschlossenen Fläche zu nehmen ist. Beispiele für den konkreten Inhalt dieser Identität sind Aussagen wie die folgenden, die sich auf das Bewegungsfeld eines materiellen Kontinuums beziehen: die Expansionsgeschwindigkeit eines bewegten Körpers ist gleich der Summe der Expansionsgeschwindigkeiten seiner einzelnen Volumenelemente oder: der Massenausfluß aus einer ruhenden geschlossenen Fläche ist gleich der Summe der Massenausflüsse aus den einzelnen Volumenelementen innerhalb der Fläche.

Ist der Vektor wirbelfrei:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{A} = 0 \,, \tag{6}$$

so gibt die STOKESsche Identität die Integraleigenschaft des wirbelfreien Vektors, daß — im einfach zusammenhängenden Raume — die Zirkulation dieses Vektors längs jeder geschlossenen Kurve gleich Null ist:

$$\int \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \,. \tag{7}$$

Im mehrfach zusammenhängenden Raume wird das Integral gleich Null für Kurven, die sich in einen Punkt zusammenziehen lassen, ohne mit den Feldgrenzen in Berührung zu kommen; für die mit den Feldgrenzen verketteten Kurven dagegen bestimmt das Integral die zyklischen Konstanten des zirkulierenden, aber wirbelfreien Feldes.

Wenn der Vektor divergenzfrei ist:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \,, \tag{8}$$

so gibt die GAUSSsche Identität die Integraleigenschaft des divergenzfreien oder solenoidalen Vektors, daß der Ausfluß — im nichtperiphraktischen Raume — aus jeder geschlossenen Fläche Null ist:

$$\int \boldsymbol{A} \cdot d\sigma = 0 \,. \tag{9}$$

Aus dieser Eigenschaft kann man die Darstellbarkeit des solenoidalen Vektors durch die Vektorröhren oder Solenoide neu ableiten. In einem inkompressiblen Medium ist das Geschwindigkeitsfeld solenoidal. Wenn das Massenfeld stationär ist, hat die spez. Bewegungsgröße Solenoidaleigenschaft. Dies trifft mit einer gewissen Annäherung in der Atmosphäre zu, wo die Luftdichte durch die Höhenlage und durch die lokale Temperatur wesentlich lokal bestimmt ist.

Daß das Wirbeln $\operatorname{curl} \boldsymbol{A}$ eines beliebigen Vektors ein divergenzfreier und somit solenoidaler Vektor ist, haben wir schon **3** (13) gesehen. Die

Vektorlinien, Vektorflächen und Vektorröhren, welche den Vektor curl $\boldsymbol{A}$ bestimmen, nennen wir Wirbellinien, Wirbelflächen und Wirbelröhren. Der Wirbelfluß in einer Röhre, d. h. das Integral von curl $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ genommen über eine Querschnittsfläche der Röhre, heißt die Wirbelstärke der Röhre. Die Wirbelstärke einer beliebigen Wirbelröhre ist gleich der Anzahl von Einheitswirbelröhren oder Wirbelsolenoiden, welche die Röhre enthält. Wegen der absoluten Solenoidaleigenschaft kann eine Wirbelröhre nie im Felde aufhören, sie muß entweder an den Feldgrenzen endigen oder sich ins Unendliche erstrecken oder in sich selbst zurücklaufen. Mit voller Eindeutigkeit kann man deshalb von der Anzahl von Wirbelsolenoiden reden, die von einer geschlossenen Kurve umschlossen werden, und die STOKESsche Identität kann man folgendermaßen durch die Wirbelsolenoide ausdrücken:

Die Zirkulation einer beliebigen geschlossenen Kurve ist gleich der Anzahl von Einheitswirbelröhren oder Wirbelsolenoiden, die von der Kurve umschlossen werden.

Hieraus folgt, daß eine geschlossene Kurve, die auf einer nichtröhrenförmigen Wirbelfläche gelegen ist, keine Wirbelröhren umschließen kann und die Zirkulation Null haben muß. Bildet dagegen die Wirbelfläche die Wand einer Wirbelröhre, so kann zweierlei eintreffen: kann man die Kurve in einen Punkt zusammenziehen, ohne die Fläche zu verlassen, dann umschließt sie keine Solenoide und hat die Zirkulation Null; wenn aber die Kurve die Röhre einmal (bzw. n-mal) umschließt, so daß sie sich nicht in einen Punkt zusammenziehen läßt, ohne die Fläche zu verlassen, so hat sie eine Zirkulation gleich der Stärke der Wirbelröhre (bzw. n-mal der Stärke). Die verschiedenen Kurven behalten ihre Zirkulation bei, wie man sie auch längs der Röhre verschiebt.

In einem rotierenden starren Körper z. B. sind die Wirbellinien Geraden parallel zur Rotationsachse und die Wirbelsolenoide Röhren gleichen Querschnittes. Die Zirkulation C einer beliebigen Kurve, die diesem Körper angehört, ist deshalb gleich der Zirkulation der auf die Rotationsebene projizierten Kurve oder gleich dem von dieser projizierten Kurve umschlossenen Flächeninhalt Σ multipliziert mit dem doppelten Betrag der Winkelgeschwindigkeit ω des starren Körpers:

$$C = 2\omega\Sigma. \tag{10}$$

Innerhalb einer dünnen Schicht kann man sich eine schnelle, aber stetige Änderung des Vektors $\boldsymbol{A}$ denken, von einem Wert $\boldsymbol{A}$ auf der einen Seite zu dem Wert $\boldsymbol{A}'$ auf der anderen. Innerhalb der Schicht hat man dann große, aber endliche Werte der Ableitungen nach den Koordinaten und dadurch des Skalars div $\boldsymbol{A}$ und des Vektors curl $\boldsymbol{A}$. Läßt man dann die Dicke der Schicht gegen Null konvergieren, so hat man im Grenzfall einen plötzlichen Sprung von dem Vektorwert $\boldsymbol{A}$ auf der einen

Seite zu $\boldsymbol{A}'$ auf der anderen Seite einer Diskontinuitätsfläche, deren Einheitsnormale wir durch $\boldsymbol{n}$ bezeichnen. Die Größen $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ und $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$ werden in der unendlich dünnen Schicht unendlich und verlieren ihre Bedeutung. An die Stelle der kubischen Divergenz $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ tritt eine *Flächendivergenz*, die man durch

$$\operatorname{div}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}) \tag{11}$$

definieren kann; und an die Stelle des kubischen Wirbelns tritt ein *Flächenwirbeln*, das man durch

$$\operatorname{curl}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}) \tag{12}$$

definieren kann. Die Flächendivergenz hängt offenbar nur von dem Sprung der Normalkomponente des Vektors ab und das Flächenwirbeln nur von dem Sprung der Tangentialkomponenten. Kommen solche Diskontinuitätsflächen vor, so muß man in der GAUSSschen Identität die rechte Seite durch das Flächenintegral der Flächendivergenzen über denjenigen Teil der Diskontinuitätsfläche ergänzen, der innerhalb der geschlossenen Fläche liegt. In der STOKESschen Identität muß man die rechte Seite durch das Linienintegral des Flächenwirbelns über die Schnittlinie der Diskontinuitätsfläche mit der Fläche ergänzen, über welche man $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$ integriert. Gewöhnlich werden wir uns aber diese ergänzenden Integrale als implizite in den rechts auftretenden Integralen der Identitäten (4) und (5) enthalten denken.

Wenn an der Diskontinuitätsfläche oder der inneren Grenzfläche die Flächendivergenz verschwindet, so sagen wir, daß an dieser Fläche die solenoidale Grenzflächenbedingung erfüllt ist. Wenn das Flächenwirbeln verschwindet, so sagen wir, daß die lamellare oder potentielle Grenzflächenbedingung erfüllt ist. Die Vektorröhren gehen deshalb mit unverändertem Fluß durch die Diskontinuitätsfläche, wenn die solenoidale Grenzflächenbedingung erfüllt ist, und man hat ein vollständiges Solenoidalfeld, wenn der Vektor auch in den Räumen beiderseits der Fläche solenoidal ist. Wo sich zwei bewegte Medien verschiedener Dichte berühren, ist die solenoidale Bedingung erfüllt für die Geschwindigkeit, nicht aber für die spez. Bewegungsgröße. Wenn an der Grenzfläche ein Gleiten stattfindet, so hat man hier ein Flächenwirbeln. Räumliche Wirbelröhren, welche die Grenzfläche treffen, gehen hier in unendlich flache Wirbelröhren über, die der Fläche auf kürzeren oder längeren Strecken folgen können. Weiterhin können sie auf der einen oder anderen Seite jedoch aus der Fläche wieder austreten, um in sich selbst zurückzulaufen oder sich ins Unendliche fortzusetzen oder an den Feldgrenzen zu endigen, an denen man sich aber immer eine Fortsetzung derselben als solche zu Bandform flachgedrückte Röhren denken kann, wenn man diese Vorstellung zweckmäßig findet.

Den ganz beliebigen Vektor $\boldsymbol{A}$, auf den sich die STOKESsche Identität bezieht, können wir nach 4(4) in der Form

$$\boldsymbol{A} = \alpha \nabla\beta + \nabla\gamma \tag{13}$$

als Summe eines einfach und eines zweifach lamellaren Vektors darstellen. Da der einfach lamellare Vektor $\nabla\gamma$ wirbelfrei ist, liefert er in der STOKESschen Formel keinen Beitrag. Der zweifach lamellare Vektor $\alpha\nabla\beta$ hat das Wirbeln $\nabla\alpha \times \nabla\beta$, dessen Einheitswirbelröhren die Solenoide (α, β) sind, die man deshalb nur zu zählen braucht, um den Wert des Flächenintegrals in der STOKESschen Identität zu finden. Bezeichnen wir durch $N(\alpha, \beta)$ die Anzahl dieser Solenoide, so haben wir die Formel:

$$\int \alpha \nabla\beta \cdot d\boldsymbol{r} = \int \nabla\alpha \times \nabla\beta \cdot d\sigma = N(\alpha, \beta). \tag{14}$$

Oder in Worten:

Die Zirkulation des zweifach lamellaren Vektors $\alpha\nabla\beta$ längs einer geschlossenen Kurve ist gleich der Anzahl von (α, β)-Solenoiden, die von der Kurve umschlossen werden.

Der Satz ist auf einen beliebigen Vektor (13) anwendbar, wenn man dessen Darstellung als Summe eines zweifach und eines einfach lamellaren Vektors gefunden hat.

Dem Flächenintegral entsprechend sind die Solenoide algebraisch zu zählen: ein Solenoid gibt zum Integral den Beitrag $+1$ oder -1, je nachdem ob die Drehrichtung von $\nabla\alpha$ zu $\nabla\beta$ gleich oder entgegengesetzt der positiven Umlaufsrichtung auf der Kurve ist.

Wir werden im folgenden sehr oft mit diesen Solenoidzahlen und mit der dazugehörigen positiven Drehrichtung der Solenoide zu tun haben. Dabei ist die positive Drehrichtung der Solenoide in die abkürzende Bezeichnung $N(\alpha, \beta)$ einbegriffen nach dem folgenden einleuchtenden Schema:

(15)						
	$N(\alpha, \beta)$	positive Drehrichtung von	$\nabla\alpha$	zu	$\nabla\beta$,
	$N(-\alpha, \beta)$	,, ,, ,,	$-\nabla\alpha$	,,	$\nabla\beta$,
	$N(\alpha, -\beta)$	,, ,, ,,	$\nabla\alpha$	,,	$-\nabla\beta$,
	$N(-\alpha, -\beta)$	,, ,, ,,	$-\nabla\alpha$	,,	$-\nabla\beta$.

Dabei ist sowohl Vorzeichen wie Reihenfolge der Symbole α und β von Bedeutung. Man hat:

$$N(\alpha, \beta) = N(-\beta, \alpha) = N(\beta, -\alpha) = N(-\alpha, -\beta).$$

Am zweckmäßigsten schreibt man die Formel so, daß die darin auftretenden Vektoren einen spitzen Winkel miteinander bilden.

Bei Homotropie der Skalarfunktionen α und β ist die Solenoidzahl $N(\alpha, \beta)$ innerhalb einer jeden geschlossenen Kurve Null, und der zwei-

fach lamellare Vektor artet in einen wirbelfreien, einfach lamellaren Vektor aus.

Man folgert unmittelbar aus der Formel (14), daß

$$\int \alpha \nabla \beta \cdot d\boldsymbol{r} = -\int \beta \nabla \alpha \cdot d\boldsymbol{r}, \tag{16}$$

was einer Umformung des Integrals durch partielle Integration entspricht.

6. Eindeutige Bestimmtheit eines Vektors durch Divergenz, Wirbel und Grenzflächenbedingungen. Wir bilden die Divergenz, einerseits des Produktes $\alpha \boldsymbol{A}$, andererseits des Vektorproduktes $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$:

$$\operatorname{div} \alpha \boldsymbol{A} = \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla \alpha, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{A}. \tag{2}$$

Integriert man beide Formeln über ein begrenztes Volumen, so erhält man mit Hilfe der GAUSSschen Identität nach Umstellung der Glieder die beiden nützlichen Transformationsformeln:

$$\int \boldsymbol{A} \cdot \nabla \alpha \, d\tau = -\int \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, d\tau + \int \alpha \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{3}$$

$$\int \boldsymbol{A} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{B} \, d\tau = \int \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{A} \, d\tau - \int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \tag{4}$$

Sie sind besonders nützlich für die Umformung von Energieausdrücken, die letztere führt von den MAXWELLschen Gleichungen zu dem POYNTINGschen Theorem. Wenn aus irgendeinem Grunde das Flächenintegral auf der rechten Seite verschwindet, hat man innerhalb der Grenzfläche die Transformationsformeln:

$$\int \boldsymbol{A} \cdot \nabla \alpha \, d\tau = -\int \alpha \operatorname{div} \boldsymbol{A} \, d\tau, \tag{3'}$$

$$\int \boldsymbol{A} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{B} \, d\tau = \int \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{A} \, d\tau. \tag{4'}$$

Diesen Formeln kann man auch die volle Allgemeinheit der ursprünglichen (3) und (4) zuschreiben, indem man die Oberflächenintegrale als Integrale der Flächendivergenz bzw. des Flächenwirbelns auffaßt, die man sich als implizite in den Volumenintegralen enthalten denkt.

Eine spezielle Folgerung von (3) merken wir kurz an. Ist $\boldsymbol{A}$ ein an Richtung und Größe konstanter Vektor, der als solcher die Divergenz Null hat und als konstanter Faktor vor das Integralzeichen tritt, so gibt (3) das Vektorintegral:

$$\int \nabla \alpha \, d\tau = \int \alpha \, d\boldsymbol{\sigma}. \tag{5}$$

Wenn α auf der Fläche konstant ist, kann man α vor das Integralzeichen setzen, und die rechte Seite verschwindet, weil $\int d\boldsymbol{\sigma}$ über jede geschlossene Fläche Null ist. Es ergibt sich dann:

$$\int \nabla \alpha \, d\tau = 0, \tag{5'}$$

d. h. das Volumenintegral eines potentiellen Vektors innerhalb einer Äquipotentialfläche ist Null.

Aus den Formeln (3) und (4) folgen eine Reihe von Spezialfällen, wenn man die Vektoren spezialisiert. Setzt man z. B. in (3) den Vektor $\boldsymbol{A}$ lamellar voraus, $\boldsymbol{A} = \nabla\beta$, so folgt das bekannte GREENsche Theorem. Nimmt man noch spezieller an, daß β mit α identisch ist, also $\boldsymbol{A} = \nabla\alpha$, und außerdem $\boldsymbol{A}$ solenoidal, so daß $\nabla^2\alpha = 0$, so erhält man die Formel:

$$\int(\nabla\alpha)^2 d\tau = \int\alpha\nabla\alpha\cdot d\boldsymbol{\sigma}, \tag{6}$$

die das Volumenintegral des Quadrates eines LAPLACEschen Vektors in ein Oberflächenintegral umformt. Dieses Oberflächenintegral verschwindet, einerseits wenn $\nabla\alpha\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$, d. h. wenn die Normalkomponente des Vektors $\nabla\alpha$ an der Grenzfläche Null ist, andererseits wenn α als eine an der Oberfläche konstante Größe vor das Integralzeichen tritt, weil dann $\int\nabla\alpha\cdot d\boldsymbol{\sigma}$ infolge der Solenoidaleigenschaft des LAPLACEschen Vektors verschwindet. Die Konstanz von α an der Grenzfläche bedeutet aber, daß die zu der Grenzfläche tangentielle Komponente des Vektors $\nabla\alpha$ identisch Null ist. Dadurch ergibt sich:

Ein LAPLACEscher Vektor ist identisch Null in jedem Punkte eines Raumes, an deren Grenzfläche entweder seine Normalkomponente oder seine Tangentialkomponente Null ist.

Zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}'$, die in einem Raume identisch dieselbe Divergenz und dasselbe Wirbeln und an der Grenzfläche des Raumes entweder identisch dieselbe Normalkomponente oder identisch dieselbe Tangentialkomponente haben, geben dann als Differenz $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$ einen LAPLACEschen Vektor, der an der Grenzfläche entweder die Normalkomponente Null oder die Tangentialkomponente Null hat und somit identisch Null sein muß. Das heißt:

Innerhalb eines begrenzten Raumes ist ein Vektor durch seine Divergenz und sein Wirbeln eindeutig bestimmt, wenn noch dazu an der Grenzfläche entweder die Normalkomponente oder die Tangentialkomponente des Vektors gegeben ist.

Wie eine Skalarfunktion bis auf eine durch die Randbedingungen zu bestimmende Konstante durch seine Ableitungen eindeutig bestimmt ist, so ist das Vektorfeld bis auf ein durch die Randbedingungen zu bestimmendes LAPLACEsches Feld eindeutig durch seine Divergenz und sein Wirbeln bestimmt. Im unbegrenzten Raume kann man aber von diesem LAPLACEschen Felde absehen, vorausgesetzt, daß der Betrag des Vektors im Unendlichen wie $1/r^2$ oder stärker gegen Null konvergiert. Denn in diesem Falle verschwindet das Flächenintegral rechts in (6) über eine unendlich große Kugelfläche, und das LAPLACEsche Zuschlagsfeld ist im ganzen Raume identisch Null.

In diesem Falle ist also der Vektor im ganzen unendlichen Raume durch seine Divergenz und sein Wirbeln im Endlichen eindeutig

bestimmt und kann durch diese Divergenz und dieses Wirbeln explizit dargestellt werden.

Ist der Vektor wirbelfrei mit gegebener Divergenz:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{A} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = e, \tag{7}$$

so ist $\boldsymbol{A}$ durch ein skalares Potential darstellbar. Wir drücken ihn durch den Gradienten des Gradientenpotentiales φ aus:

$$\boldsymbol{A} = -\nabla \varphi. \tag{8}$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung (7) ein, so geht diese in die POISSON*sche Gleichung*

$$\nabla^2 \varphi = -e \tag{9}$$

über, die jetzt das Potential erfüllen muß. Dieses Potential läßt sich als Funktion der Koordinaten x, y, z bestimmen, wenn wir die Verteilung der Divergenz e als Funktion der Koordinaten x', y', z' kennen, $e(x', y', z')$. Es sei r der Abstand des Punktes x', y', z', wo e gegeben ist, vom Punkte x, y, z, wo φ gesucht wird:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \tag{10}$$

Man findet dann φ durch die Formel:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e(x', y', z')}{r} \, d\tau', \tag{11}$$

wo $d\tau' = dx'dy'dz'$ und wo die Integration über alle Stellen des Raumes auszudehnen ist, wo eine Divergenz $e(x', y', z')$ vorkommt.

Da r nur im Nenner des Integralausdruckes vorkommt, finden wir für den Vektor selbst:

$$= -\nabla \varphi = -\int \frac{e}{4\pi} \nabla \frac{1}{r} \, d\tau' = \int \frac{e \boldsymbol{r}}{4\pi r^3} \, d\tau'. \tag{12}$$

Die Formel gibt eine anschauliche Darstellung des Feldes als herrührend von elementaren Radialströmen mit dem Zahlenwert:

$$4\pi r^3 \, e \, d\tau' \qquad \frac{e\, d\tau'}{4\pi r^2} \tag{13}$$

Durch die Superposition aller dieser von den Divergenzstellen ausgehenden Radialströme entsteht das Feld des divergierenden Vektors im unendlichen Raum. Das Resultat ist gleich wertvoll für die Hydrodynamik (die das anschaulichste Bild gibt), wie für die Lehre von den Gravitations- oder den elektrischen und magnetischen Feldern.

In Verbindung mit diesen Felddarstellungen merken wir uns beiläufig, daß aus

$$\frac{\partial r}{\partial x'} = -\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial y'} = -\frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z'} = -\frac{\partial r}{\partial z}$$

sofort folgt:

$$\nabla' f(r) = -\nabla f(r), \tag{14}$$

wodurch man unter Umständen von den Koordinaten x, y, z zu den Koordinaten x', y', z' übergehen kann.

Es sei jetzt andererseits der Vektor $\boldsymbol{A}$ solenoidal mit gegebenem Wirbeln:

$$\text{(15)} \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0, \qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}.$$

Man kann dann $\boldsymbol{A}$ durch ein Vektorpotential $\boldsymbol{\Phi}$ darstellen:

$$\text{(16)} \qquad \boldsymbol{A} = \operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi},$$

wo als Vektorpotential ein solenoidaler Vektor immer genügt, so daß wir $\operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} = 0$ setzen können. Dann ist aber nach **3** (21) $\operatorname{curl}^2\boldsymbol{\Phi} = -\nabla^2\boldsymbol{\Phi}$, und setzt man (16) in die zweite Gleichung (15) ein, so findet man, daß das Vektorpotential $\boldsymbol{\Phi}$ die POISSONsche Vektorgleichung

$$\text{(17)} \qquad \nabla^2\boldsymbol{\Phi} = -\boldsymbol{c}$$

erfüllen muß. Integriert man diese Gleichung, wie die Skalargleichung (9), für jede Komponente, so findet man für den Vektor:

$$\text{(18)} \qquad \boldsymbol{\Phi} = \int \frac{\boldsymbol{c}(x', y', z')}{4\pi r}\, d\tau',$$

wo die Integration über alle Stellen (x', y', z) des Raumes zu erstrecken ist, wo ein Wirbeln $\boldsymbol{c}$ vorkommt.

Um von dem Vektorpotential zu dem Vektor selbst nach (16) überzugehen, merken wir uns zunächst die allgemeine Vektorformel:

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{curl}\gamma\boldsymbol{c} = \gamma \operatorname{curl}\boldsymbol{c} + \nabla\gamma \times \boldsymbol{c},$$

die man leicht aus den fundamentalen Operationen **3** (5) und (9) ableitet. Wenn wir sie unter dem Integralzeichen in (18) anwenden, hängt aber nur die mit γ zu identifizierende Größe $1/(4\pi r)$ von x, y, z ab, auf die sich die Operation curl bezieht, und es ergibt sich:

$$\text{(20)} \qquad \boldsymbol{A} = \operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi} = \int \left(\nabla \frac{1}{4\pi r}\right) \times \boldsymbol{c}\, d\tau' = -\int \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{c}}{4\pi r^3}\, d\tau'.$$

Um ein möglichst anschauliches Bild dieses Integrales zu bekommen, können wir uns denken, daß zunächst nur eine einzige Wirbelröhre von dem elementaren Querschnitte $d\sigma$, aber der endlichen Wirbelstärke $i = \boldsymbol{c} \cdot d\sigma$ vorhanden ist. Ist dann $d\boldsymbol{r}$ ein Vektorlinienelement längs dieser Röhre, so hat man nur längs dieser Röhre zu integrieren, da die konstante Wirbelstärke i der Röhre vor das Integralzeichen tritt. Der von einer einzigen Wirbelröhre der Wirbelstärke i herrührende Vektor $\boldsymbol{A}$ wird dann:

$$\text{(21)} \qquad \boldsymbol{A} = -i \int \frac{\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}.$$

Denkt man sich nun eine beliebige Verteilung von elementaren Wirbelröhren, von denen jede die Wirbelstärke di hat, so kann man das Integral (20) in der Form

$$\text{(22)} \qquad \boldsymbol{A} = -\int di \int \frac{\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

schreiben. (21) gibt hier die bekannte Darstellung des magnetischen Feldvektors $\boldsymbol{A}$, der von einem linearen elektrischen Strome der konstanten Stromstärke i herrührt, und (22) gibt dieselbe Darstellung, wenn ein beliebiges System von elementaren Strombahnen mit den elementaren Stromstärken di vorhanden ist. Das Feld kann beschrieben werden als von Elementarfeldern herrührend, für die man, bzw. nach (20) oder (22), die Ausdrücke

$$\frac{\quad}{4\pi r^3}\,d\tau' \qquad \text{oder} \qquad di\,\frac{d\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}$$

hat. Es ist das Feld, das nach dem BIOT-SAVARTschen Gesetz von jedem Elemente einer elektrischen Strombahn herrührt: das Feld ist zirkulierend und besteht aus Kreisen um das Element als Achse. Der Betrag des Vektors ist umgekehrt proportional r^2 und proportional dem Sinus des Winkels zwischen dem Elemente und dem Radiusvektor $\boldsymbol{r}$.

Hat der Vektor schließlich sowohl Divergenz als auch Wirbeln:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = e, \qquad \operatorname{curl}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}, \tag{23}$$

so findet man den Vektor in der Form:

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi + \operatorname{curl}\boldsymbol{\Phi}, \tag{24}$$

wobei man das Skalarpotential φ nach (11) und das Vektorpotential $\boldsymbol{\Phi}$ nach (18) berechnet.

Schließlich bemerken wir, daß man mit Hilfe der Integralsätze (3) und (4) auch Sätze über die eindeutige Bestimmtheit mehrerer miteinander verbundener Vektoren ableiten kann. Wir erwähnen den folgenden:

Gegeben sind zwei miteinander linear verbundene Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^* + \alpha\boldsymbol{a}.$$

Die Skalarfunktion α und der Verbindungsvektor $\boldsymbol{A}^*$ sind bekannte Größen. Der Vektor $\boldsymbol{A}^*$ existiere nur in einem endlichen Teil des Raumes, und dasselbe gelte für das Wirbeln und die Divergenz der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{A}$. Die Vektorfelder der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{A}$, die sich im Unendlichen wie $1/r^2$ verhalten, sind dann eindeutig definiert, wenn außer α und $\boldsymbol{A}^*$ die Divergenz des einen Vektors und das Wirbeln des andern bekannt ist.

7. Operationen mit drei Vektoren. Man kann sowohl das Skalarprodukt als auch das Vektorprodukt eines Vektors $\boldsymbol{A}$ mit dem Vektorprodukt $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ zweier anderer Vektoren bilden. Es gibt also zwei wesentlich verschiedene Produkte von drei Vektoren.

Das erste dreifache Produkt ist eine Skalargröße. Geometrisch wird sie dargestellt durch das Volumen des Parallelepipeds der drei Linien-

segmente $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und analytisch durch die Determinante der Projektionen der drei Vektoren auf die drei rechtwinkligen Achsen:

(1) $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\equiv$$

B_z

Den Rechenregeln für Determinanten entsprechend kann man in diesem parallelepipedischen Produkt die Zeichen $\cdot$ und $\times$ miteinander vertauschen:

(2) $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C},$$

und auch die Reihenfolge der Vektoren zyklisch vertauschen:

(3) $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B},$$

während die Vertauschung zweier Faktoren Veränderung des Vorzeichens zur Folge hat:

(4) $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}.$$

Das zweite dreifache Produkt ist ein Vektor. Wenn man auf die Komponentendefinitionen zurückgreift, findet man, daß dieses Produkt sich linear durch die beiden, in dem engeren Vektorprodukte enthaltenen Vektoren darstellen läßt:

(5) $$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B}$$

und

(6) $$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=-(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B}.$$

Die in diesen Gleichungen links stehenden Klammern sind wichtig, weil die beiden Produkte $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ und $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$, wie die Formeln zeigen, verschieden sind. Dagegen kann man die Klammern auf der rechten Seite weglassen, wenn man *vereinbart, daß ein zwischen zwei Vektorzeichen angebrachter Punkt sich nur auf diese beiden Vektorzeichen bezieht und sie zu einem Skalarprodukt vereinigt.* Mit derselben Bedeutung wie die Formeln (5) und (6) schreiben wir deshalb:

(5') $$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\boldsymbol{B},$$

(6') $$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}.$$

Dies wird später eine allgemeinere Deutung dieser Formeln möglich machen.

Von drei Vektoren:

(7) $$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C},$$

die ein bestimmtes Parallelepiped definieren, kann man drei neue Vektoren ableiten:

(8) $$\boldsymbol{A}^*=\frac{\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}\qquad \boldsymbol{B}^*=\frac{\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}},\qquad \boldsymbol{C}^*=\frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}}$$

die ein neues Parallelepiped definieren, das durch das erste eindeutig bestimmt ist. Bezeichnet man zur Abkürzung die Determinante (1) oder die Größe $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ mit Δ, so sind diese Vektoren durch die Komponenten

$$(8') \quad \boldsymbol{A}^* \equiv \begin{matrix} \frac{1}{\Delta}(B_y C_z - B_z C_y) \\ \frac{1}{\Delta}(B_z C_x - B_x C_z), \\ \frac{1}{\Delta}(B_x C_y - B_y C_x) \end{matrix} \qquad \boldsymbol{B}^* \equiv \begin{matrix} \frac{1}{\Delta}(C_y A_z - C_z A_y) \\ \frac{1}{\Delta}(C_z A_x - C_x A_z), \\ \frac{1}{\Delta}(C_x A_y - C_y A_x) \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{C}^* \equiv \begin{matrix} \frac{1}{\Delta}(A_y B_z - A_z B_y) \\ \frac{1}{\Delta}(A_z B_x - A_x B_z) \\ \frac{1}{\Delta}(A_x B_y - A_y B_x) \end{matrix}$$

gegeben. Bildet man aus den drei Vektoren $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{C}^*$ nach dem Schema (8) wieder drei neue Vektoren, so kommt man, wie sich durch die eben gegebenen Eigenschaften der dreifachen Produkte leicht zeigen läßt, zu dem ursprünglichen Vektorsystem (7) zurück:

$$(9) \quad \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{C}^*}{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{C}^*}, \quad \text{»} \quad \frac{\boldsymbol{C}^* \times \boldsymbol{A}^*}{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{C}^*}, \quad \boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{A}^* \times \boldsymbol{B}^*}{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B}^* \times \boldsymbol{C}^*}.$$

Die beiden Vektorsysteme $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{A}^*, \boldsymbol{B}^*, \boldsymbol{C}^*$ nennt man dementsprechend zueinander *reziprok*.

Betrachten wir nun (1) als die Determinante der Koeffizienten eines linearen dreigliedrigen Gleichungssystems, so haben die Komponenten des reziproken Vektorsystems (8′) diese Determinante als Nenner, während der Zähler durch die Unterdeterminanten gegeben ist, die bei der Auflösung des Gleichungssystems auftreten. Um dieses Resultat für die Auflösung eines Gleichungssystems zu verwerten, ist nur noch zu beachten, in welcher Weise man die neun Vektorkomponenten als Koeffizienten des Gleichungssystems verteilt. Es kann in zweierlei Weise geschehen: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ können *Kolonnenvektoren* sein, deren Komponenten die im Gleichungssystem vertikal untereinanderstehenden Koeffizienten sind, oder sie können *Zeilenvektoren* sein, deren Komponenten die in gleicher Zeile stehenden Koeffizienten sind. Beachtet man jetzt die Anordnung der Koeffizienten sowohl im gegebenen wie im aufgelösten Gleichungssystem, so findet man das einfache Gesetz:

In linearen Gleichungssystemen, die durch Auflösung auseinander hervorgehen, sind die Zeilenvektoren des einen Systems reziprok zu den Kolonnenvektoren des anderen Systems.

8. Lineare Vektorfunktion. Tensor. Nachdem dieses Gesetz für die Auflösung der linearen Gleichungen gefunden ist, können wir eine abkürzende Symbolik für die Operationen mit linearen Gleichungen und insbesondere für deren Auflösung einführen.

Zunächst ist hervorzuheben, daß man mit identisch denselben Zeichen zwei verschiedene Systeme von linearen Gleichungen schreiben kann, die man zueinander *konjugiert* nennt:

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = A_x^x x + A_x^y y + A_x^z z, & \xi' = A_x^x x + A_y^x y + A_z^x z, \\ \eta = A_y^x x + A_y^y y + A_y^z z, & \eta' = A_x^y x + A_y^y y + A_z^y z, \\ \zeta = A_z^x x + A_z^y y + A_z^z z, & \zeta' = A_x^z x + A_y^z y + A_z^z z. \end{cases}$$

Sie definieren zwei zueinander konjugierte *lineare Vektorfunktionen*, $\mathfrak{\varrho}$ mit den Komponenten ξ, η, ζ, und ϱ' mit den Komponenten ξ', η', ζ'. Das eine der beiden Gleichungssysteme geht aus dem anderen durch Spiegelung an der Hauptdiagonale hervor. Die Kolonnenvektoren $\boldsymbol{A}^x$, $\boldsymbol{A}^y$, $\boldsymbol{A}^z$ des ersten Systems sind die Zeilenvektoren des konjugierten, und die Zeilenvektoren $\boldsymbol{A}_x, \boldsymbol{A}_y, \boldsymbol{A}_z$ des ersten Systems sind die Kolonnenvektoren des zweiten konjugierten Systems. Die nach der eben formulierten Regel aufgelösten Gleichungen (1) sind:

$$(2) \quad \begin{cases} x = A_x^{*x}\xi + A_y^{*x}\eta + A_z^{*x}\zeta, & x = A_x^{*x}\xi' + A_x^{*y}\eta' + A_x^{*z}\zeta', \\ y = A_x^{*y}\xi + A_y^{*y}\eta + A_z^{*y}\zeta, & y = A_y^{*x}\xi' + A_y^{*y}\eta' + A_y^{*z}\zeta', \\ z = A_x^{*z}\xi + A_y^{*z}\eta + A_z^{*z}\zeta, & z = A_z^{*x}\xi' + A_z^{*y}\eta' + A_z^{*z}\zeta'. \end{cases}$$

Wir führen jetzt zusammengesetzte Größen höherer Ordnung ein, die *Tensoren*, die sich ähnlich zu den Vektoren verhalten wie die Vektoren zu den Skalaren. Den konjugierten Gleichungssystemen (1) ordnen wir zwei zueinander *konjugierte Tensoren* $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ zu:

$$(3) \quad \mathfrak{A} \equiv \begin{matrix} A_x^x & A_x^y & A_x^z \\ A_y^x & A_y^y & A_y^z \\ A_z^x & A_z^y & A_z^z \end{matrix}, \qquad \mathfrak{A}' \equiv \begin{cases} A_x^x & A_y^x & A_z^x \\ A_x^y & A_y^y & A_z^y \\ A_x^z & A_y^z & A_z^z \end{cases}.$$

Jeder Tensor ist also durch neun skalare Komponenten definiert, die ihrerseits zu einer Gruppe von drei Zeilenvektoren oder zu einer Gruppe von drei Kolonnenvektoren zusammengefaßt werden können. Dabei sind die Zeilenvektoren des einen Tensors die Kolonnenvektoren des zugehörigen konjugierten Tensors.

In völlig eindeutiger Weise können wir dann die Gleichungssysteme (1) durch

$$(4) \quad \varrho = \mathfrak{A} \cdot \boldsymbol{r}, \quad \varrho' = \mathfrak{A}' \cdot \boldsymbol{r}$$

oder auch durch

$$(4') \quad \varrho = \boldsymbol{r} \cdot \mathfrak{A}', \quad \varrho' = \boldsymbol{r} \cdot \mathfrak{A}$$

symbolisieren.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen nennt man skalare Produkte von Tensor und Vektor. Dieses skalare Produkt stellt also einen Vektor dar. Für diese skalare Multiplikation gilt nach den Gleichungen (4) und (4′) die Rechenregel:

(5) $$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathfrak{A}', \qquad \mathfrak{A}' \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathfrak{A},$$

d. h. *das skalare Produkt eines Tensors mit einem Vektor als Postfaktor ist gleich dem skalaren Produkt des konjugierten Tensors mit demselben Vektor als Präfaktor.* Die Anwendung auf die lineare Vektorfunktion ergibt: In der linearen Darstellung eines Vektors als skalares Produkt von Vektor und Tensor führt die Transposition der Faktoren zu der konjugierten linearen Vektorfunktion über. Die Transposition der Symbole $\mathfrak{A}$ und $\mathbf{r}$ symbolisiert somit die Transposition der Koeffizienten in den explizite ausgeschriebenen Gleichungssystemen (1).

Wenn speziell das kommutative Gesetz gilt:

(6) $$\mathfrak{A} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathfrak{A},$$

so ist dies das Kriterium dafür, daß der Tensor $\mathfrak{A}$ und ebenfalls das entsprechende Gleichungssystem *selbstkonjugiert* oder *symmetrisch* sind, d. h. die Eigenschaft

(6a) $$A_x^y = A_y^x, \qquad A_x^z = A_z^x, \qquad A_y^z = A_z^y$$

haben, so daß die Transposition den Tensor oder das Gleichungssystem nicht ändert.

Nachdem wir die Gleichungen (1) durch (4) oder (4′) symbolisiert haben, können wir die aufgelösten Gleichungen entweder durch

(7) $$\mathbf{r} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \varrho, \qquad \mathbf{r} = (\mathfrak{A}')^{-1} \cdot \varrho'$$

oder auch durch

(7′) $$\mathbf{r} = \varrho \cdot (\mathfrak{A}')^{-1}, \qquad \mathbf{r} = \varrho' \cdot \mathfrak{A}^{-1}$$

symbolisieren, wo wir $\mathfrak{A}^{-1}$ den zu $\mathfrak{A}$ *reziproken Tensor* und $(\mathfrak{A}')^{-1}$ den zu $\mathfrak{A}'$ reziproken Tensor nennen können. Dabei sind zwei Tensoren zueinander reziprok, wenn die Zeilenvektoren des einen und die Kolonnenvektoren des anderen Tensors reziproke Vektorsysteme bilden.

Analog der Auflösung von gewöhnlichen Skalargleichungen durch die Multiplikation mit dem reziproken skalaren Koeffizienten geschieht somit die Auflösung der dreigliedrigen Gleichungssysteme (1) durch die skalare Multiplikation mit dem reziproken Tensor. Dabei ist das skalare Produkt zweier zueinander reziproker Tensoren gleich dem *Einheitstensor* $\mathfrak{E}$:

(8) $$\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E}.$$

Dieser Einheitstensor hat die Fundamentaleigenschaft, mit einem Vektor skalar multipliziert, diesen Vektor selbst zu ergeben:

(9) $$\mathfrak{E} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \mathfrak{E} = \mathbf{r}.$$

Es seien nun zwei Gleichungssysteme gegeben, die man nach dem Vorhergehenden durch

$$(10) \qquad \varrho = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{r}, \qquad \bar{\varrho} = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{r}$$

darstellen kann. Addiert man die korrespondierenden Gleichungen beider Systeme, so entsteht ein Gleichungssystem, deren Koeffizienten die Summen der Koeffizienten der ursprünglichen Systeme sind. Dadurch ergibt sich unmittelbar das Additionsgesetz für Tensoren:

$$(11) \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \equiv \begin{cases} A_x^x + B_x^x & A_x^y + B_x^y & A_x^z + B_x^z \\ A_y^x + B_y^x & A_y^y + B_y^y & A_y^z + B_y^z, \\ A_z^x + B_z^x & A_z^y + B_z^y & A_z^z + B_z^z \end{cases}$$

d. h. *die Summe zweier Tensoren ist der Tensor der Komponentensummen*, also dasselbe Additionsgesetz wie für Vektoren. Das durch die Addition entstandene Gleichungssystem wird symbolisch:

$$(12) \qquad \varrho + \bar{\varrho} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\cdot\mathfrak{r}.$$

Addiert man nun zwei zueinander konjugierte Tensoren, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, so entsteht ein *selbstkonjugierter* oder *symmetrischer* Tensor. Die halbe Summe der beiden konjugierten Tensoren ergibt ebenfalls einen symmetrischen Tensor:

$$(13) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}') \equiv \begin{vmatrix} A_x^x & \tfrac{1}{2}(A_x^y + A_y^x) & \tfrac{1}{2}(A_x^z + A_z^x) \\ \tfrac{1}{2}(A_y^x + A_x^y) & A_y^y & \tfrac{1}{2}(A_y^z + A_z^y), \\ \tfrac{1}{2}(A_z^x + A_x^z) & \tfrac{1}{2}(A_z^y + A_y^z) & A_z^z \end{vmatrix}$$

während die halbe Differenz der beiden konjugierten Tensoren den sogenannten *antisymmetrischen* oder *schiefsymmetrischen* Tensor ergibt:

$$(14) \qquad \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}') \equiv \begin{matrix} 0 & \tfrac{1}{2}(A_x^y - A_y^x) & \tfrac{1}{2}(A_x^z - A_z^x) \\ \tfrac{1}{2}(A_y^x - A_x^y) & 0 & \tfrac{1}{2}(A_y^z - A_z^y). \\ \tfrac{1}{2}(A_z^x - A_x^z) & \tfrac{1}{2}(A_z^y - A_y^z) & \end{matrix}$$

Der Zerlegung der Tensoren entsprechend läßt sich jede lineare Vektorfunktion in die Summe eines symmetrischen und eines antisymmetrischen Teiles zerspalten:

$$(15) \qquad \varrho = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}')\cdot\mathfrak{r} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}')\cdot\mathfrak{r}.$$

Oder explizite ausgeschrieben:

$$\xi = A_x^x x + \tfrac{1}{2}(A_y^x + A_x^y)y + \tfrac{1}{2}(A_x^z + A_z^x)z + \tfrac{1}{2}(A_x^z - A_z^x)z - \tfrac{1}{2}(A_y^x - A_x^y)y,$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}(A_y^x + A_x^y)x + A_y^y y + \tfrac{1}{2}(A_z^y + A_y^z)z + \tfrac{1}{2}(A_y^x - A_x^y)x - \tfrac{1}{2}(A_z^y - A_y^z)z,$$
$$\zeta = \tfrac{1}{2}(A_x^z + A_z^x)x + \tfrac{1}{2}(A_z^y + A_y^z)y + A_z^z z + \tfrac{1}{2}(A_z^y - A_y^z)y - \tfrac{1}{2}(A_x^z - A_z^x)x.$$

Führt man hier zwei Hilfsgrößen ein, den Skalar

$$(17) \qquad \begin{cases} \varphi = \tfrac{1}{2}A_x^x x^2 + \tfrac{1}{2}A_y^y y^2 + \tfrac{1}{2}A_z^z z^2 + \tfrac{1}{2}(A_z^y + A_y^z)yz + \tfrac{1}{2}(A_x^z + A_z^x)zx \\ \qquad + \tfrac{1}{2}(A_y^x + A_x^y)xy \end{cases}$$

und den Vektor

(18)
$$\Omega \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}(A_z^y - A_y^z) \\ \frac{1}{2}(A_x^z - A_z^x), \\ \frac{1}{2}(A_y^x - A_x^y) \end{cases}$$

so lassen sich die Gleichungen (16) durch die eine Vektorgleichung

(19)
$$\varrho = \nabla\varphi + \Omega \times \boldsymbol{r}$$

ersetzen. Die konjugierte lineare Funktion wäre:

(20)
$$\varrho' = \nabla\varphi + \boldsymbol{r} \times \Omega,$$

wo der symmetrische Teil derselbe wie in (19) ist, der antisymmetrische dagegen das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

9. Das lineare Vektorfeld. Wenn x, y, z Koordinaten von Raumpunkten sind, und der Vektor $\boldsymbol{r}$ somit ein Ortsvektor, so stellt jedes Gleichungssystem **8** (1) ein *lineares Vektorfeld* dar. Auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung, oder das *Feldzentrum*, wo der Vektor $\boldsymbol{r}$ Null ist, haben die Vektoren ϱ gleiche Richtung und proportional dem Abstande vom Feldzentrum zunehmende Zahlenwerte. Eine solche Linie ist eine Vektorlinie, wenn der Vektor ϱ in diese Linie fällt. Dies findet für diejenigen Werte von x, y, z statt, die durch

(1)
$$\varrho = \lambda \boldsymbol{r} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} \xi = \lambda x, \\ \eta = \lambda y, \\ \zeta = \lambda z \end{cases}$$

gegeben sind. Setzt man dies in **8** (1) ein, so wird das Gleichungssystem in x, y, z homogen, und erlaubt von Null verschiedene Werte dieser Variablen nur dann, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet:

(2)
$$\begin{vmatrix} A_x^x - \lambda & A_x^y & A_x^z \\ A_y^x & A_y^y - \lambda & A_y^z \\ A_z^x & A_z^y & A_z^z - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung dritten Grades in λ hat drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, deren jede eine Gerade der verlangten Eigenschaften ergibt. D. h. *im linearen Vektorfelde existieren drei durch das Feldzentrum gehende gerade Vektorlinien.* Mit diesen gewöhnlich zueinander schiefwinkligen Geraden als Koordinatenachsen x, y, z reduziert sich jedes Gleichungssystem **8** (1) und das entsprechende aufgelöste **8** (2) auf die folgende monomische Form, deren Ähnlichkeit mit den symbolischen Gleichungsformen **8** (4) und **8** (7) sofort auffällt:

(3)
$$\begin{cases} \xi = \lambda_1 x, \\ \eta = \lambda_2 y, \\ \zeta = \lambda_3 z, \end{cases} \quad \text{oder aufgelöst:} \quad \begin{aligned} x &= \lambda_1^{-1}\xi, \\ y &= \lambda_2^{-1}\eta, \\ z &= \lambda_3^{-1}\zeta. \end{aligned}$$

Auf diese schiefwinkligen Achsen bezogen, haben die Vektorlinien die Gleichungen:

$$(4) \qquad \left(\frac{x}{x_0}\right)^{1/\lambda_1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1/\lambda_2} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{1/\lambda_3}.$$

Bei der kinematischen Deutung des Vektors $\mathfrak{\varrho}$ als Verschiebung oder Geschwindigkeit der Teilchen eines materiellen Kontinuums erscheint somit das lineare Bewegungsfeld als das Superpositionsresultat von drei Partialbewegungen, deren jede den Charakter einer *Dehnung* (positives λ) oder einer *Schrumpfung* (negatives λ) parallel zu einer der drei im allgemeinen zueinander schiefwinkligen geraden Stromlinien hat.

Zur weiteren Diskussion des linearen Feldes können wir seine Zerlegung nach **8** (19) in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil verwerten:

$$(5) \qquad \varrho = \varrho_1 + \varrho_2$$

wo

$$(6) \qquad \varrho_1 = \nabla\varphi,$$

$$(7) \qquad \varrho_2 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Im antisymmetrischen Felde (7) ist der Vektor ϱ_2 senkrecht zu den Meridianebenen durch die Achse des konstanten Vektors $\boldsymbol{\Omega}$, und die Vektorlinien sind also koaxiale Kreise um diese Achse. Deutet man $\boldsymbol{\Omega}$ als Winkelgeschwindigkeit, so stellt (7) das Geschwindigkeitsfeld in einem rotierenden starren Körper dar, und man kann allgemein das antisymmetrische lineare Vektorfeld als ein *Drehfeld* bezeichnen. In diesem Drehfelde kann, wie man unmittelbar sieht, nur noch eine Gerade durch das Feldzentrum als Vektorlinie gedeutet werden, nämlich die Rotationsachse, in deren Punkten der Vektor den Zahlenwert Null hat und ihm jede beliebige Richtung zugeschrieben werden kann. Die beiden anderen geraden Vektorlinien sind konjugiert imaginär geworden, mit zwei konjugiert imaginären Größen λ in der Felddarstellung (3).

Das symmetrische oder potentielle Partialfeld (6) hat als Äquipotentialflächen die Flächen zweiten Grades **8** (17) $\varphi = 0, 1, 2, \ldots,$ und als Vektorlinien die Normalkurven zu diesen Flächen. Die drei Hauptachsen geben drei zueinander senkrechte *Hauptdehnungs-* oder *Hauptdeformationsachsen* des Feldes, die gleichzeitig die geraden Stromlinien dieses Partialfeldes sind. Relativ zu diesen Achsen läßt sich das Feld durch Gleichungen der Form (3) darstellen, die jedoch jetzt auf rechtwinklige Achsen bezogen sind; die entsprechenden Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ heißen die *Hauptdehnungskoeffizienten.* Hat einer von diesen ein anderes Vorzeichen als die beiden anderen, kommt also sowohl Dehnung wie Schrumpfung vor, so sind die Flächen zweiten Grades Hyperboloide. Ist dabei die Summe der drei Größen λ gleich Null, so geht die Bewegung ohne Volumenänderung vor sich. Wenn

aber alle Dehnungskoeffizienten das gleiche Vorzeichen haben, sind die Flächen zweiten Grades Ellipsoide, und die Bewegung ist notwendig mit Volumenänderung verbunden.

Ein wichtiger Spezialfall tritt ein, wenn die Dehnungskoeffizienten einander gleich sind: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$. Das Ellipsoid wird dann eine Kugel, und alle Stromlinien sind Geraden, die durch das Feldzentrum hindurchgehen. Das Feld läßt sich dann durch die Gleichungen (1) darstellen, die dann identisch dieselbe Dehnungsbewegung längs aller Linien durch das Feldzentrum geben. In diesem Falle ist der Tensor $\mathfrak{A}$ des linearen Feldes in den Einheitstensor, multipliziert mit der Skalargröße λ, ausgeartet. Dies ist der Fall der homogenen, isotropen Expansion.

Dieser Spezialfall tritt in dem allgemeinen Felde **8** (1) ein, wenn die Koeffizienten außerhalb der Hauptdiagonale identisch Null sind, wie auch das Achsensystem gewählt wird. Denn das Drehfeld ist dann identisch gleich Null, und in dem Ausdruck für die Fläche zweiten Grades bleiben bei allen Achsenrichtungen nur die quadratischen Glieder übrig und sind einander immer gleich.

Das allgemeine Feld entsteht, wenn man dem potentiellen Deformationsfelde das Drehfeld überlagert. In diesem Felde hat man dann mit zwei Achsensystemen zu rechnen: den zueinander rechtwinkligen Hauptdeformationsachsen, längs deren die Dehnungen ihre Extremwerte haben, und den jetzt von diesen verschiedenen, unter sich schiefwinkligen geraden Stromlinien. Bei zunehmender Stärke des Drehfeldes nähern sich zwei der geraden Stromlinien einander, fallen zusammen, und werden konjugiert imaginär, wenn das Drehfeld eine gewisse Stärke überschritten hat.

Wenn auf einer Wetterkarte eine singulare Stromlinie sich selbst schiefwinklig schneidet, so enthält das lineare Feld in der Umgebung des Schnittpunktes sowohl ein Deformationsfeld wie auch ein Drehfeld, und die Bewegungsrichtung in den stumpfwinkligen Sektoren gibt die Richtung der Drehbewegung an.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit sogleich an eine bekannte Eigenschaft des linearen Geschwindigkeitsfeldes erinnern, daß nämlich diejenigen Punkte, die einmal eine algebraische Fläche oder Kurve bilden, immer eine solche von derselben Ordnung bilden werden, wieweit diese sich infolge der fortgesetzten Bewegung auch deformieren möge. Geschlossene Gebilde bleiben dabei immer geschlossen, und offene Gebilde, die ins Unendliche reichen, bleiben immer ins Unendliche reichende Gebilde. Speziell bleiben deshalb parallele äquidistante Ebenen immer parallele äquidistante Ebenen, wobei sich allerdings ihre Orientierung und ihre Äquidistanz verändern kann. Genau dasselbe gilt für parallele äquidistante Geraden.

Wir werden speziell die Bewegung solcher parallelen äquidistanten Geraden $\alpha = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ in einem reinen Deformationsfelde betrachten, das zweidimensional und horizontal sein soll, und folglich hyperbolische Stromlinien hat, welche die Achse der Dehnung und die Achse der Schrumpfung als Asymptoten haben. Man findet die Bewegung der Geraden, indem man die Verschiebung ihrer Schnittpunkte mit den Achsen der Dehnung und der Schrumpfung verfolgt. Man kann dann ihre Bewegung als das Superpositionsresultat von zwei Partialbewegungen auffassen, eine Drehung, die immer den Winkel der Geraden mit der Schrumpfungsachse vergrößert und den Winkel mit der Dehnungsachse verkleinert; eine Ausnahme machen nur die Geraden, die vom Anfang an zu einer dieser Achsen parallel sind; sie behalten diese Parallelität bei. Dazu kommt noch eine Dehnungs- oder

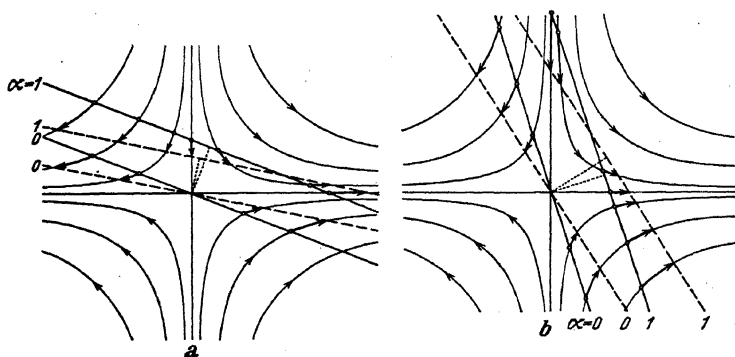



Abb. 1. a) Frontogenese, b) Frontolyse.

Schrumpfungsbewegung senkrecht zu den Geraden, die ihren gegenseitigen Abstand verändert. Dieser Abstand nimmt zu, solange der Winkel (wir rechnen immer mit positiven Winkeln kleiner als $\pi/2$) der Geraden mit der Dehnungsachse noch größer als ein gewisser kritischer Winkel ist, und nimmt nachher ab. Ihre maximalen gegenseitigen Abstände voneinander und von dem Feldzentrum erreichen somit die Geraden, wenn sie die Dehnungsachsen unter diesem kritischen Winkel schneiden, der im einfachen Falle der Abb. 1 45° ist.

Die allgemeine Bewegung der Geraden ist somit klar. Geraden, die von Anfang an zur Schrumpfungsachse parallel sind, entfernen sich unendlich weit von dieser Achse und Geraden, die von Anfang an zur Dehnungsachse parallel sind, nähern sich dieser Achse unbegrenzt. Alle andere Geraden nähern sich immer mehr der zur Dehnungsachse parallelen Richtung. Dabei entfernen sie sich voneinander bis zu dem maximalen Abstand, den sie erreichen, wenn der Winkel mit der

Dehnungsachse seinen kritischen Wert hat, von da an nähern sie sich unbegrenzt gegeneinander.

Bezeichnen nun die Geraden eine Eigenschaft, die mehr oder weniger dauernd den bewegten Teilchen zukommt — eine solche mit einer gewissen Annäherung konservative Eigenschaft ist z. B. die Temperatur der Teilchen —, so wird die Deformationsbewegung in auffälliger Weise das Feld dieser Skalargröße beeinflussen. Sind die Isothermen anfänglich mit der Schrumpfungsachse parallel, so werden sie sich unbegrenzt voneinander entfernen, der Temperaturgradient konvergiert gegen Null: das Deformationsfeld wirkt auflösend auf ein Temperaturfeld mit Isothermen parallel zur Schrumpfungsachse. In ganz ähnlicher Weise wirkt das Deformationsfeld konzentrierend auf ein Temperaturfeld mit Isothermen parallel der Dehnungsachse, der Temperaturgradient steigt unbegrenzt an. Bei schiefer Lage der Isothermen relativ zu den Achsen des Deformationsfeldes wird das Endresultat immer dasselbe werden: Isothermen parallel der Dehnungsachse und immer zunehmender Temperaturgradient senkrecht zu dieser Achse. Dies setzt unvermittelt ein, wenn die Isothermen von Anfang an nur kleine Winkel mit der Dehnungsachse bildeten; dagegen geht eine einleitende Feldauflösung voraus, wenn dieser Winkel anfänglich größer als der kritische Winkel war. Im letzteren Falle kann die Konzentration der Isothermen auf der Dehnungsachse so lange Zeit in Anspruch nehmen, daß sie bei dem nur relativen Konservatismus der Temperatur bedeutungslos bleibt.

Diese Eigenschaften des Deformationsfeldes liegen BERGERONS Theorie der Bildung und der Auflösung der atmosphärischen Fronten zugrunde (Abb. 1a Frontogenese, Abb. 1b Frontolyse).

10. Dyade. Das skalare Produkt $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{D}$ stellt eine Skalargröße, das Vektorprodukt $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{D}$ oder $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$ einen Vektor dar, und das GIBBSsche *„unbestimmte Produkt“* $\boldsymbol{BD}$ oder $\boldsymbol{DB}$

$$(1)\qquad \boldsymbol{BD} \equiv \begin{matrix} B_x D_x & B_x D_y & B_x D_z \\ B_y D_x & B_y D_y & B_y D_z \\ B_z D_x & B_z D_y & B_z D_z \end{matrix}, \qquad \boldsymbol{DB} \equiv \begin{matrix} D_x B_x & D_x B_y & D_x B_z \\ D_y B_x & D_y B_y & D_y B_z \\ D_z B_x & D_z B_y & D_z B_z \end{matrix}$$

kann zur Darstellung von Tensoren verwertet werden. Diese speziellen Tensoren, die *Dyaden*, die nur durch zwei anstatt durch drei unabhängige Vektoren definiert sind, liegen der Tensorrechnung zugrunde, von der in den beiden letzten Abschnitten dieses Kapitels ein kurzer Abriß gegeben werden soll. Die beiden Dyaden $\boldsymbol{BD}$ und $\boldsymbol{DB}$ sind nach (1) zueinander konjugiert. Das skalare Produkt jeder derselben mit einem Vektor $\boldsymbol{A}$ stellt nach dem Vorhergehenden einen Vektor dar, und für diese Vektoren haben wir:

$$(2)\qquad (\boldsymbol{BD})\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{DB}), \qquad \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{BD}) = (\boldsymbol{DB})\cdot\boldsymbol{A}.$$

In den Formeln (3) und (4) unten sind jetzt die Komponenten der beiden Vektoren $(\boldsymbol{BD})\cdot\boldsymbol{A}$ und $(\boldsymbol{DB})\cdot\boldsymbol{A}$ aufgeschrieben, dann aus jedem Komponentenausdruck ein skalares Produkt als Faktor ausgeschieden, und schließlich die Komponenten wieder durch Vektorbezeichnungen zusammengefaßt:

$$(3)\quad (\boldsymbol{BD})\cdot\boldsymbol{A} \equiv \begin{array}{l} A_x D_x B_x + A_y D_y B_x + A_z D_z B_x \\ A_x D_x B_y + A_y D_y B_y + A_z D_z B_y \\ A_x D_x B_z + A_y D_y B_z + A_z D_z B_z \end{array} \equiv \begin{array}{l} (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})\, B_x \\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})\, B_y \\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})\, B_z \end{array} \equiv (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})\,\boldsymbol{B},$$

$$(4)\quad (\boldsymbol{DB})\cdot\boldsymbol{A} \equiv \begin{array}{l} A_x D_x B_x + A_y D_x B_y + A_z D_x B_z \\ A_x D_y B_x + A_y D_y B_y + A_z D_y B_z \\ A_x D_z B_x + A_y D_z B_y + A_z D_z B_z \end{array} \equiv \begin{array}{l} (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\, D_x \\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\, D_y \\ (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\, D_z \end{array} \equiv (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{D}.$$

Diese Identitäten enthalten die folgende Rechenregel:

Das skalare Produkt einer Dyade und eines Vektors ist gleich dem Vektor, der am weitesten von dem Multiplikationszeichen · steht, multipliziert mit dem skalaren Produkte der beiden anderen Vektoren.

Gleichzeitig sieht man, daß man die in den Formeln (2), (3) und (4) benutzten Klammern weglassen kann, ohne daß dadurch Mehrdeutigkeiten auftreten, wenn man nur an der in Verbindung mit den Formeln **7** (5), (6), (5′), (6′) gemachten Vereinbarung festhält: ein zwischen zwei Vektorzeichen angebrachter Punkt verbindet diese beiden Vektoren zu einem skalaren Produkt, und hat mit den weiter als Faktoren auftretenden Vektorzeichen nichts zu tun. Wenn man nach dieser Vereinbarung die Formeln (2) unter Fortlassung der Klammern neu aufschreibt:

$$(5)\qquad \boldsymbol{BD}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{DB}, \qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{BD} = \boldsymbol{DB}\cdot\boldsymbol{A},$$

so drücken sie die in den Identitäten (3) und (4) enthaltenen Rechenregeln aus.

11. Zusammengesetzte Differential- und Integraloperationen. Zu bequemen abgekürzten Bezeichnungen für bekannte zusammengesetzte Differentialformeln gelangt man, wie früher in einfacheren Fällen, wenn man in den algebraischen Formeln einen Vektor durch das Operationszeichen ∇ und in den entwickelten Formen die Komponenten dieses Vektors durch $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ ersetzt.

Wenn man in dieser Weise in den Formeln **10** (3) und (4) $\boldsymbol{D}$ durch ∇ und die Komponenten von $\boldsymbol{D}$ durch die partiellen Ableitungen nach x, y, z ersetzt, so ergeben sich die beiden wichtigen, zueinander konjugierten linearen Differentialoperationen:

$$(1)\qquad \boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B} \equiv \begin{matrix} A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z} \\ A_x\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ A_x\frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z} \end{matrix} \equiv A_x\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x} + A_y\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y} + A_z\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}$$

und

$$(2)\qquad \nabla\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \equiv \begin{matrix} A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial x} \\ A_x\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial y} \\ A_x\frac{\partial B_x}{\partial z} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial z} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z} \end{matrix} \equiv A_x\nabla B_x + A_y\nabla B_y + A_z\nabla B_z .$$

Anschauliche Bilder dieser Differentialoperationen erhält man bei spezieller Wahl des Koordinatensystems, wenn z. B. die x-Achse in die Richtung des Vektors $\boldsymbol{A}$ fällt. Es werden dann $A_y = A_z = 0$, $A_x = A$ und die Gleichungssysteme (1) und (2) reduzieren sich auf:

$$(1')\qquad \boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B} = A\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x},$$

$$(2')\qquad \nabla\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = A\nabla B_x,$$

die sich folgendermaßen interpretieren lassen:

(I) *Direkte Vektorliniendifferentiation* $\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}$:

Man differentiiert den Vektor $\boldsymbol{B}$ längs der Vektorlinien des Vektors $\boldsymbol{A}$ und multipliziert mit dem Skalarwert A. Die Wichtigkeit dieser Differentialoperation geht z. B. daraus hervor, daß sie in dem linearen Gliede der Entwicklung eines Vektors nach TAYLORS Theorem vorkommt:

$$(3)\qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\cdot\nabla\boldsymbol{B} + \cdots,$$

wobei $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ ein Vektor mit den Komponenten $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ ist. Diese direkte Vektorliniendifferentiation kommt in den EULERschen hydrodynamischen Gleichungen vor.

(II) *Konjugierte Vektorliniendifferentiation* $\nabla\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$:

Man projiziert den Vektor $\boldsymbol{B}$ auf die Vektorlinien von $\boldsymbol{A}$, wodurch sich die Komponente B_x ergibt, bildet den Aszendenten ∇B_x und multipliziert schließlich mit dem Skalarwert A. Diese konjugierte Vektorliniendifferentiation kommt in den LAGRANGEschen hydrodynamischen Gleichungen vor.

Eine wichtige Beziehung zwischen diesen beiden Differentialoperationen erhalten wir aus der algebraischen Formel 7 (5′). Schreiben wir diese in der Form $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})$ und ersetzen wir $\boldsymbol{C}$ durch das Operationssymbol ∇, so ergibt sich:

$$(4)\qquad \boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B} = \nabla\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{B},$$

eine Formel, die man leicht direkt mit Hilfe der expliziten Ausdrücke (1) und (2) verifiziert. Wenn der Vektor $\boldsymbol{B}$, der bei den linearen Operationen differentiiert wird, ein wirbelfreier Vektor ist, so werden die beiden linearen Differentialoperationen miteinander identisch, also:

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B} = \nabla\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}, \quad \text{wenn} \quad \operatorname{curl}\boldsymbol{B} = 0. \tag{5}$$

Die lineare Operation wird dann selbstkonjugiert. Sind die beiden Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ identisch miteinander, so ändert sich dadurch die erste Operation nicht, die zweite gibt aber:

$$\nabla\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right). \tag{6}$$

Wenn $\boldsymbol{A}$ außerdem wirbelfrei ist, reduzieren sich beide Operationen auf den Aszendenten des halben Quadrates von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{A} = \nabla\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right), \quad \text{wenn} \quad \operatorname{curl}\boldsymbol{A} = 0. \tag{7}$$

In dem speziellen Fall, wo der differentiierte Vektor $\boldsymbol{B}$ der Radiusvektor ist, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{r}$, mit den Komponenten x, y, z, führen beide Operationen, wie die Entwicklungen (1) und (2) unmittelbar zeigen, auf den nichtdifferentiierten Vektor $\boldsymbol{A}$ zurück:

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}, \quad \nabla\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}. \tag{8}$$

$\nabla\boldsymbol{r}$ ist also gleich dem Einheitstensor $\mathfrak{E}$.

Betrachten wir die symbolischen Produkte $\nabla\cdot\mathfrak{A}$, $\nabla\cdot\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}\cdot\nabla$, $\mathfrak{A}'\cdot\nabla$, wo wir beim Aufschreiben der Komponenten immer die Reihenfolge der Faktoren beachten müssen, so sehen wir, daß die beiden ersten Produkte wirkliche Vektoren sind, die aus dem Tensor durch Differentiation hervorgehen, während die beiden letzteren Produkte Operationen mit vektoriellem Charakter sind. Explizite ergibt sich:

$$\nabla\cdot\mathfrak{A} \equiv \begin{array}{l} \frac{\partial A_x^x}{\partial x} + \frac{\partial A_y^x}{\partial y} + \frac{\partial A_z^x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x^y}{\partial x} + \frac{\partial A_y^y}{\partial y} + \partial A_z^y \\ \frac{\partial A_x^z}{\partial x} + \frac{\partial A_y^z}{\partial y} + \frac{\partial A_z^z}{\partial z} \end{array} \qquad \nabla\cdot\mathfrak{A}' \equiv \begin{array}{l} \frac{\partial A_x^x}{\partial x} + \frac{\partial A_x^y}{\partial y} + \frac{\partial A_x^z}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y^x}{\partial x} + \frac{\partial A_y^y}{\partial y} + \frac{\partial A_y^z}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z^x}{\partial x} + \frac{\partial A_z^y}{\partial y} + \frac{\partial A_z^z}{\partial z} \end{array}$$

$$(9) \qquad \mathfrak{A}\cdot\nabla \equiv \begin{array}{l} A_x^x\frac{\partial}{\partial x} + A_x^y\frac{\partial}{\partial y} + A_x^z\frac{\partial}{\partial z} \\ A_y^x\frac{\partial}{\partial x} + A_y^y\frac{\partial}{\partial y} + A_y^z\frac{\partial}{\partial z}, \\ A_z^x\frac{\partial}{\partial x} + A_z^y\frac{\partial}{\partial y} + A_z^z\frac{\partial}{\partial z} \end{array} \quad \mathfrak{A}'\cdot\nabla \equiv \begin{array}{l} A_x^x\frac{\partial}{\partial x} + A_y^x\frac{\partial}{\partial y} + A_z^x\frac{\partial}{\partial z} \\ A_x^y\frac{\partial}{\partial x} + A_y^y\frac{\partial}{\partial y} + A_z^y\frac{\partial}{\partial z}. \\ A_x^z\frac{\partial}{\partial x} + A_y^z\frac{\partial}{\partial y} + A_z^z\frac{\partial}{\partial z} \end{array}$$

Folglich hat man immer:

$$\nabla\cdot\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'\cdot\nabla, \quad \nabla\cdot\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}\cdot\nabla.$$

Von besonderer Wichtigkeit in physikalischer Hinsicht ist der Vektor $\nabla \cdot \mathfrak{A}'$, welchen wir, aus Gründen, die später ersichtlich werden, mit $\operatorname{div}\mathfrak{A}$ (nicht $\operatorname{div}\mathfrak{A}'$) bezeichnen und die Divergenz des Tensors $\mathfrak{A}$ nennen. Explizite ergibt sich also:

$$(10) \qquad \operatorname{div}\mathfrak{A} = \nabla \cdot \mathfrak{A}' \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial A_x^x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_x^y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_x^z}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial A_y^x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y^y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_y^z}{\partial z} = \dfrac{\partial \boldsymbol{A}^x}{\partial x} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}^y}{\partial y} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}^z}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial A_z^x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_z^y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z^z}{\partial z} \end{cases}$$

Ist der Tensor $\mathfrak{A}$ symmetrisch, wird $\operatorname{div}\mathfrak{A}$ mit $\nabla \cdot \mathfrak{A}$ identisch.

Wenn der Tensor, dessen Divergenz man bildet, Dyadenform hat, $\mathfrak{A} = \boldsymbol{AB}$, so erhält man:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{AB}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B},$$

oder mit Divergenzbezeichnung und nach Umstellung der Glieder:

$$(11) \qquad \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \operatorname{div}(\boldsymbol{BA}).$$

Dies gibt eine nützliche Umformung der eben betrachteten direkten Vektorliniendifferentiation. Verbindet man diese Formel mit (4), so ergibt sich die Formel:

$$(12) \qquad \nabla \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times \operatorname{curl} \boldsymbol{B} + \operatorname{div}(\boldsymbol{BA}),$$

wodurch man die konjugierte Vektorliniendifferentiation umformen kann.

Schließlich bilden wir das formelle skalare Produkt des Operationszeichens ∇ mit dem Vektor, der das skalare Produkt des Tensors $\mathfrak{A}$ und des Vektors $\boldsymbol{B}$ ist. Da $\mathfrak{A}'$ der zu $\mathfrak{A}$ konjugierte Tensor ist, so daß $\mathfrak{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \mathfrak{A}'$, finden wir, indem wir die Divergenzbezeichnung benutzen:

$$(13) \qquad \operatorname{div}(\mathfrak{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (\nabla \cdot \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{B},$$

$$(14) \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{B} \cdot \mathfrak{A}) = (\nabla \cdot \mathfrak{A}' + \mathfrak{A} \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{B}.$$

Wenn wir rechts Divergenzbezeichnung einführen und die Glieder umstellen, läßt sich die letzte Formel auch

$$(14') \qquad \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{div}\mathfrak{A} = -\mathfrak{A} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{B} + \operatorname{div}(\boldsymbol{B} \cdot \mathfrak{A})$$

schreiben.

Diesen Differentialformeln entsprechen Transformationsformeln für Volumenintegralen, die wir gleich aufschreiben, weil sie alle in Anwendung kommen werden. Wenn man die Formel (14') über das Volumen innerhalb einer geschlossenen Fläche integriert, so geht das letzte Volumenintegral rechts nach der Gaussschen Identität unmittelbar in das Flächenintegral des Vektors $\boldsymbol{B} \cdot \mathfrak{A}$ über die Grenzfläche über, so daß sich

$$(15) \qquad \int \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{div}\mathfrak{A}\, d\tau = -\int \mathfrak{A} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{B}\, d\tau + \int \boldsymbol{B} \cdot \mathfrak{A} \cdot d\sigma$$

ergibt. Wir können jetzt voraussetzen, daß in dieser Skalargleichung der Vektor $\boldsymbol{B}$ an Richtung und Größe konstant, aber sonst ganz willkürlich ist. Das erste Integral rechts verschwindet dann identisch und die beiden anderen scheiden den konstanten Vektorfaktor $\boldsymbol{B}$ aus, der wegdividiert werden kann. Man erhält dann die Vektorgleichung:

$$(16) \qquad \int \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d\tau = \int \mathfrak{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

die man als unmittelbare Verallgemeinerung der GAUSSschen Identität betrachten kann.

Aus den Gleichungen (11) und (12) erhält man, unter Berücksichtigung von (16):

$$(17) \qquad \int \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B}\, d\tau = - \int \boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau + \int \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

$$(18) \qquad \int \nabla \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}\, d\tau = - \int \boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau + \int \boldsymbol{A} \times \operatorname{curl} \boldsymbol{B}\, d\tau + \int \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Wenn speziell an der Grenzfläche einer der Vektoren $\boldsymbol{A}$ oder $\boldsymbol{B}$ Null ist, ergeben sich die einfacheren Formeln:

$$(19) \qquad \int \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{B}\, d\tau = - \int \boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau,$$

$$(20) \qquad \int \nabla \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}\, d\tau = - \int \boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, d\tau + \int \boldsymbol{A} \times \operatorname{curl} \boldsymbol{B}\, d\tau,$$

die wir des öfteren verwenden werden.

12. Der Spannungstensor. Das bekannteste konkrete physikalische Beispiel eines Tensors ist der Spannungstensor, aus dem sich sowohl Name wie Begriff des Tensors ergeben haben. Die Spannung $\boldsymbol{P}^n$ in einem willkürlichen Flächenelement $d\sigma$ mit der Normale $\boldsymbol{n}$ im Inneren eines elastischen oder reibenden Mediums ist die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft, die das Medium auf der einen Seite der Fläche auf das Medium auf der anderen Seite ausübt, positiv gerechnet als ziehende Kraft in der Richtung der positiven Normale $\boldsymbol{n}$. Ändert das Element seine Orientierung im Raume, so ändert diese Kraft pro Flächeneinheit oder dieser *Spannungsvektor* $\boldsymbol{P}^n$ sowohl seinen Zahlenwert wie seinen Winkel mit der Normale $\boldsymbol{n}$. Die unendlich vielen Spannungsvektoren, die somit einem und demselben Punkte des Mediums angehören, lassen sich durch drei derselben ausdrücken, beispielsweise durch die drei Spannungsvektoren $\boldsymbol{P}^x, \boldsymbol{P}^y, \boldsymbol{P}^z$, die auf die drei Flächenelemente wirken, deren Normalen zu den Achsen x, y, z parallel sind. Man findet diese Beziehung in bekannter Weise durch die Betrachtung der Kräfte, die durch diese Spannungen auf die vier Flächen eines elementaren Tetraeders ausgeübt werden, deren eine die schief zu den Achsen liegende Fläche $d\sigma$ ist und deren drei anderen Flächen die Projektionen $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ dieses Elementes auf die Koordinatenebenen sind. Wirken jetzt keine anderen Kräfte als die Spannungen, so lautet die Gleichgewichtsbedingung für die auf das Tetraeder wirkenden Spannungskräfte:

$$(1) \qquad \boldsymbol{P}^n d\sigma = \boldsymbol{P}^x d\sigma_x + \boldsymbol{P}^y d\sigma_y + \boldsymbol{P}^z d\sigma_z,$$

eine Gleichung, die bestehen bleibt, auch wenn das Element $d\sigma$ sich der gegenüberliegenden Tetraederecke unbegrenzt nähert und schließlich durch diesen Punkt geht. In diesem Grenzfall, wo das Volumen des Tetraeders als Größe dritter Ordnung, die Flächen dagegen als Größen zweiter Ordnung gegen Null konvergieren, greifen weder Massenkräfte, wenn solche vorkommen, noch Trägheitskräfte, wenn Bewegung vorliegt, in die Gleichgewichtsbedingung (1) ein. Die Spannungsgleichung (1) gilt also ganz allgemein im Inneren eines materiellen Mediums, gleichviel, ob Gleichgewicht oder Bewegung vorliegt und welches auch die eingreifenden äußeren Massenkräfte seien.

Division der Gleichung (1) mit $d\sigma$ gibt die Gleichung:

$$\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{P}^x \cos nx + \boldsymbol{P}^y \cos ny + \boldsymbol{P}^z \cos nz, \tag{2}$$

die direkt den Spannungsvektor gegen ein Element beliebiger Orientierung durch die Spannungsvektoren gegen Elemente parallel den Koordinatenebenen ausdrückt. Wenn man diese Vektorgleichung in Komponenten ausschreibt:

$$\begin{aligned} P_x^n &= P_x^x \cos nx + P_x^y \cos ny + P_x^z \cos nz, \\ P_y^n &= P_y^x \cos nx + P_y^y \cos ny + P_y^z \cos nz, \\ P_z^n &= P_z^x \cos nx + P_z^y \cos ny + P_z^z \cos nz, \end{aligned} \tag{3}$$

so hat man die erste Gruppe der CAUCHYschen Spannungsgleichungen. Von den neun Spannungskomponenten sind drei Normalspannungen und sechs Tangentialspannungen, die ihrerseits in zwei Untergruppen von je drei zerfallen, so daß sich die folgenden drei Gruppen ergeben:

P_x^x, P_y^y, P_z^z Normalspannungen,

P_z^y, P_x^z, P_y^x rechtsdrehende Tangentialspannungen,

P_y^z, P_z^x, P_x^y linksdrehende Tangentialspannungen.

Es sei nun $\boldsymbol{n}$ eine Normale der Länge Eins zu dem beliebig orientierten Flächenelemente. Die Kosinusse können wir dann als die Projektionen dieser Einheitsnormale auffassen und führen wir dann den Spannungstensor $\mathfrak{P}$ ein, so läßt sich das CAUCHYsche Gleichungssystem durch die Vektorgleichung

$$\boldsymbol{P}^n = \mathfrak{P} \cdot \boldsymbol{n} \tag{4}$$

symbolisieren, die der Gleichung $\boldsymbol{\varrho} = \mathfrak{A} \cdot \boldsymbol{r}$ des linearen Feldes entspricht, wenn man in ihr dem Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ die konstante Länge Eins gibt. Dies gestattet uns, durch eine anschauliche Figur den Zusammenhang zwischen der Orientierung $\boldsymbol{n}$ des Flächenelementes und der Vektorspannung darzustellen. Im linearen Felde betrachten wir sämtliche Vektoren in den Punkten einer Kugelfläche (Abb. 2). Denkt man sich sämtliche Flächenelemente der Kugelfläche mit den zugehörigen Vektoren in den Mittelpunkt der Kugel verschoben, so hat man ein Bild des Spannungstensors in diesem Punkte. Die für das lineare Feld ent-

wickelten Formeln gestatten uns, die folgenden Schlüsse zu ziehen. Den drei geradlinigen Stromlinien im linearen Felde entsprechend, gibt es drei Richtungen der Flächennormale $\boldsymbol{n}$, für die $\boldsymbol{P}^n$ die Richtung von $\boldsymbol{n}$ hat, d. h. drei Achsen der normalen Spannung, die im allgemeinen zueinander schiefwinklig sind und von denen zwei konjugiert imaginär sein können. Der Spannungstensor ist symmetrisch oder selbstkonjugiert wie in Abb. 2, wenn die rechtsdrehenden und die linksdrehenden Tangentialspannungen einander gleich sind:

$$(5) \qquad P_z^y = P_y^z, \qquad P_x^z = P_z^x, \qquad P_y^x = P_x^y.$$

In diesem Falle sind die Achsen der normalen Spannungen alle reell und zueinander senkrecht, und diese Normalspannungen sind zugleich die durch Extremwerte ausgezeichneten *Hauptspannungen*.

Abb. 2. Der Spannungstensor.

Wenn die Tangentialspannungen für alle Richtungen des Flächenelementes identisch verschwinden, d. h.:

$$(5\,\mathrm{a})_1 \qquad P_z^y = P_y^z = P_x^z = P_z^x = P_y^x = P_x^y = 0,$$

wie auch x, y, z gewählt seien, so werden die Hauptspannungen gleich. Man hat den Fall der Kugelsymmetrie und der Spannungstensor artet in das Produkt des Einheitstensor mit einem Skalar aus, den wir gewöhnlich nicht mehr als Zug, sondern als Druck positiv rechnen:

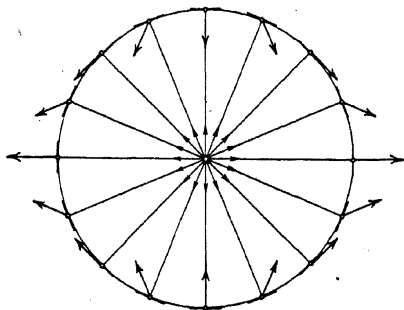
$$(6) \qquad \mathfrak{P} = -p\,\mathfrak{E}.$$

Der allgemeinste Spannungszustand, bei dem die Achsen der Normalspannung zueinander schiefwinklig sind, besteht aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Anteil. Der antisymmetrische Anteil ist eine drehende oder gyrostatische Spannung, die man gewöhnlich in elastischen oder in bewegten reibenden Medien gleich Null setzt. Ob man bei der Turbulenzreibung diese drehende Spannung vernachlässigen kann, dürfte aber fraglich sein.

Die Gleichung (1) lautet mit Tensorbezeichnungen, wie auch aus (4) hervorgeht,

$$(7) \qquad \boldsymbol{P}^n\, d\sigma = \mathfrak{P} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

und gibt die durch die Spannung hervorgerufene Kraft für ein beliebiges Flächenelement. Integration über eine geschlossene Fläche ergibt die resultierende Kraft der Spannungen, die das äußere Medium auf den Teil des Mediums innerhalb der Fläche ausübt. Da sich das Flächen-

integral nach **11** (16) in ein Volumenintegral überführen läßt, erhalten wir:

(8) $$\int \mathfrak{P}\cdot d\sigma = \int \operatorname{div} \mathfrak{P}\, d\tau .$$

Diese Relation besteht identisch für jede beliebige geschlossene Fläche, so daß man schließen kann, daß

(9) $$\boldsymbol{S} = \operatorname{div} \mathfrak{P} = \frac{\partial \boldsymbol{P}^x}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{P}^y}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{P}^z}{\partial z}$$

die auf die Volumeneinheit ausgeübte, von der Spannung herrührende Kraft darstellt. In Komponenten ausgeschrieben wird diese Kraft:

(10) $$\boldsymbol{S} \equiv \begin{cases} S_x = \dfrac{\partial P^x_x}{\partial x} + \dfrac{\partial P^y_x}{\partial y} + \dfrac{\partial P^z_x}{\partial z}, \\ S_y = \dfrac{\partial P^x_y}{\partial x} + \dfrac{\partial P^y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial P^z_y}{\partial z}, \\ S_z = \dfrac{\partial P^x_z}{\partial x} + \dfrac{\partial P^y_z}{\partial y} + \dfrac{\partial P^z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Dies ist die zweite Gruppe der CAUCHYschen Spannungsgleichungen. Im Spezialfall $\mathfrak{P} = -p\,\mathfrak{E}$ wird diese von der Spannung herrührende Kraft $\boldsymbol{S}$ das, was man den Druckgradienten $\boldsymbol{G}$ nennt:

(11) $$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{G} = -\nabla p .$$

Mit der Kenntnis dieser von den Spannungen herrührenden Kraft kann man die Bewegungsgleichungen für das Medium aufschreiben. Ist q die Dichte des Mediums, $\boldsymbol{j}$ die Beschleunigung und $\boldsymbol{f}$ die pro Masseneinheit wirkende äußere Kraft, so wird die Bewegungsgleichung in Vektorform:

(12) $$q\boldsymbol{j} = q\boldsymbol{f} + \operatorname{div} \mathfrak{P},$$

oder voll ausgeschrieben:

(13) $$\begin{cases} q j_x = q f_x + \dfrac{\partial P^x_x}{\partial x} + \dfrac{\partial P^y_x}{\partial y} + \dfrac{\partial P^z_x}{\partial z}, \\ q j_y = q f_y + \dfrac{\partial P^x_y}{\partial x} + \dfrac{\partial P^y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial P^z_y}{\partial z}, \\ q j_z = q f_z + \dfrac{\partial P^x_z}{\partial x} + \dfrac{\partial P^y_z}{\partial y} + \dfrac{\partial P^z_z}{\partial z}. \end{cases}$$

Dies sind die CAUCHYschen Bewegungsgleichungen für ein beliebiges Medium, in dem Spannungen auftreten.

Wenn alle Tangentialspannungen Null sind, so daß im Medium nur ein isotroper Druck p herrscht, vereinfacht sich (12) auf die Gleichung:

(14) $$q\boldsymbol{j} = q\boldsymbol{f} - \nabla p ,$$

die für ideale Flüssigkeiten gilt.

13. Die GIBBSsche Vektor- und Tensoralgebra. Ohne auf die explizite Vektor- und Tensorrechnung zurückzugreifen, haben wir in

diesem Kapitel den Zusammenhang der Vektor- und Tensorbezeichnungen mit denen der gewöhnlichen Analysis gegeben. Dies wird uns gestatten, sonst unübersichtliche Formelsysteme in einer knappen und übersichtlichen Form zu schreiben. Wir haben aber die gesamte Darstellung deswegen nicht durch die explizite Vektor- und Tensorrechnung begründet, weil diese noch zu wenig bekannt sein dürfte. In der Tat sind aber viele unserer Formeln durch diese Rechentechnik gefunden worden, deren Grundlagen hier kurz zusammengefaßt werden sollen.

Das GIBBSsche Rechenverfahren für räumlich gebundene Vektoren verwertet ausschließlich die Grundgesetze der gewöhnlichen Addition und Multiplikation unter Aufgabe der allgemeinen Gültigkeit des kommutativen Gesetzes bei der formellen Multiplikation.

Außer durch seinen Anfangspunkt ist ein Vektor definiert durch drei Komponenten längs dreier nichtkomplanarer von Punkt zu Punkt veränderlicher Richtungen. Längs jeder dieser Richtungen sei im gegebenen Raumpunkte ein *Grundvektor* gegeben, den wir mit $\boldsymbol{L}$ bzw. $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ bezeichnen wollen. Es kann dann jeder beliebige Vektor folgendermaßen linear dargestellt werden:

$$(1)\qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}A_L + \boldsymbol{M}A_M + \boldsymbol{N}A_N, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}B_L + \boldsymbol{M}B_M + \boldsymbol{N}B_N.$$

Die Skalargrößen A_L, A_M, A_N und B_L, B_M, B_N sind die Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ in Richtung der drei Grundvektoren $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$.

Wir bilden jetzt in einem bestimmten Raumpunkte das von GIBBS eingeführte *unbestimmte Produkt* der beiden Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$, wobei wir die gewöhnlichen Multiplikationsregeln verwenden, die Reihenfolge der Vektoren wegen des Nichtbestehens des kommutativen Gesetzes jedoch nicht vertauschen dürfen. Für dieses unbestimmte Produkt, das auch *Dyade* genannt wird, ergeben sich dann zwei im allgemeinen verschiedene Ausdrücke, die lediglich von der Reihenfolge der Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ abhängig sind:

$$(2a)\qquad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{LL}A_LB_L &+ \boldsymbol{LM}A_LB_M + \boldsymbol{LN}A_LB_N \\ &+ \boldsymbol{ML}A_MB_L + \boldsymbol{MM}A_MB_M + \boldsymbol{MN}A_MB_N \\ &+ \boldsymbol{NL}A_NB_L + \boldsymbol{NM}A_NB_M + \boldsymbol{NN}A_NB_N, \end{aligned}\right.$$

$$(2b)\qquad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{LL}A_LB_L &+ \boldsymbol{LM}A_MB_L + \boldsymbol{LN}A_NB_L \\ &+ \boldsymbol{ML}A_LB_M + \boldsymbol{MM}A_MB_M + \boldsymbol{MN}A_NB_M \\ &+ \boldsymbol{NL}A_LB_N + \boldsymbol{NM}A_MB_N + \boldsymbol{NN}A_NB_N. \end{aligned}\right.$$

Da die skalaren Koeffizienten auf der rechten Seite dieser Ausdrücke durch Transposition ineinander übergehen, so sind die zwei Dyaden $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{BA}$ zueinander konjugiert. Man gelangt auch von der einen Dyade zu der anderen durch Vertauschung der Reihenfolge der Vektorfaktoren in sämtlichen unbestimmten Produkten.

Eine Dyade setzt sich additiv zusammen aus neun Elementardyaden $\boldsymbol{LL}, \boldsymbol{LM}, \ldots$, von denen jede mit einem skalaren Koeffizienten multipli-

ziert ist. Diese neun Koeffizienten sind aber nicht sämtlich voneinander unabhängig, da sie durch die sechs Komponenten der beiden Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ dargestellt werden können.

Wir betrachten jetzt das skalare Produkt einer Dyade $\boldsymbol{AB}$ mit einem Vektor $\boldsymbol{C}$, wobei sich wieder zwei verschiedene Ausdrücke ergeben, je nachdem der Vektor $\boldsymbol{C}$ als Präfaktor oder als Postfaktor auftritt. Wie gewöhnlich, betrifft das Zeichen $\cdot$ nur die zwei nebenstehenden Vektoren, die zu einem Skalarprodukte vereinigt werden und in den folgenden Formeln durch sonst überflüssige Klammern hervorgehoben werden sollen. Man erhält dann:

$$\text{(3)} \qquad \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}), \qquad \boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}),$$

also in beiden Fällen einen Vektor, und zwar denjenigen, der am weitesten von dem Zeichen $\cdot$ entfernt steht, multipliziert mit dem Skalarprodukt der beiden anderen.

Für das skalare Produkt zweier Dyaden $\boldsymbol{AB}$ und $\boldsymbol{CD}$ ergeben sich in entsprechender Weise die zwei Dyaden:

$$\text{(4)} \qquad \boldsymbol{CD}\cdot\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{CB}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A}), \qquad \boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{AD}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}),$$

wobei das Skalarprodukt hinter die Dyade gesetzt ist.

Die Summe von drei oder mehreren Dyaden, deren Vektoren auf die Grundvektoren $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ bezogen sind, läßt sich in der Form (2) als ein linearer Ausdruck der Elementardyaden $\boldsymbol{LL}, \boldsymbol{LM}, \ldots$ mit neun verschiedenen und unabhängigen Koeffizienten schreiben. Werden diese mit zwei Indices geschrieben, so erhalten wir für diese Summengröße, die gewöhnlich *Tensor* genannt wird, den folgenden Ausdruck:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{A} = {} & \boldsymbol{LL}A_L^L + \boldsymbol{LM}A_L^M + \boldsymbol{LN}A_L^N \\ & + \boldsymbol{ML}A_M^L + \boldsymbol{MM}A_M^M + \boldsymbol{MN}A_M^N \\ & + \boldsymbol{NL}A_N^L + \boldsymbol{NM}A_N^M + \boldsymbol{NN}A_N^N. \end{aligned}$$

Fassen wir hier die Glieder, entweder nach Zeilen oder nach Kolonnen, zu je dreien zusammen, so erhalten wir zwei dreigliedrige Darstellungen des Tensors. Führen wir z. B. die neuen Vektoren

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_L &= \boldsymbol{L}A_L^L + \boldsymbol{M}A_L^M + \boldsymbol{N}A_L^N, & \boldsymbol{A}^L &= \boldsymbol{L}A_L^L + \boldsymbol{M}A_M^L + \boldsymbol{N}A_N^L, \\ \boldsymbol{A}_M &= \boldsymbol{L}A_M^L + \boldsymbol{M}A_M^M + \boldsymbol{N}A_M^N, & \boldsymbol{A}^M &= \boldsymbol{L}A_L^M + \boldsymbol{M}A_M^M + \boldsymbol{N}A_N^M, \\ \boldsymbol{A}_N &= \boldsymbol{L}A_N^L + \boldsymbol{M}A_N^M + \boldsymbol{N}A_N^N, & \boldsymbol{A}^N &= \boldsymbol{L}A_L^N + \boldsymbol{M}A_M^N + \boldsymbol{N}A_N^N \end{aligned}$$

ein, so ergibt sich:

$$\text{(6)} \qquad \mathfrak{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_L + \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_M + \boldsymbol{N}\boldsymbol{A}_N = \boldsymbol{A}^L\boldsymbol{L} + \boldsymbol{A}^M\boldsymbol{M} + \boldsymbol{A}^N\boldsymbol{N}.$$

Der Tensor kann also ganz allgemein als Summe von drei Dyaden gedeutet werden. Ein Vektor $\boldsymbol{A}$ ist, wenn man ihn auf die drei Grundvektoren $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ bezieht, durch drei Skalargrößen A_L, A_M, A_N eindeutig definiert. In ganz entsprechender Weise ist ein Tensor, auf die-

selben Grundvektoren bezogen, durch die drei Vektorgrößen $\boldsymbol{A}_L$, $\boldsymbol{A}_M$, $\boldsymbol{A}_N$ oder $\boldsymbol{A}^L$, $\boldsymbol{A}^M$, $\boldsymbol{A}^N$ eindeutig definiert.

Aus der voll ausgeschriebenen Form (5) des Tensors $\mathfrak{A}$ oder aus seiner dyadischen Form (6) folgt sofort für den zu $\mathfrak{A}$ konjugierten Tensor $\mathfrak{A}'$:

(7) $$\mathfrak{A}' = \boldsymbol{A}_L\boldsymbol{L} + \boldsymbol{A}_M\boldsymbol{M} + \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{N} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{A}^L + \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}^M + \boldsymbol{N}\boldsymbol{A}^N.$$

Aus dem schon definierten skalaren Produkt von Dyade und Vektor (3) erhalten wir für das skalare Produkt von einem Tensor $\mathfrak{A}$ und einem Vektor $\boldsymbol{r}$ als Postfaktor:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}\cdot\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_L + \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_M + \boldsymbol{N}\boldsymbol{A}_N)\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{A}_L\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{A}_M\cdot\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{A}_N\cdot\boldsymbol{r})\\ &= (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}_L)\boldsymbol{L} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}_M)\boldsymbol{M} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{N},\end{aligned}$$

wo die Skalarprodukte $\boldsymbol{A}_L\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}_L, \ldots$ nach Belieben vor oder hinter die Grundvektoren geschrieben werden können. Der letzte Ausdruck kann nun als das skalare Produkt von dem Vektor $\boldsymbol{r}$ als Präfaktor und dem zu $\mathfrak{A}$ konjugierten Tensor (7) gedeutet werden. Wir erhalten somit das verallgemeinerte kommutative Gesetz:

(8) $$\mathfrak{A}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\cdot\mathfrak{A}',$$

das zur Definition des symmetrischen oder selbstkonjugierten Tensors führt, wenn $\mathfrak{A}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\cdot\mathfrak{A}$.

Wir haben schon in **8** (8) den Einheitstensor $\mathfrak{E}$ betrachtet, der, mit einem Vektor skalar multipliziert, diesen Vektor selbst ergibt. Wenn nun der allgemeinste Tensor (6) speziell den Einheitstensor sein soll, so muß das System der Vektoren $\boldsymbol{A}_L$, $\boldsymbol{A}_M$, $\boldsymbol{A}_N$ reziprok zu dem System der Vektoren $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ sein. Denn wenn der Tensor

(9) $$\mathfrak{E} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^* + \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^* + \boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^*$$

mit dem beliebigen Vektor $\boldsymbol{L}\alpha + \boldsymbol{M}\beta + \boldsymbol{N}\gamma$ als Postfaktor skalar multipliziert wird, kommt man auf diesen Vektor zurück, wie man ohne weiteres verifiziert, wenn man die Ausdrücke der reziproken Vektoren 7 (8) einsetzt und die Multiplikation ausführt.

Aus der Definition (4) des skalaren Produktes zweier Dyaden ergibt sich auch sofort das skalare Produkt zweier Tensoren in der Form eines neuen Tensors.

Ist dieses Produkt speziell den Einheitstensor, so sagt man, daß die zwei Tensorfaktoren zueinander reziprok sind. Sie werden dann mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^{-1}$ bezeichnet, und wir haben:

(10) $$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\cdot\mathfrak{A} = \mathfrak{E}.$$

Für den zu dem Tensor (6) reziproken Tensor findet man nach dieser Definition den Ausdruck:

(11) $$\mathfrak{A}^{-1} = \boldsymbol{A}_L^*\boldsymbol{L}^* + \boldsymbol{A}_M^*\boldsymbol{M}^* + \boldsymbol{A}_N^*\boldsymbol{N}^*,$$

wie man unmittelbar verifiziert: denn die skalare Multiplikation dieses Tensors mit dem Tensor (6) gibt den Einheitstensor (9) als Resultat.

Mit Hilfe eines reziproken Tensors bewerkstelligt man die Auflösung eines linearen Gleichungssystems. Aus der Vektorform dieses Systems

$$\varrho = \mathfrak{A} \cdot \boldsymbol{r} \tag{12}$$

findet man durch skalare Multiplikation mit dem zu $\mathfrak{A}$ reziproken Tensor unter Berücksichtigung von (10):

$$\boldsymbol{r} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \varrho. \tag{13}$$

Die Grundvektoren $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ sind bis jetzt ganz willkürlich gewählt worden. Bei vielen Aufgaben wird es sich jedoch als vorteilhaft erweisen, besondere Grundvektoren einzuführen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man z. B. die drei Grundvektoren überall parallel den Achsen eines cartesischen Koordinatensystems wählen und jedem die Länge Eins geben. Diese speziellen Grundvektoren, die wir mit $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ bezeichnen, genügen, gemäß den Eigenschaften des skalaren und des vektoriellen Produktes, den Relationen:

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1, \\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0, \\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0, \\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}. \end{array}\right. \tag{14}$$

Da die Vektor- und Tensorkomponenten jetzt mit den früher benutzten cartesischen zusammenfallen, so ergibt sich aus (1) die Vektordarstellung:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} A_x + \boldsymbol{j} A_y + \boldsymbol{k} A_z, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} B_x + \boldsymbol{j} B_y + \boldsymbol{k} B_z; \tag{15}$$

aus (2a) die Dyadendarstellung:

$$\left\{\begin{array}{rl} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = & \boldsymbol{i}\boldsymbol{i} A_x B_x + \boldsymbol{i}\boldsymbol{j} A_x B_y + \boldsymbol{i}\boldsymbol{k} A_x B_z \\ & + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i} A_y B_x + \boldsymbol{j}\boldsymbol{j} A_y B_y + \boldsymbol{j}\boldsymbol{k} A_y B_z \\ & + \boldsymbol{k}\boldsymbol{i} A_z B_x + \boldsymbol{k}\boldsymbol{j} A_z B_y + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} A_z B_z, \end{array}\right. \tag{16}$$

und aus (6) die Tensordarstellung:

$$\mathfrak{A} = \boldsymbol{i}\boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{j}\boldsymbol{A}_y + \boldsymbol{k}\boldsymbol{A}_z = \boldsymbol{A}^x \boldsymbol{i} + \boldsymbol{A}^y \boldsymbol{j} + \boldsymbol{A}^z \boldsymbol{k}. \tag{17}$$

Indem die Vektoren $\boldsymbol{A}^x, \boldsymbol{A}^y, \boldsymbol{A}^z$ nach (15) durch die Einheitsvektoren ausgedrückt werden:

$$\boldsymbol{A}^x = \boldsymbol{i} A_x^x + \boldsymbol{j} A_y^x + \boldsymbol{k} A_z^x \quad \text{usw.,}$$

bekommt man die explizite Darstellung des Tensors durch seine neun Komponenten:

$$\left\{\begin{array}{rl} \mathfrak{A} = & \boldsymbol{i}\boldsymbol{i} A_x^x + \boldsymbol{i}\boldsymbol{j} A_x^y + \boldsymbol{i}\boldsymbol{k} A_x^z \\ & + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i} A_y^x + \boldsymbol{j}\boldsymbol{j} A_y^y + \boldsymbol{j}\boldsymbol{k} A_y^z \\ & + \boldsymbol{k}\boldsymbol{i} A_z^x + \boldsymbol{k}\boldsymbol{j} A_z^y + \boldsymbol{k}\boldsymbol{k} A_z^z. \end{array}\right. \tag{18}$$

Setzt man zwischen sämtliche in (16) miteinander multiplizierte Vektoren das spezielle Multiplikationszeichen , so reduziert sich, unter Berücksichtigung von (14), der Ausdruck auf die Definitionsgleichung des skalaren Produktes der Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \tag{19}$$

Setzt man in derselben Weise das spezielle Multiplikationszeichen $\times$, so ergibt sich in gleicher Weise:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \boldsymbol{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \boldsymbol{k}(A_x B_y - A_y B_x), \tag{20}$$

also das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$.

14. Die GIBBSsche Vektor- und Tensoranalyse. Wenn die neun skalaren Komponenten eines Tensors als Funktionen der Koordinaten gegeben sind, ordnen sie jedem Punkte des Raumes einen Tensor zu oder sie bestimmen ein *Tensorfeld*, genau wie die drei skalaren Komponenten eines Vektors ein Vektorfeld bestimmen. Jede der drei Dyaden des Tensors läßt sich dann wie ein gewöhnliches Produkt differentiieren, nur muß die Reihenfolge der Vektoren beibehalten werden. So ergibt sich z. B.:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}) = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial x}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}. \tag{1}$$

Der Einfachheit halber werden wir im folgenden nur den Fall betrachten, daß die Grundvektoren die soeben eingeführten Einheitsvektoren $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sind, die bei der Differentiation konstant gehalten werden können.

Der HAMILTONsche Operator ∇, dessen wir uns schon vielfach bedient haben, wird in dieser Darstellung:

$$\nabla = \frac{\quad}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{2}$$

Es zeigt sich, daß man, entsprechend der formalen Ähnlichkeit dieser Definition mit der eines Vektors **13**(15), in der Tat mit diesem Operator genau wie mit einem Vektor rechnen kann.

Wenn man ∇ skalar mit sich selbst multipliziert und **13**(14) berücksichtigt, ergibt sich der bekannte Ausdruck für die sphärische Ableitung:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla &= \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.\end{aligned} \tag{3}$$

Ferner folgt für das skalare Produkt von ∇ und einem Vektor $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} + \boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} + \boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}.$$

Wenn wir den Ausdruck **13**(15) für $\boldsymbol{A}$ einführen, so erhalten wir den bekannten Ausdruck für die Divergenz des Vektors $\boldsymbol{A}$:

$$(4)\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\operatorname{div}\boldsymbol{A}.$$

Das vektorielle Produkt gibt in ähnlicher Weise:

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}+\boldsymbol{j}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}+\boldsymbol{k}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z},$$

oder durch **13**(15):

$$(5)\quad \nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)=\operatorname{curl}\boldsymbol{A},$$

also das Wirbeln des Vektors $\boldsymbol{A}$.

Wir untersuchen auf ähnliche Weise das unbestimmte Produkt von ∇ und einem Vektor $\boldsymbol{A}$:

$$(6)\qquad \nabla\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}.$$

Jedes Glied rechts ist eine Dyade, und die Summe aller drei Dyaden stellt wie gewöhnlich einen Tensor dar. Der hierzu konjugierte Tensor ergibt sich wieder durch Vertauschung der Vektorfaktoren in jedem Glied:

$$(7)\qquad (\nabla\boldsymbol{A})'=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Wenn man die zu $\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}, \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}, \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}$ reziproken Vektoren mit $\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\right)^*$, $\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\right)^*$, $\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\right)^*$ bezeichnet und sich daran erinnert, daß das Vektorsystem $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ zu sich selbst reziprok ist, findet man nach **13**(11) als reziproken Tensor zu dem Tensor (6):

$$(8)\qquad (\nabla\boldsymbol{A})^{-1}=\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial x}\right)^*\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial y}\right)^*\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial z}\right)^*\boldsymbol{k}.$$

Wenn $\boldsymbol{A}$ der Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ mit den Komponenten x, y, z ist, so folgt aus (6) und (8), daß $\nabla\boldsymbol{r}$ und $(\nabla\boldsymbol{r})^{-1}$ dem mit den Einheitsvektoren gebildeten Einheitstensor **13** (9) gleich sind:

$$(9)\qquad \nabla\boldsymbol{r}=(\nabla\boldsymbol{r})^{-1}=\mathfrak{E}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk}.$$

Wenn man den Tensor $\nabla\boldsymbol{B}$ einmal als Präfaktor und einmal als Postfaktor mit dem Vektor $\boldsymbol{A}$ skalar multipliziert, kommt man auf die beiden linearen Ableitungen des Vektors $\boldsymbol{B}$, die Ableitung $\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B}$, längs der Vektorlinien des Vektors $\boldsymbol{A}$ ausgeführt, und die konjugierte Vektorlinienableitung $\nabla\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. Wenn man hier $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ und ∇ nach Komponenten entwickelt, so erhält man die expliziten Ausdrücke:

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\nabla\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\\
+\boldsymbol{j}\left(A_x\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\\
+\boldsymbol{k}\left(A_x\frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right),
\end{aligned}
$$

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
\nabla\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial x} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\\
+\boldsymbol{j}\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial y} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\\
+\boldsymbol{k}\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial z} + A_y\frac{\partial B_y}{\partial z} + A_z\frac{\partial B_z}{\partial z}\right),
\end{aligned}
$$

und man gelangt unmittelbar zu den Eigenschaften dieser Ableitungen, die im Abschnitt **11** auseinandergesetzt wurden.

Ohne große Mühe kann man in ähnlicher Weise auch die komplizierteren Formeln **11** (13) und (14) herleiten.

Zweites Kapitel.

Kinematik des Kontinuums.

15. Bewegung des Punktes. Wir haben bisher Skalarfelder, Vektorfelder und Tensorfelder an sich betrachtet und dabei oft die Bewegungsfelder zur Veranschaulichung hinzugezogen. Jetzt werden wir unsere Aufmerksamkeit diesen Bewegungsfeldern an sich zuwenden und sowohl ihre analytische Darstellung als auch ihre Eigenschaften entwickeln, soweit dies ohne Berücksichtigung der physikalischen Bewegungsursachen möglich ist.

Wir gehen aus von der Bewegung eines einzelnen Punktes und betrachten dessen Koordinaten, Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Ist $\boldsymbol{r}$ der Radiusvektor eines bewegten Punktes und sind x, y, z die Projektionen dieses Radiusvektors auf drei rechtwinkligen Achsen, so geben die Gleichungen

$$
(1)\qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t) \qquad \text{oder} \qquad \begin{cases} x = f_x(t)\,, \\ y = f_y(t)\,, \\ z = f_z(t) \end{cases}
$$

die Lage des Punktes zu einer beliebigen Zeit t an und stellen die *Bahn* des Punktes als Funktion des Parameters t dar.

Die ersten Ableitungen des Systems (1) nach der Zeit stellen die *Geschwindigkeit* $\boldsymbol{v}$ des Punktes dar, einen Vektor tangentiell zur Bahn und mit den Komponenten v_x, v_y, v_z. Also, indem wir je nach den

Umständen die gewöhnliche Differentialquotientenbezeichnung oder die NEWTONsche Punktbezeichnung anwenden:

$$(2)\qquad \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \\ v_y &= \dot{y} = \frac{dy}{dt}, \\ & \quad\;\; \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Ist diese Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ oder sind die entsprechenden Komponenten v_x, v_y, v_z gegeben, so ist die Bewegung (1) vollständig bekannt, wenn man zugleich die Lage des Punktes zu einer Anfangszeit kennt:

$$(3)\qquad t = t_0: \quad x = x_0, \quad y = y_0, \quad z:$$

Die zweite Zeitableitung gibt die *Beschleunigung* des Punktes:

$$(4)\qquad \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \dot{v}_x &= \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \dot{v}_y &= \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \dot{v}_z &= \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}$$

Ist diese Beschleunigung bekannt und zugleich die Lage und die Geschwindigkeit des Punktes zu einer Anfangszeit, so kennt man auch die Bewegung (1) des Punktes vollständig.

Die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z können wir durch beliebige krummlinige und im allgemeinsten Falle auch bewegte Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 ersetzen:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = x(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t), \\ y = y(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t), \\ z = z(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t). \end{cases}$$

In den Rechnungen treten dann an Stelle der Zeitableitungen (2) und (4) die neuen Ableitungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \frac{d\psi_1}{dt}, & \dot{\psi}_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} & \dot{\psi}_3 &= \frac{d\psi_3}{dt}; \\ \ddot{\psi}_1 &= \frac{d^2\psi_1}{dt^2}, & \ddot{\psi}_2 &= \frac{d^2\psi_2}{dt^2}, & \ddot{\psi}_3 &= \frac{d^2\psi_3}{dt^2} \end{aligned}$$

auf. Diese haben nicht mehr die Bedeutung der linearen Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten (2) und (4). Wir werden sie die *verallgemeinerten* Komponenten der Geschwindigkeit oder der Beschleunigung nennen. Die verallgemeinerten Geschwindigkeitskomponenten brauchen nicht die Dimension der linearen Geschwindigkeit (2) zu haben, ja sie brauchen nicht einmal unter sich von gleicher Dimen-

sion zu sein. So benutzt man bei der Rechnung mit Polarkoordinaten eine lineare und zwei angulare Geschwindigkeitskomponenten nebeneinander. Dasselbe gilt für die verallgemeinerten Beschleunigungskomponenten. Die verallgemeinerten Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung stehen aber in eindeutiger Beziehung zu den linearen Komponenten (2) und (4) oder zu den Vektoren (2) und (4), auf die sich die physikalischen Axiome der Bewegungslehre beziehen. Diese linearen Komponenten können wir vermittels der verallgemeinerten Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponenten finden.

Wenn wir jetzt von der Bewegung eines einzigen Punktes zu der Bewegung eines Kontinuums von Punkten übergehen, so bieten sich zwei Methoden dar. Beide rühren historisch von EULER her. Man nennt aber gewöhnlich die eine die LAGRANGEsche und die andere die EULERsche. Wir werden beide entwickeln, und zwar unter Anwendung sowohl cartesischer wie auch ganz beliebiger Koordinatensysteme.

16. Die LAGRANGEsche Methode. Man erhält eine vollständige Beschreibung der Bewegung jedes einzelnen Punktes eines Kontinuums, wenn man in die Gleichungen **15**(1) neben der Zeit t drei beliebige Parameter a, b, c einführt:

$$(1) \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c, t) \qquad \text{oder} \qquad \begin{cases} x = x(a, b, c, t), \\ y = y(a, b, c, t), \\ z = z(a, b, c, t). \end{cases}$$

Gibt man den Parametern a, b, c beliebige Konstantwerte a_0, b_0, c_0, so ist man auf das System **15**(1) zurückgekommen: man erhält die Bewegung eines einzelnen Punktes, den man den Punkt a_0, b_0, c_0 nennen kann. Für ein anderes System von Konstantwerten a_1, b_1, c_1 erhält man die Bewegung eines anderen Punktes, den man den Punkt a_1, b_1, c_1 nennen kann usf. (1) stellt mit anderen Worten die Bewegung einer dreifachen Mannigfaltigkeit von Punkten dar, wobei jeder Punkt durch ein Wertsystem der drei Parameter a, b, c gekennzeichnet ist.

Um die Bedeutung der zur Numerierung dienenden Parameter deutlicher zu erkennen, brauchen wir nur auf die völlige Übereinstimmung des Gleichungssystems (1) mit **15**(5) hinzuweisen. Wie man in **15**(5) die Größen ψ_1, ψ_2, ψ_3 beliebige krummlinige bewegte Koordinaten nennt, kann man in (1) die Parameter a, b, c als beliebige krummlinige bewegte Koordinaten auffassen. Nur sind jetzt die durch die Koordinaten a, b, c definierten Flächen, Kurven und Punkte materialisiert, und jeder Punkt a, b, c des materiellen Kontinuums ist durch die Nummern der sich in ihm schneidenden bewegten Koordinatenflächen a, b, c gekennzeichnet. Wir können dementsprechend a, b, c die *Numerierungs-*

koordinaten der materiellen Punkte nennen und x, y, z die Koordinaten der Lage oder *Lagekoordinaten,* welche die Lagen der numerierten materiellen Punkte zu einer beliebigen Zeit t geben.

Man kann den Inhalt der Gleichungen (1) auch durch die folgende Überlegung veranschaulichen, indem man von bekannten Prinzipien der analytischen Geometrie ausgeht.

Wenn man in den Gleichungen (1) drei der Größen a, b, c, t konstant hält und die vierte variieren läßt, so erhält man die bekannte Darstellung einer Kurve mit Hilfe eines Parameters. Diese Kurve ist die Bahn eines Punktes a, b, c, wenn man t variieren läßt, und eine Koordinatenkurve des bewegten krummlinigen Systems zu der betrachteten Zeit t, wenn man eine der Größen a, b, c variieren läßt. Hält man zwei der Größen a, b, c, t konstant, und läßt zwei andere variieren, so geben die drei Skalargleichungen die bekannte Darstellung einer Fläche mittels zweier Parameter: wenn man t und einen der Parameter a, b, c variieren läßt, so erhält man die Fläche, die eine Koordinatenkurve durch ihre Bewegung erzeugt; wenn man zwei der Parameter a, b, c variiert, erhält man eine Koordinatenfläche zu der festgesetzten Zeit t. Gibt man später der Zeit eine Reihe von Werten, so erhält man diese Koordinatenfläche für verschiedene zeitlich aufeinanderfolgende Lagen usf.

Auf diese Bewegung der materiellen Koordinatenflächen kommt man andererseits direkt, wenn man das nach a, b, c aufgelöste System (1) betrachtet:

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} a = a(x, y, z, t), \\ b = b(x, y, z, t), \\ c = c(x, y, z, t). \end{cases}$$

Gibt man hier der Zeit t einen bestimmten Konstantwert $t = t_0$, so definieren die Gleichungen (2) drei zu dieser Zeit koexistierende Skalarfunktionen, deren numerierte Äquiskalarflächen

$$\text{(2a)} \qquad a = 1, 2, 3, \ldots, \qquad b = 1, 2, 3, \ldots, \qquad c = 1, 2, 3, \ldots$$

die materiellen Koordinatenflächen sind. Die Schnittlinien dieser Flächen sind die durch zwei Nummern (b, c), (c, a), (a, b) gekennzeichneten materiellen Koordinatenkurven; und die Schnittpunkte sind die durch drei Nummern gekennzeichneten materiellen Punkte des Kontinuums. Gibt man t einen neuen Wert $t = t_1$, so sind die Flächen mit den Nummern (2a) verschoben und mit ihnen auch ihre Schnittkurven und Schnittpunkte. Ein weiterer Wert von t, $t = t_2$, gibt das ganze System noch weiter verschoben usf.

Die Numerierungsflächen (2) können wir zu einer beliebigen Zeit $t = t_0$ ganz beliebig wählen. Die Größen a, b, c zu dieser Zeit, die wir mit a_0, b_0, c_0 bezeichnen wollen, geben dann gleichzeitig sowohl den

ruhenden Punkten des Raumes als auch den bewegten Punkten des Kontinuums Nummern. Diese Nummern definieren ein für allemal sowohl ein festes Koordinatensystem im Raume als auch ein bewegtes, dem materiellen Kontinuum zugehöriges Koordinatensystem. Diese beiden Systeme aufeinander zu beziehen, ist nun das Prinzip der LAGRANGEschen Methode.

Es ist dabei am einfachsten, die Numerierungsflächen zur Zeit t_0 mit den cartesischen Koordinatenebenen zusammenfallen zu lassen. Die materiellen Koordinatenflächen sind dann solche materiellen Flächen, die zu der gewählten Anfangszeit Ebenen des cartesischen Systems waren. Oder, in diesem Falle sind die Nummern a, b, c der bewegten Punkte identisch mit den cartesischen Koordinaten x_0, y_0, z_0, die diese Punkte zu der Anfangszeit t_0 hatten:

$$t = t_0: \quad a = x_0, \quad b = y_0, \quad c = z_0. \tag{3}$$

In ähnlicher Weise kann man jedes beliebige Koordinatensystem erstens für die Numerierung und dann für die Lagekoordinaten der somit numerierten Punkte verwenden.

Auf dieses Prinzip, die Numerierungskoordinaten mit den Anfangswerten der Lagekoordinaten zusammenfallen zu lassen, werden wir bei der Behandlung von Spezialaufgaben gewöhnlich zurückgreifen. Um die Grundlagen in allgemeinster Form darzulegen, werden wir aber bis auf weiteres an einer voneinander unabhängigen Wahl von Numerierungskoordinaten und Lagekoordinaten festhalten.

Die partiellen Ableitungen der Koordinaten x, y, z oder des entsprechenden Vektors $\boldsymbol{r}$, die man nach (1) bildet, haben eine anschauliche Bedeutung.

Die partielle Ableitung nach t, die bei konstant gehaltenen Werten von a, b, c gebildet wird, gibt die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Teilchens mit den Nummern a, b, c:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \boldsymbol{v}. \tag{4}$$

Dies ist ein Vektor, der längs der Tangente der Bahn gerichtet ist. Differentiiert man noch einmal partiell nach t, so erhält man die Beschleunigung desselben Teilchens:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{j}. \tag{5}$$

Differentiiert man andererseits $\boldsymbol{r}$ partiell nach a bei festgehaltenen Werten von b, c, t, so schreitet man längs der Koordinatenkurve (b, c) fort, deren Punkte mit Hilfe von a numeriert sind. Die Ableitung gibt einen Vektor $\boldsymbol{T}_a$ tangentiell zu der Koordinatenkurve (b, c). Ähnlich

ist es, wenn man partiell nach b oder c differentiiert. Folglich stellen die drei partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} = \mathbf{T}_a, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} = \mathbf{T}_b, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} = \mathbf{T}_c \tag{6}$$

Vektoren dar, die zur Zeit t die Koordinatenkurven (b, c), (c, a), (a, b) berühren.

Es folgt hieraus, daß

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt \tag{7}$$

ein Element der Bahn des Teilchens a, b, c darstellt, und daß

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} da, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} db, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} dc \tag{8}$$

Elemente der durch das Teilchen a, b, c hindurchgehenden Koordinatenkurven sind. Je zwei Paare dieser Vektorlinienelemente bestimmen parallelogrammatische Flächenelemente, die als Vektoren die Areale

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} dc\, da, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} da\, db \tag{9}$$

haben. Das dreifache Produkt

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} da\, db\, dc \tag{10}$$

stellt das Volumen des entsprechenden Elementarparallelepipeds dar.

Zu einer beliebigen Zeit $t = t_0$ war das Volumen des von denselben materiellen Koordinatenflächen begrenzten Parallelepipeds:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial c} da\, db\, dc. \tag{11}$$

Dieselbe Stoffmenge wie zur Zeit t_0 füllt das Parallelepiped zur Zeit t. Ist nun die Dichte des Stoffes q_0 zur Zeit t_0 und q zur Zeit t, so erhält man die im Elementarparallelepiped enthaltene Masse, sowohl wenn man (10) mit q multipliziert, als auch wenn man (11) mit q_0 multipliziert. Identifiziert man die beiden Ausdrücke, so fällt der gemeinsame Faktor $da\, db\, dc$ fort und man erhält die Gleichung:

$$q \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} = q_0 \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial c}, \tag{12}$$

die das *Prinzip von der Erhaltung der Masse* ausdrückt und gewöhnlich die *Kontinuitätsgleichung* genannt wird. Kehrt man von dem Vektor $\mathbf{r}$ zu dessen Komponenten x, y, z zurück, so schreibt sich die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = q_0 \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial x_0}{\partial c} \\ \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial c} \\ \frac{\partial z_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix} \tag{12'}$$

Oder auch, mit Funktionaldeterminantenbezeichnung:

$$q \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = q_0 \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(a, b, c)}. \tag{12''}$$

Wenn man in einem Spezialfall die Anfangskoordinaten als Numerierungskoordinaten gemäß (3) verwendet, so wird der Faktor von q_0 in diesen Gleichungen gleich 1. In der letzten Bezeichnungsweise ergibt sich somit:

$$q \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = q_0. \tag{13}$$

Ist die Dichte und damit das Elementarvolumen zeitlich unveränderlich, so ist $q = q_0$ und

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = 1, \tag{14}$$

eine Gleichung, die somit die Bedingung der Inkompressibilität ausdrückt.

In den entwickelten Formeln sind die Numerierungskoordinaten a, b, c ganz allgemeine, krummlinige und bewegte Koordinaten, die Lagekoordinaten x, y, z dagegen gewöhnliche cartesische Koordinaten. Um auch die Lagekoordinaten vollkommen beliebig als krummlinige und bewegte Koordinaten wählen zu können, haben wir nach **15**(5) die x, y, z mit den Anfangswerten x_0, y_0, z_0 durch die beliebigen Lagekoordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 mit den Anfangswerten $\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0$ zu ersetzen.

Um diese neuen Koordinaten, unter Beibehaltung von a, b, c als Numerierungskoordinaten, in die Kontinuitätsgleichung einzuführen, schreibt man diese Gleichung in der Form:

$$q \frac{D(x, y, z)}{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)} \frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a, b, c)} = q_0 \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)} \frac{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)}{D(a, b, c)}.$$

Wenn D und D_0 die Ausdrücke

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}, \qquad D_0 = \frac{D(x_0, y_0, z_0)}{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)} \tag{15}$$

bedeuten, die man ein für allemal nach den Transformationsgleichungen **15**(5) bildet, so ergibt sich die Kontinuitätsgleichung in der Form:

$$q D \frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a, b, c)} = q_0 D_0 \frac{D(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)}{D(a, b, c)} \tag{16}$$

In dem Spezialfalle, wo man die Anfangskoordinaten als Numerierungskoordinaten anwendet:

$$\psi_1^0 = a, \quad \psi_2^0 = b, \quad \psi_3^0 = c,$$

vereinfacht sich die Gleichung (16) auf

$$q D \frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a, b, c)} = q_0 D_0, \tag{17}$$

welche die am meisten benutzte Form ist.

Will man die Geschwindigkeitsverteilung studieren, so gibt

$$(18)\qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(a, b, c, t) \quad \text{oder} \quad \begin{cases} v_x = v_x(a, b, c, t), \\ v_y = v_y(a, b, c, t), \\ v_z = v_z(a, b, c, t) \end{cases}$$

die Verteilung der Geschwindigkeit auf die einzelnen Teilchen a, b, c zu einer beliebigen Zeit t. Substituiert man (2) in (18), so findet man die räumliche Verteilung der Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit t:

$$(19)\qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t) \quad \text{oder} \quad \begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t), \\ v_y = v_y(x, y, z, t), \\ v_z = v_z(x, y, z, t), \end{cases}$$

d. h. das Geschwindigkeitsfeld zu dieser Zeit.

Will man nun die Beschleunigung des Teilchens a, b, c bilden, und zwar nicht nach (18), sondern nach (19), so muß man berücksichtigen, daß in dieser Formel $\boldsymbol{v}$ in zweierlei Weise von der Zeit abhängt, erstens explizite, zweitens implizite durch x, y, z, die nach (1) Funktionen von a, b, c, t sind. Die totale Zeitdifferentiation ergibt also:

$$(20)\qquad \boldsymbol{j} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\dot{z},$$

oder, da $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z sind:

$$(20')\qquad \boldsymbol{j} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + v_x\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}.$$

In dem trinomischen Gliede erkennen wir die lineare Operation **11** (1) und können daher schreiben:

$$(20'')\qquad \boldsymbol{j} = \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}.$$

Wir kommen hier auf eine zusammengesetzte Differentialoperation:

$$(21)\qquad \frac{\partial}{\partial t} + v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla,$$

die sich als wichtig erweisen wird.

Hätten wir statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z die allgemeinen ψ_1, ψ_2, ψ_3 verwendet, so wären wir in ganz ähnlicher Weise zu derselben Form dieser Operation gelangt:

$$(22)\qquad \frac{\partial}{\partial t} + v_1\frac{\partial}{\partial \psi_1} + v_2\frac{\partial}{\partial \psi_2} + v_3\frac{\partial}{\partial \psi_3} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla,$$

wo v_1, v_2, v_3 die verallgemeinerten Geschwindigkeitskomponenten **15** (6) sind und die Operation ∇ bei den Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 formal dieselbe ist wie sonst bei den Koordinaten x, y, z.

Die Ableitungen $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, die in den Formeln (20) vorkommen, sind in den Formeln (20′) bis (22) durch v_x, v_y, v_z oder $\boldsymbol{v}$ ersetzt. Die

LAGRANGEschen abhängigen Variablen x, y, z kommen in diesen Formeln nicht vor; aus diesem Grunde kann man die Formeln sowohl im EULERschen wie im LAGRANGEschen System benutzen.

17. Die EULERsche Methode. Nachdem durch **16** (4) ein für allemal die Geschwindigkeit eines beliebigen Teilchens des Kontinuums definiert ist, kann man auf die weitere Verfolgung der Bewegung jedes einzelnen Teilchens des Kontinuums verzichten. Man kann die Koordinaten x, y, z von ihrer Verbindung mit den bewegten Teilchen loslösen und sie als Koordinaten geometrischer Raumpunkte oder *Ortskoordinaten* auffassen und jetzt die Aufmerksamkeit auf das jeweilige *Geschwindigkeitsfeld* in der Form **16** (19)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t) \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} v_x &= v_x(x, y, z, t), \\ v_y &= v_y(x, y, z, t), \\ v_z &= v_z(x, y, z, t) \end{aligned} \tag{1}$$

richten.

Die partiellen Ableitungen erhalten dabei ganz andere Bedeutungen als im LAGRANGEschen System. Die Zeitableitung

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}, \tag{2}$$

die bei konstant gehaltenen Werten von x, y, z gebildet wird, kennzeichnet die *lokale* Änderung der Geschwindigkeit wie man sie etwa an Ort und Stelle durch eine fest aufgestellte Windfahne mit Anemometer findet. (2) darf deshalb nicht mit der Beschleunigung des vorbeiziehenden Teilchens verwechselt werden. Entsprechend kennzeichnen die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} \tag{3}$$

die örtlichen Geschwindigkeitsunterschiede längs der Achsenrichtungen.

Die Formel **16** (20′) oder (20″), welche die Beschleunigung im LAGRANGEschen System darstellt, gibt auch die Beschleunigung im EULERschen System. Außer durch den NEWTONschen Punkt wollen wir sie im EULERschen System auch durch das Zeichen der vollständigen Ableitung bezeichnen:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}. \tag{4}$$

Wir müssen also im EULERschen System sorgfältig zwischen zwei verschiedenen Zeitableitungen unterscheiden: der *lokalen* Zeitableitung $\partial/\partial t$, die sich auf solche zeitlichen Veränderungen bezieht, die man an einem und demselben Orte beobachtet, und der *individuellen* Zeitableitung, die wir im EULERschen System mit d/dt bezeichnen:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla, \tag{5a}$$

die sich auf solche zeitlichen Änderungen bezieht, die man an ein und demselben bewegten Individuum beobachtet. Ersetzt man die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z durch die ganz beliebigen ψ_1, ψ_2, ψ_3, so behält diese Operation ihre Form

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial \psi_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial \psi_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial \psi_3} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \tag{5b}$$

bei, in der v_1, v_2, v_3 die verallgemeinerten Geschwindigkeitskomponenten **15** (6) bedeuten und in der sich ∇ auf die Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 bezieht.

Eine besonders einfache Bewegungsform liegt vor, wenn die lokale Zeitableitung gleich Null ist:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0 . \tag{6}$$

Die Bewegung ist dann an Ort und Stelle unveränderlich oder sie ist *permanent* oder *stationär*. Die bei der stationären Bewegungsform auftretende speziellere Beschleunigung

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \tag{7}$$

hat zur Folge, daß das bewegte Teilchen jede Stelle des Raumes mit der für diese Stelle vorgeschriebenen Geschwindigkeit erreicht.

Die Vektorlinien **2** (1) der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ oder die *Stromlinien* sind im allgemeinen von den durch **16** (1) definierten Bahnen der einzelnen Teilchen völlig verschieden. Das Stromlinienbild ist zeitlich veränderlich. Bei dem eben definierten stationären Bewegungszustand bleibt es jedoch unveränderlich und die Stromlinien fallen mit den Bahnen zusammen.

Hat man das Problem der Bewegung des Kontinuums in EULERscher Form gelöst, so kann man durch eine neue Integration immer zu der Lösung in der LAGRANGEschen Form kommen. Denn kennt man die Geschwindigkeitskomponenten (1) als Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z, so kann man sich diese Koordinaten wieder mit den bewegten Teilchen verbunden denken und die Geschwindigkeitskomponenten durch die Zeitableitungen dieser Größen ausdrücken. Die Gleichungen (1) werden dann:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t) , \\ \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t) , \\ \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t) . \end{cases} \tag{8}$$

Diese drei simultanen Differentialgleichungen bestimmen die Koordinaten x, y, z eines beliebigen bewegten Teilchens als Funktionen der

Zeit t mit drei Integrationskonstanten a, b, c. Man kommt dann zu der Form 16 (1). Die Numerierungskoordinaten sind als Integrationskonstanten hineingekommen und werden als solche gewöhnlich als Anfangskoordinaten der Teilchen zu einer gegebenen Zeit $t = t_0$ bestimmt, der Gleichung 16 (3) entsprechend.

Gute Beispiele zur Unterscheidung der lokalen und der individuellen Zeitableitung erhält man, wenn man die Bedingung der Erhaltung der Masse gemäß EULER formulieren will. Die spezifische Bewegungsgröße $q\boldsymbol{v}$ vertritt den Massentransport im Bewegungsfelde, und deren Divergenz hat, wie schon S. 10 erwähnt, die Bedeutung des Massenausflusses pro Volumeneinheit eines ruhenden geometrischen Volumenelementes. Da gleichzeitig $-\frac{\partial q}{\partial t}$ den lokalen Massenverlust pro Volumeneinheit darstellt, ergibt sich

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \operatorname{div} q\boldsymbol{v} \tag{9}$$

als eine erste EULERsche Form der Kontinuitätsgleichung. Entwickelt man $\operatorname{div} q\boldsymbol{v}$, führt die individuelle Zeitableitung (5 a) ein und ersetzt die Dichte q durch das spezifische Volumen $s = 1/q$, so findet man

$$\frac{1}{s}\frac{ds}{dt} = \operatorname{div} \boldsymbol{v} \tag{9'}$$

als eine zweite Form. Hier hat die linke Seite, wo jetzt die individuelle Zeitableitung auftritt, die Bedeutung der Ausdehnungsgeschwindigkeit pro Volumeneinheit des bewegten Volumenelementes. Daß die rechte Seite dieselbe Bedeutung hat, haben wir schon hervorgehoben (S. 10).

Um die EULERsche Kontinuitätsgleichung in allgemeinen Koordinaten zu erhalten, gehen wir am besten von der entsprechenden LAGRANGEschen Gleichung 16 (16) aus. Logarithmische Differentiation dieser Gleichung nach der Zeit ergibt:

$$\frac{\dot q}{q} + \frac{\dot D}{D} + \frac{1}{\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a,b,c)}}\left[\frac{D(\dot\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a,b,c)} + \frac{D(\psi_1, \dot\psi_2, \psi_3)}{D(a,b,c)} + \frac{D(\psi_1, \psi_2, \dot\psi_3)}{D(a,b,c)}\right] = 0\,.$$

Hier können wir die Größen

$$v_1 = \dot\psi_1\,, \qquad v_2 = \dot\psi_2\,, \qquad v_3 = \dot\psi_3$$

als die neuen abhängigen Variablen einführen. Das erste Glied in der Klammer wird dann, indem wir v_1 als Funktion von ψ_1, ψ_2, ψ_3 betrachten:

$$\frac{D(v_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a,b,c)} = \frac{D(v_1, \psi_2, \psi_3)}{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}\,\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a,b,c)} = \frac{\partial v_1}{\partial \psi_1}\,\frac{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{D(a,b,c)}\,.$$

Ähnliche Ausdrücke findet man für die übrigen Funktionaldeterminanten. Durch Einsetzen in die Hauptgleichung ergibt sich:

$$\frac{\dot{q}}{q} + \frac{\dot{D}}{D} + \frac{\partial v_1}{\partial \psi_1} + \frac{\partial v_2}{\partial \psi_2} + \frac{\partial v_3}{\partial \psi_3} = 0\,, \tag{10}$$

wo jetzt die LAGRANGEschen Numerierungskoordinaten a, b, c fortgefallen sind. Hier können wir die Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 von ihrer Verbindung mit den bewegten Punkten loslösen und sie in Koordinaten geometrischer Raumpunkte übergehen lassen, wobei die physikalische Bedeutung der durch die Punkte bezeichneten Zeitableitungen als individuelle Zeitableitungen festzuhalten ist.

Die Gleichung ist, wie man sieht, eine unmittelbare Verallgemeinerung der Gleichung (9'). $\dot{q}/q$ können wir durch $-\dot{s}/s$ ersetzen und mit symbolischer Divergenzbezeichnung wird dann die Gleichung (10):

$$\frac{1}{s}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{D}\frac{dD}{dt} + \operatorname{div} \boldsymbol{v}\,, \tag{10'}$$

wo

$$D \qquad \frac{D(x, y, z)}{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}\,. \tag{11}$$

Wenn man die allgemeinen Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 mit den cartesischen x, y, z identifiziert, wird $D = 1$, und man kommt auf die Gleichung (9') zurück.

18. Die kinematischen Grenzflächenbedingungen. Die Kontinuitätsgleichung in der LAGRANGEschen Form **16** (12) oder in der EULERschen Form **17** (9) besitzt nur für diejenigen Bereiche der Flüssigkeit Gültigkeit, wo die Variablen sich kontinuierlich ändern. Denn nur hier ist es möglich, die in der Gleichung vorkommenden Ableitungen der abhängigen Variablen zu bilden. An der äußeren Begrenzungsfläche, wo die Flüssigkeit an fremde Körper oder den leeren Raum grenzt, kann man diese Ableitungen nur auf der *einen*, an die Flüssigkeit grenzenden Seite der Fläche bilden, nicht aber auf der anderen. An einer inneren Diskontinuitätsfläche, wo die abhängigen Variablen sprungweise ihre Werte ändern, und an den äußeren Grenzflächen muß deshalb die Kontinuitätsgleichung durch eine neue Bedingung, *die kinematische Grenzflächenbedingung*, ersetzt werden.

Es sei

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer Fläche, die wir uns bequemerweise in den Koordinaten x, y, z ausgedrückt denken, wobei diese entweder die LAGRANGEschen abhängigen Variablen oder die EULERschen unabhängigen Variablen sein können. Sollte nämlich im LAGRANGEschen Falle die Gleichung der Fläche nicht in der Form (1) gegeben sein, sondern als Funktion der

Numerierungskoordinaten a, b, c und der Zeit, so könnte sie immer durch die Substitution **16** (2) auf die Form (1) gebracht werden. Die Bedingung, die an einer Fläche (1) die Kontinuitätsgleichung zu ersetzen hat, soll nun das Prinzip ausdrücken, daß die materiellen Teilchen, die der Fläche angehören, diese nicht verlassen können, und daß keine neuen Teilchen auf die Fläche gelangen können[1]. Ein Teilchen der Fläche, das zur Zeit t die Koordinaten x, y, z hat, wird zu einer infinitesimal verschiedenen Zeit $t + dt$ die Koordinaten $x + dx, y + dy, z + dz$ haben. Nach dem eben angegebenen Prinzip wird dann neben (1) auch die Gleichung

$$f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0$$

bestehen müssen, oder nach TAYLOR entwickelt:

$$f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0.$$

Wenn wir (1) berücksichtigen, mit dt dividieren und zu entsprechenden Vektorbezeichnungen übergehen, so erhalten wir hieraus die gesuchte kinematische Grenzflächenbedingung in der Form:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathfrak{r}} \cdot \nabla f = 0. \tag{2}$$

Eine andere Ableitung dieser Bedingung wird gleichzeitig ein anschauliches Bild ihres Inhaltes geben. In der Nähe des Zeitpunktes $t = t_0$ und des Raumpunktes $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, der für $t = t_0$ auf der Fläche liegt, können wir die Gleichung (1) durch die TAYLORsche Entwicklung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - z_0) + \frac{\partial f}{\partial t}(t - t_0) = 0 \tag{3}$$

darstellen. Dies ist die Gleichung einer Ebene, die wir einfacher in der Form

$$A_x(x - x_0) + A_y(y - y_0) + A_z(z - z_0) + D(t - t_0) = 0$$

oder in der „Normalform"

$$\frac{A_x(x - x_0) + A_y(y - y_0) + A_z(z - z_0)}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} = -\frac{D}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}(t - t_0)$$

schreiben können. Jede Seite dieser Gleichung stellt einen Ausdruck des Abstandes der Ebene von dem Punkte x_0, y_0, z_0 dar. Gemäß dem Ausdruck auf der rechten Seite nimmt dieser Abstand proportional der Zeit $t - t_0$ zu, und der Faktor von $t - t_0$ stellt folglich die Geschwindigkeit dar, mit der sich die Ebene von dem Punkte x_0, y_0, z_0 entfernt, d. h. die Geschwindigkeit, welche die Ebene senkrecht zu sich selbst hat. Kehren wir zu den Bezeichnungen der Gleichung (3) zurück oder zu entsprechenden

[1] Diese Bedingung ist jedenfalls richtig für eine singularitätenfreie Fläche, dagegen nicht immer für eine Fläche mit Singularitäten.

Vektorbezeichnungen, so sehen wir: jedes Element der Fläche (1) bewegt sich mit der Geschwindigkeit

$$-\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}$$

senkrecht zu sich selbst. Schreiben wir deshalb die Gleichung (2) in der Form:

$$\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=-\frac{1}{|\nabla f|}\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{2'}$$

so ist $\nabla f/|\nabla f|$ eine Normale der Länge Eins, und das skalare Produkt $\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ gibt die Komponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen längs dieser Normalen. In der Form (2') sagt also die kinematische Grenzflächenbedingung aus: *ein Teilchen, das mit der Fläche in Berührung steht, hat längs der Normalen der Fläche dieselbe Geschwindigkeit wie die Fläche selbst* — ein Prinzip, das wir auch hätten zugrunde legen können, um daraus die Bedingung (2) abzuleiten.

Liegt eine innere Diskontinuitätsfläche vor, mit x, y, z als Koordinaten der Flüssigkeitsteilchen auf der einen Seite der Fläche und x', y', z' auf der anderen, so gelten die Gleichungen (1) und (2) auf der einen Seite der Fläche und die entsprechenden Gleichungen

$$f'(x', y', z', t)=0 \tag{4}$$

und

$$\frac{\partial f'}{\partial t}+\dot{\boldsymbol{r}}'\cdot\nabla' f'=0 \tag{5}$$

auf der anderen Seite. Dabei stellen (1) und (4) genau dieselbe Fläche im Raume dar, (1) definiert sie aber materiell als aus Teilchen der einen Flüssigkeitsmasse bestehend und (4) als aus Teilchen der anderen Flüssigkeitsmasse, so daß man zwei materiell verschiedene Flächen hat, die geometrisch zusammenfallen. In einem und demselben Punkte der Diskontinuitätsfläche, d. h. für $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$, müssen dann die Einheitsnormalen der zwei Flächen (1) und (4) identisch dieselben sein, desgleichen die Geschwindigkeiten dieser Flächen senkrecht zu sich selbst, also:

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|}=\frac{\nabla' f'}{|\nabla' f'|} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\nabla f|}=\frac{\frac{\partial f'}{\partial t}}{|\nabla' f'|}, \quad \text{wenn } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'.$$

Mit Hilfe von (2) und (5) lassen sich diese Gleichungen auch in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{cases}(\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla f(x, y, z, t)=0,\\ (\dot{\boldsymbol{r}}-\dot{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla' f'(x', y', z', t)=0,\\ \text{wenn } \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'.\end{cases} \tag{6}$$

Für diejenigen Wertsysteme von x, y, z, t und x', y', z', t, welche die Gleichungen (1) und (4) erfüllen, stellen die Gleichungen (2), (5) und (6) die kinematischen Grenzflächenbedingungen in ihrer allgemeinen Form dar, von welcher man nach Belieben zur LAGRANGEschen oder zur EULERschen Form übergehen kann.

In der LAGRANGEschen Form schreiben wir diese Grenzbedingungen mit den cartesischen Koordinaten x, y, z bzw. x', y', z' als abhängigen und den Numerierungskoordinaten a, b, c bzw. a', b', c' als unabhängigen Variablen. Die Gleichung der Grenzfläche ist dann als Funktion der Numerierungskoordinaten und der Zeit in der Form

$$f(a, b, c, t) = 0 \quad \text{und} \quad f'(a', b', c', t) = 0 \tag{7}$$

gegeben.

Die Bedingungen (2) und (5), die das Verschwinden der individuellen Zeitableitung der Grenzflächenfunktion aussagen, lauten in diesem Falle:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(a, b, c, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} f'(a', b', c', t) = 0, \tag{8}$$

wo $\partial/\partial t$ die partielle Zeitableitung bei festgehaltenen Werten der Numerierungskoordinaten ist.

Um schließlich die Bedingung (6) in den Numerierungskoordinaten auszudrücken, werden wir für einen Augenblick den auf die Variablen x, y, z bzw. x', y', z' bezogenen Differentialoperator durch ∇_r bzw. $\nabla_{r'}$ bezeichnen, während ∇ bzw. ∇' den entsprechenden Operator in bezug auf die Numerierungskoordinaten a, b, c bzw. a', b', c' bedeuten soll. Wir müssen dann den Operator ∇_r bzw. $\nabla_{r'}$ durch ∇ bzw. ∇' ersetzen. Dazu haben wir die eine Vektorgleichung bzw. die drei entsprechenden Skalargleichungen:

$$\nabla f = \nabla \mathbf{r} \cdot \nabla_r f \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}, \\ \frac{\partial f}{\partial b} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b}, \\ \frac{\partial f}{\partial c} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial c}, \end{aligned} \tag{9}$$

mit entsprechenden Ausdrücken für die gestrichenen Buchstaben. Die Auflösung der Vektorgleichung nach $\nabla_r f$ oder der Skalargleichungen nach $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ ergibt nun:

$$\nabla_r f = (\nabla \mathbf{r})^{-1} \cdot \nabla f \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} &= \frac{D(f, y, z)}{D(a, b, c)}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} &= \frac{D(x, f, z)}{D(a, b, c)}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} &= \frac{D(x, y, f)}{D(a, b, c)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Grenzbedingungen (6) schreiben sich folglich, wenn $\dot{\boldsymbol{r}}$ und $\dot{\boldsymbol{r}}'$ durch $\partial \boldsymbol{r}/\partial t$ und $\partial \boldsymbol{r}'/\partial t$ ersetzt werden und die cartesischen Koordinaten nach Voraussetzung für $t = 0$ in die Numerierungskoordinaten übergehen:

$$(11) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla f(a, b, c, t) = 0\,, \\ \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \boldsymbol{r}')^{-1} \cdot \nabla' f' (a', b', c', t) = 0\,, \\ \text{wenn } t = 0\,,\ a = a',\ b = b',\ c = c', \end{cases}$$

welche zusammen mit (8) die expliziten Grenzflächenbedingungen in der LAGRANGEschen Form darstellen.

Bei einer äußeren, starren Grenzfläche können wir $f' \equiv 0$ setzen und erhalten dann an der Grenzfläche

$$(12) \qquad f(a, b, c, t) = 0$$

die Grenzflächenbedingungen:

$$(13) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla f = 0\,,$$

wo $\partial \boldsymbol{r}'/\partial t$ die vorgeschriebene Geschwindigkeit der starren Grenzfläche senkrecht zu sich selbst ist. Für eine unbewegliche Fläche ist diese gleich Null zu setzen.

Um zur EULERschen Form überzugehen, haben wir in den Gleichungen (1), (2), (4) und (5) $f' \equiv f$ und $\boldsymbol{r}' \equiv \boldsymbol{r}$ zu setzen und die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ und $\boldsymbol{v}' = \dot{\boldsymbol{r}}'$ einzuführen. An einer Grenzfläche

$$(14) \qquad f(x, y, z, t) = 0$$

bestehen folglich die Grenzflächenbedingungen:

$$(15) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla f = 0\,.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen kommen wir auf die Gleichung (6) zurück, die im EULERschen Systeme von (2) und (5) abhängig ist, da hier zwei Systeme von Numerierungskoordinaten zur Charakterisierung der Grenzfläche überflüssig sind.

Wenn die Grenzfläche eine äußere ist, so daß nur auf der einen Seite Flüssigkeit vorhanden ist, so fällt die letztere Gleichung (15) fort. An der Grenzfläche

$$(16) \qquad f(x, y, z, t) = 0$$

ist dann die kinematische Bedingung

$$(17) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f = 0$$

zu erfüllen. Diese Bedingung ist zu verwenden, wenn die Fläche eine beliebig vorgeschriebene Bewegung hat. Ist die Fläche unbeweglich,

so kommt t in (16) nicht vor, und die Gleichung (17) reduziert sich auf:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f = 0\,, \tag{17a}$$

welche aussagt, daß der Geschwindigkeitsvektor die unbewegliche Grenzfläche überall berühren muß.

Die Grenzbedingungen, sowohl in der LAGRANGEschen wie auch in der EULERschen Form, behalten ihre Form bei, wenn man beliebige krummlinige Koordinaten verwendet.

19. Linienintegrale im Bewegungsfelde. Den Unterschied zwischen geometrischen und physikalischen Gebilden haben wir, wenn es sich um Kurven handelt, sprachlich zum Ausdruck gebracht durch die Unterscheidung zwischen Prozession und Zirkulation *längs* der Kurve, wenn diese geometrisch ist, aber *von der Kurve selbst*, wenn sie materiell und bewegt ist (**5**).

Es sei $d\mathbf{r}$ mit den Komponenten dx, dy, dz das Linienelement einer geometrischen Kurve. Das Integral

$$\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \tag{1}$$

ist dann bei offener Kurve die Prozession, bei geschlossener die Zirkulation längs der Kurve. Auf (1) kann man ohne weiteres die lokale Zeitableitung anwenden. Gilt für jede geschlossene Kurve die Relation:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0\,, \tag{2}$$

so ist die Zirkulation längs jeder geschlossenen Raumkurve zeitlich unveränderlich. Nach STOKES' Identität gilt dann für jede beliebige geometrische Fläche, welche die Kurve als Randkurve hat:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \operatorname{curl} \mathbf{v} \cdot d\sigma = 0\,, \tag{3}$$

woraus sich ergibt, da $d\sigma$ von der Zeit unabhängig ist:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{curl} \mathbf{v} = 0\,. \tag{4}$$

Wenn die Bedingung (2) erfüllt ist, hat man also die *lokale Wirbelerhaltung*: das Wirbeln erhält sich an Ort und Stelle unveränderlich, die Wirbellinien bilden ein unveränderliches Kurvensystem und die Wirbelröhren ein unveränderliches Röhrensystem mit zeitlich unveränderlicher Wirbelstärke. Führt man in (2) die lokale Zeitableitung unter dem Integralzeichen aus, so ergibt sich:

$$\int \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} = 0\,. \tag{5}$$

Hieraus folgt, daß ein stationäres Geschwindigkeitsfeld

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

eine hinreichende Bedingung für lokale Wirbelerhaltung ist, aber keine notwendige. In den Fällen aber, wo das Wirbeln das Geschwindigkeitsfeld eindeutig bestimmt, hat man vollkommene Äquivalenz der Bedingungen (4) und (6).

Die Prozession oder die Zirkulation (1) längs einer Kurve kann auch individuell differentiiert werden. $d\boldsymbol{r}$ ist von der Zeit unabhängig, ebenfalls die Grenzen im Falle der offenen Kurve, und wir erhalten:

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int \dot{\boldsymbol{v}}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{7}$$

Wir haben das einfache Resultat: die Beschleunigung der Prozession oder der Zirkulation längs einer geometrischen Kurve ist gleich der Prozession oder der Zirkulation der Beschleunigung längs der Kurve.

Jetzt sei andererseits $\delta\boldsymbol{r}$ mit den Komponenten $\delta x, \delta y, \delta z$ das Vektorlinienelement einer materiellen bewegten Kurve. Die Prozession C_0^1 einer bewegten physischen Kurve mit den materiellen bewegten Endpunkten 0 und 1 wird dann:

$$C_0^1 = \int_0^1 \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}. \tag{8}$$

Für die entsprechende Zirkulation, wenn die Kurve geschlossen ist, wollen wir

$$C = \int \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{9}$$

schreiben. In diesen Integralen ist $\delta\boldsymbol{r}$ ein Vektor, der während der Bewegung der Kurve stetig seine Richtung und Länge ändert. Die individuelle Zeitableitung des Integralelementes $\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}$ ergibt deshalb:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}) = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{r}.$$

Die Operation δ, durch die wir die Kurve zu der Zeit t in Elemente zerlegen, ist aber eine rein geometrische, von der Zeitableitung d/dt unabhängige Operation. Wir können deshalb die Reihenfolge dieser Operationen vertauschen, und da die individuelle Zeitableitung von $\boldsymbol{r}$ die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ist, hat man:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r}) &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{v}\\ &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\delta\boldsymbol{r} + \delta\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right).\end{aligned} \tag{10}$$

Wir können jetzt die individuelle Zeitableitung des Integrales (8) bilden. Die Grenzen 0 und 1 beziehen sich dabei auf unveränderliche materielle Individuen, so daß die Grenzen bei der Differentiation fest

bleiben. Die individuelle Zeitdifferentiation von (8) ergibt deshalb, unter Beachtung von (10):

$$\frac{dC_0^1}{dt} = \int_0^1 \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_1^2 - \boldsymbol{v}_0^2), \tag{11}$$

also ein von (7) wesentlich verschiedenes Resultat: die Beschleunigung der Prozession einer bewegten Kurve ist gleich der Prozession der Beschleunigung, vergrößert um die halbe Differenz der Quadrate der Geschwindigkeiten der Endpunkte.

Geht man aber zur geschlossenen Kurve über, so wird $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_0$, und (11) reduziert sich auf:

$$\frac{dC}{dt} = \int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r}. \tag{12}$$

Dies gibt das wichtige Resultat:

Für eine geschlossene bewegte Kurve ist die Beschleunigung der Zirkulation gleich der Zirkulation der Beschleunigung.

Wenn die Zirkulationsbeschleunigung für eine solche Kurve gleich Null ist:

$$\frac{dC}{dt} = 0, \tag{13}$$

so bewegt sich diese Kurve mit zeitlich unveränderlicher Zirkulation:

$$C = \text{konst.} \tag{14}$$

Gilt eine solche Gleichung für jede geschlossene materielle Kurve im Kontinuum, nur mit einer von Kurve zu Kurve veränderlichen Konstanten, so liegt die *individuelle Erhaltung der Zirkulation* vor. Um ein Bild von dem Charakter dieser Bewegung zu erhalten, braucht man nur zu beachten, daß man die Zirkulation einer geschlossenen Kurve ausdrücken kann als das Produkt der Länge der Kurve mit dem Mittelwert der zur Kurve tangentiellen Geschwindigkeitskomponente. Die Erhaltung der Zirkulation der Kurve sagt also aus, daß sich die mittlere Geschwindigkeit der Kurve längs sich selbst immer umgekehrt wie die Kurvenlänge verändert: wenn die Kurve sich zusammenzieht, nimmt sie größere, wenn sie sich ausdehnt, nimmt sie kleinere Geschwindigkeit längs sich selbst an.

Wenn diese individuelle Erhaltung der Zirkulation besteht, so wird eine Kurve, die einmal die Zirkulation Null hat, immer die Zirkulation Null behalten. Nun hat jede geschlossene Kurve, die auf einer nicht röhrenförmigen Wirbelfläche gelegen ist, nach **5** die Zirkulation Null. Diese Zirkulation Null wird sie dann auch zu allen Zeiten beibehalten, d. h., wenn individuelle Erhaltung der Zirkulation vorliegt, so wird eine materielle Fläche, die einmal eine Wirbelfläche ist, immer eine

Wirbelfläche bleiben. Hieraus folgt, daß eine Wirbellinie als die Schnittlinie zweier Wirbelflächen immer eine Wirbellinie bleiben muß, d. h.:

Wenn individuelle Erhaltung der Zirkulation vorliegt, werden die Teilchen, die einmal eine Wirbellinie bilden, immer eine Wirbellinie bilden.

Da nun die Wandfläche einer Wirbelröhre aus lauter solchen Wirbellinien besteht und jede die Röhre umschließende Kurve dieselbe zeitlich konstante Zirkulation, gleich der Wirbelstärke der Röhre, hat, so folgt weiter:

Wenn individuelle Erhaltung der Zirkulation vorliegt, werden auch die Massen, die einmal eine Wirbelröhre bilden, immer eine Wirbelröhre mit zeitlich unveränderlicher Wirbelstärke bilden.

Man sieht unmittelbar, daß man umgekehrt von diesem Erhaltungssatz zu der Erhaltung der Zirkulation der einzelnen Kurven zurückkommt: es besteht vollständige Äquivalenz zwischen der Erhaltung der Zirkulation bewegter Kurven und der Erhaltung der Wirbelbewegung im Sinne des letzten Satzes.

Die Erhaltung der Wirbelstärke der Röhren verlangt eine Veränderung des Wirbelns oder der Wirbeldichte curl $\boldsymbol{v}$ in umgekehrtem Verhältnis zu dem Querschnitt der elementaren Wirbelröhren. Diese individuelle Wirbelerhaltung hat also intensiveres Wirbeln zur Folge, wenn sich eine Wirbelröhre infolge der Bewegung auf einen kleineren Querschnitt zusammenzieht, dagegen schwächeres Wirbeln, wenn sich dieser Querschnitt ausdehnt. Der durchgreifende Unterschied zwischen individueller und lokaler Wirbelerhaltung ist offensichtlich.

Zuletzt wollen wir in den Linienintegralen die Geschwindigkeit durch die spez. Bewegungsgröße $\bar{\boldsymbol{v}}$ ersetzen, deren gegenseitige Beziehung durch

$$\bar{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} = s\bar{\boldsymbol{v}} \tag{15}$$

gegeben ist. Wir betrachten die Prozession der Bewegungsgröße

$$\bar{C}_0^1 = \int_0^1 \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} \tag{16}$$

und die entsprechende Zirkulation

$$\bar{C} = \int \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} \tag{17}$$

einer materiellen Kurve. Wenn wir die individuelle Zeitableitung dieser Gleichung bilden, so ergibt die Differentiation unter dem Integralzeichen, der Gleichung (10) entsprechend:

$$\frac{d}{dt}(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r}) = \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{dt} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{v}$$

oder, wenn wir (15) benutzen:

$$\frac{d}{dt}(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r}) = q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \frac{dq}{dt}\boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{r} + q\boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{v}$$

$$= q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \frac{dq}{dt}\boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta(\bar{\boldsymbol{v}} s).$$

In dem zweiten Gliede rechts können wir die Kontinuitätsgleichung **17** (9) benutzen, und aus dem letzten Gliede läßt sich ein vollständiges Differential ausscheiden, so daß man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r}) &= q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \delta q + \delta(\tfrac{1}{2} q \boldsymbol{v}^2) \\ &= q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^2 \delta s + \delta(\tfrac{1}{2} s \bar{\boldsymbol{v}}^2)\end{aligned}$$

erhält. Durch Einsetzen in das Integral ergibt sich dann:

$$(18)\quad \begin{cases}\dfrac{d\bar{C}_0^1}{dt} = \displaystyle\int_0^1 q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - \int_0^1 (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - \int_0^1 \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \nabla q \cdot \delta \boldsymbol{r} + \tfrac{1}{2} q_1 \boldsymbol{v}_1^2 - \tfrac{1}{2} q_0 \boldsymbol{v}_0^2 \\ \qquad = \displaystyle\int_0^1 q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - \int_0^1 (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \int_0^1 \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \nabla s \cdot \delta \boldsymbol{r} + \tfrac{1}{2} s_1 \bar{\boldsymbol{v}}_1^2 - \tfrac{1}{2} s_0 \bar{\boldsymbol{v}}_0^2 .\end{cases}$$

Bei der geschlossenen Kurve hat man für die individuelle Zeitableitung der Zirkulation der spez. Bewegungsgröße:

$$(19)\quad \begin{aligned}\frac{d\bar{C}}{dt} &= \int q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - \int (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - \int \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \nabla q \cdot \delta \boldsymbol{r} \\ &= \int q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} - \int (\operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} + \int \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \nabla s \cdot \delta \boldsymbol{r} .\end{aligned}$$

Wenn die Dichte q räumlich und zeitlich konstant ist, $q = q_0$, so fallen die beiden letzten Integrale fort, und nach Division durch den Faktor q_0 kommt man wieder auf die für die Prozession und Zirkulation der Geschwindigkeit gültigen Formeln (11) und (12).

20. Kinematik des stationären zirkularen Wirbels. Als Beispiel für das Vorhergehende wollen wir eine besonders einfache Bewegungsform betrachten, auf die wir oft zurückkommen werden: die Flüssigkeitsteilchen laufen in Kreisbahnen um eine Achse, die z-Achse, mit zeitlich unveränderlichen Geschwindigkeiten, die räumlich nur von dem Radius ϱ und der Höhenlage z der Kreisbahn abhängen. Man hat also einen Wirbel im landläufigen Sinne des Wortes, bestehend aus lauter Parallelkreise, die solidifiiert werden können. Die Kreise verschieben sich längs sich selbst mit einer Winkelgeschwindigkeit ω, d. h. mit einer Peripheriegeschwindigkeit $v = \omega\varrho$ oder mit einer Zirkulation C_p:

$$(1)\qquad C_p = 2\pi\varrho v = 2\omega\pi\varrho^2 .$$

Diese drei Größen sind zeitlich unveränderlich und als Funktionen von ϱ und z nur vom einen Parallelkreis zum anderen verschieden. Aus der stationären Natur der Bewegung folgt nach **19** (4) und (6) die lokale Wirbelerhaltung, nicht aber die individuelle.

Anschauliche Bilder der Bewegung ergeben sich, wenn man in einer Meridionalebene Kurven gleicher Winkelgeschwindigkeit, $\omega(\varrho, z) = \text{konst.}$, oder Kurven gleicher linearer Geschwindigkeit, $v(\varrho, z) = \text{konst.}$, oder

Kurven gleicher Zirkulation der Parallelkreise, $C_p(\varrho, z) =$ konst., zeichnet. Im Raume erzeugen diese meridionalen Kurven Umdrehungsflächen. Die Fläche $\omega(\varrho, z) =$ konst. besteht materiell aus allen Parallelkreisen, die gleiche Winkelgeschwindigkeit, die Fläche $v(\varrho, z) =$ konst. aus allen Parallelkreisen, die gleiche lineare Geschwindigkeit um die Achse haben. Die Fläche $C_p(\varrho, z) =$ konst. besteht materiell aus allen Parallelkreisen, die gleiche Zirkulation haben und deshalb dieselbe Anzahl von Einheits-Wirbelröhren umfassen. Das ringförmige Band zwischen zwei einander beliebig nahe liegenden Parallelkreisen auf der Fläche $C_p =$ konst. wird folglich von keinen Wirbelröhren durchsetzt. Die Fläche $C_p =$ konst. ist also eine von Wirbellinien erzeugte Wirbelfläche. Andererseits haben die in einer Meridionalebene gelegenen geschlossenen Kurven keine Zirkulation, weil die Geschwindigkeit überall zur Kurve senkrecht steht. Die Meridionalebenen werden also auch nicht von Wirbellinien oder Wirbelröhren durchsetzt, und man findet:

Die Wirbellinien im stationären zirkularen Wirbel sind die Schnittlinien der Meridionalebenen mit den Flächen gleicher Zirkulaiion.

Man sieht wieder leicht, daß die ringförmigen Röhren, die durch zwei aufeinanderfolgende Flächen $C_p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ begrenzt werden, Einheits-Wirbelröhren sind. Als Einheits-Wirbelröhren können wir auch solche Röhren verwenden, die von den Flächen $C_p = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ und den angular äquidistanten Ebenen $\psi = 0, 1, 2, \ldots$ begrenzt werden.

Man kann dieses Resultat auch in der folgenden Weise finden. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ im zirkularen Wirbel ist ein flächennormaler Vektor, der sich zweifach lamellar

$$\boldsymbol{v} = \omega \varrho^2 \nabla \psi \tag{2}$$

schreiben läßt. Das Wirbeln dieses Vektors ist:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \nabla(\omega \varrho^2) \times \nabla \psi = \nabla C_p \times \nabla \frac{\psi}{2\pi}, \tag{3}$$

dessen Wirbellinien die zweifach äquiskalaren Kurven $(\omega \varrho^2, \psi)$ sind, d. h. die Schnittlinien der Meridionalebenen mit den Kurven $\omega \varrho^2 =$ konst. oder nach (1) $C_p =$ konst., und dessen Einheits-Wirbelröhren die schon oben angegebenen sind.

Wenn eine der drei Größen ω, v, C_p von der Koordinate z unabhängig ist, sind sie alle drei von z unabhängig und Funktionen nur von ϱ. Dies gibt einen besonders einfachen Wirbeltypus, wo die im allgemeinen Falle verschiedenen Flächen $\omega =$ konst., $v =$ konst., $C_p =$ konst. zusammenfallen. Sie gehen alle in koaxiale Zylinderflächen über, die man sich solidifiiert denken kann, weil sie sich als starre Gebilde in sich selbst verschieben. Die Wirbellinien in diesem Wirbel mit solidifiierbaren Zylinderflächen sind Geraden parallel der Wirbelachse. Diese Wirbel-

linien werden materiell erhalten, denn eine materielle Linie parallel der Wirbelachse bleibt während ihres Umlaufes immer eine Gerade parallel dieser Achse. In dem allgemeinen Wirbel mit den nichtsolidifiierbaren Zylinderflächen hat man dagegen nicht diese materielle Erhaltung der Wirbellinien, weil hier eine materielle Kurve, die in einem Moment in einer Meridionalebene liegt, im nächsten Moment nicht mehr in einer solchen Ebene enthalten sein kann.

Nachdem wir die Einheits-Wirbelröhren $(C_p, \psi/(2\pi))$ kennengelernt haben, wissen wir, daß die Zirkulation C einer ganz beliebigen Raumkurve in der Form

$$C = N\left(C_p, \frac{\psi}{2\pi}\right) \tag{4}$$

geschrieben werden kann, wo die rechte Seite gleich der Anzahl der von der Kurve umfaßten Einheits-Wirbelröhren ist. Um diesen Ausdruck zu diskutieren, führen wir zwei Projektionen der Kurve ein: die *Meridionalprojektion*, die sich ergibt, wenn man die Punkte der Kurve durch Parallelkreise auf eine beliebige Meridionalebene projiziert, und die *Äquatorialprojektion*, wie wir kurz die gewöhnliche orthogonale Projektion auf eine Ebene senkrecht zu der Wirbelachse nennen wollen. Die Meridionalprojektion einer beliebigen bewegten materiellen Kurve ist im zirkularen Wirbel unveränderlich. Nur in der Äquatorialprojektion sieht man die Bewegung sich abspielen. Weiter betrachten wir auf der bewegten Raumkurve „korrespondierende" Elemente, die zwischen einander naheliegenden koaxialen Zylinderflächen enthalten sind. Liegen alle korrespondierenden Elemente in der gleichen Höhe z, ist mit anderen Worten die Meridionalprojektion der Kurve eine Doppelkurve ohne Flächeninhalt, so bewegen sich die korrespondierenden Elemente mit identisch derselben Geschwindigkeit durch identisch dasselbe Feld von elementaren Wirbelröhren. Es folgt, daß die Kurve während ihrer Bewegung immer dieselbe Anzahl von Einheits-Wirbelröhren umfaßt. Oder man findet, gleichviel für den allgemeinen Wirbel mit den nichtsolidifiierbaren Zylinderflächen wie für den speziellen mit den solidifiierbaren Zylinderflächen:

Jede materielle geschlossene Kurve, die in der Meridionalprojektion eine Doppelkurve ohne Flächeninhalt ist, hat zeitlich unveränderliche Zirkulation.

Ein Beispiel sind die Parallelkreise, die einen einzigen Punkt als Meridionalprojektion haben.

Liegen dagegen die korrespondierenden Elemente in verschiedenen Höhen z, d. h. begrenzt die Meridionalprojektion der Kurve ein Flächeninhalt, so laufen die korrespondierenden Elemente in dem allgemeinen Wirbel mit verschiedenen Geschwindigkeiten und durchschneiden dabei verschiedene Felder der elementaren Wirbelröhren. Jedes Element für

sich durchschneidet aber pro Zeiteinheit eine bestimmte Anzahl dieser Röhren. Durch die Bewegung je zweier korrespondierender Elemente wird deshalb die Anzahl der von der ganzen Kurve umschlossenen Einheits-Wirbelröhren pro Zeiteinheit um eine konstante Differenz zu- oder abnehmen. Nur im speziellen Wirbel mit den solidifiierbaren Zylinderflächen bewegen sich die korrespondierenden Elemente mit gleicher Geschwindigkeit durch dasselbe Feld von Wirbelröhren, so daß diese Differenz Null wird. Es folgt:

Eine beliebige geschlossene materielle Kurve, die in der Meridionalprojektion einen von Null verschiedenen Flächeninhalt begrenzt, hat im allgemeinen Wirbel mit den nichtsolidifiierbaren Zylinderflächen eine Zirkulation, die linear von der Zeit abhängt, im speziellen Wirbel mit den solidifiierbaren Zylinderflächen dagegen zeitlich unveränderliche Zirkulation.

Im letztgenannten speziellen Wirbel werden deshalb Zirkulationsbeschleunigungen überhaupt nicht vorkommen. Im allgemeinen Wirbel hat man dagegen eine von Null verschiedene, zeitlich konstante Zirkulationsbeschleunigung für alle solche Kurven, die in ihrer Meridionalprojektion einen Flächeninhalt begrenzen; und zwar ist diese Zirkulationsbeschleunigung identisch gleich derjenigen dieser Meridionalprojektion. Diese findet man leicht, indem man das Linienintegral der Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}}$ der einzelnen Punkte dieser Kurve bildet. Diese Beschleunigung ist die reine Zentripetalbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}} = -\omega^2 \boldsymbol{\varrho}$; das negative Vorzeichen tritt auf, weil ϱ von der Rotationsachse nach außen positiv gerechnet wird. Diese Beschleunigung hat aber die Zylinderflächen als Normalflächen und läßt sich als zweifach lamellarer Vektor

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\omega^2 \boldsymbol{\varrho} = \omega^2 \nabla(-\tfrac{1}{2}\varrho^2) \tag{5}$$

schreiben. Diese lineare Beschleunigung gibt für geschlossene Kurven die Zirkulationsbeschleunigung:

$$\frac{dC}{dt} = \int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot d\boldsymbol{r} = N\left(\omega^2, -\frac{1}{2}\varrho^2\right), \tag{6}$$

und im Infinitesimalen hat man die entsprechende *rotatorische Beschleunigung* um die Tangenten der Parallelkreise als Achsen:

$$\operatorname{curl} \dot{\boldsymbol{v}} = \nabla(\omega^2) \times \nabla(-\tfrac{1}{2}\varrho^2) = \nabla(\omega^2) \times (-\boldsymbol{\varrho}) . \tag{7}$$

Die Flächenscharen $\omega^2 = 0, 1, 2, \ldots$ und $\frac{1}{2}\varrho^2 = 0, 1, 2, \ldots$ geben also ein vollständiges Bild der zirkulatorischen oder der rotatorischen Beschleunigungen im zirkularen Wirbel.

In dem speziellen zirkularen Wirbel, wo die Zylinderflächen solidifiierbar sind und ω eine Funktion nur von ϱ ist, artet die Zentripetalbeschleunigung (5) in einen einfach lamellaren Vektor mit einem Aszendentenpotential χ aus:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \nabla\chi , \tag{8}$$

wo $\chi = -\int \omega^2 \varrho \, d\varrho$. Die Zentrifugalkraft pro Masseneinheit $-\dot{\boldsymbol{v}}$ hat dann dieses χ als Gradientenpotential, $-\dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla\chi$, und den speziellen Wirbel mit den solidifiierbaren Zylinderflächen kann man auch als einen Wirbel mit potentieller Verteilung der Zentrifugalkraft bezeichnen.

Schreibt man die Komponenten des Vektorproduktes (7) auf, so findet man die Werte Null längs ϱ und z und längs der Parallelkreise eine Komponente mit dem absoluten Betrag:

$$|\operatorname{curl} \dot{\boldsymbol{v}}| = \frac{\partial(-\omega^2 \varrho)}{\partial z} \tag{9}$$

Die rotatorische Beschleunigung im stationären zirkularen Wirbel ist also ihrem Betrage nach gegeben durch den Betrag der Änderung der Zentripetalbeschleunigung $-\omega^2 \varrho$ *pro Längeneinheit parallel der Wirbelachse.*

Im speziellen Wirbel mit den solidifiierbaren Zylinderflächen fallen die beiden Flächenscharen für konstantes ω^2 und konstantes $\frac{1}{2}\varrho^2$ zusammen. Die zirkulatorische Beschleunigung wird dann Null für die geschlossene materielle Kurve, mit dem Resultat, daß sie sich mit zeitlich unveränderlicher Zirkulation bewegt:

$$\frac{dC}{dt} = 0\,, \qquad C = \text{konst.}\,, \tag{10}$$

wie schon oben gefunden. Die rotatorische Beschleunigung (7) wird Null, weil die beiden Vektorfaktoren keinen Winkel mehr miteinander bilden. Die rechte Seite von (9) verschwindet, woraus folgt, daß in diesem speziellen Wirbel die Zentrifugalkräfte in gleichem Abstande von der Wirbelachse gleich groß sind.

Von diesem speziellen zirkularen Wirbel werden wir im folgenden drei Typen besonders zu betrachten haben:

(I) *Die Zirkulation der Parallelkreise nimmt mit dem Abstande* ϱ *von der Achse zu.* Nach dem Vektorproduktgesetz (3) hat dann das Wirbeln $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$ dasselbe Vorzeichen wie der allgemeine Umlauf im Wirbel. Wenn die allgemeine Wirbelachse nach oben zeigt, haben die Wirbellinien auch ihre positive Richtung nach oben.

(II) *Die Parallelkreise haben in allen Abständen* ϱ *von der Achse dieselbe Zirkulation.* Es ist dann der Vektor $\nabla C_p = 0$, und das Wirbeln $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$ ist identisch Null. Dies ist der bekannte Fall der *wirbelfreien Zirkulation* um die z-Achse. Es gibt in diesem Falle keine Wirbellinien, abgesehen von der z-Achse, die aber eine zu Linie entartete singuläre Wirbelröhre mit der endlichen Wirbelstärke C_p ist. Da sich in diesem Falle die lineare Geschwindigkeit wie ϱ^{-1} ändert, hat dieser Wirbel in der Nähe der Achse keine physikalische Realität.

(III) *Die Parallelkreise haben nach außen abnehmende Zirkulation.* In diesem Falle sind die Wirbellinien nach unten gerichtet, wenn der all-

gemeine Umlauf durch einen nach oben zeigenden Vektor dargestellt wird. Auch dieser Wirbel verliert in der Nähe der Achse seine physikalische Realität.

21. Der stationäre zirkulare Wirbelring. Der stationäre Wirbel besteht aus lauter Parallelkreisen, die sich längs sich selbst mit Peripheriegeschwindigkeiten verschieben, die von den Koordinaten ϱ und z abhängen. Wir wollen noch eine Bewegungsform betrachten, die sich als eine Bewegung materieller Parallelkreise beschreiben läßt. Die Kreise sollen sich aber nicht mehr längs sich selbst verschieben, sondern sie sollen Radius ϱ und Höhenlage z in solcher Weise verändern, daß ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Meridionalebene eine stationäre zirkulierende Bewegung ausführen. Um uns ein Bild der Bewegung zu verschaffen, können wir deshalb in einer beliebigen Meridionalebene das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\varrho, z)$ durch Stromlinien und Kurven gleicher Skalarwerte der Geschwindigkeit darstellen. Wegen der stationären Natur der Bewegung sind die Stromlinien zugleich die Bahnen der Teilchen, und diese Stromlinien oder Bahnen sind voraussetzungsgemäß in sich zurücklaufende Kurven.

Diese in sich zurücklaufenden Kurven sind die Profilkurven von Umdrehungsflächen, die in sich zurücklaufende Röhren definieren. Diese Röhren sind Wirbelröhren des Feldes, und die Parallelkreise sind die Wirbellinien. Wir werden diese neue Bewegungsform den zirkularen Wirbelring nennen. Das bekannteste Beispiel ist der Rauchring, dessen Stromlinien identisch sind mit den Kraftlinien eines elektrischen Kreisstromes. Wir werden aber den Namen zirkularer Wirbelring benutzen ganz unabhängig von der Form der geschlossenen Stromlinien in der Meridionalebene.

Während man sehr leicht analytische Ausdrücke aufschreiben kann, die zirkulare Wirbel darstellen — man braucht nur irgendeine Funktion $v(\varrho, z)$; $\omega(\varrho, z)$ oder $C_p(\varrho, z)$ hinzuschreiben —, so findet man nicht so einfach analytische Ausdrücke, die beliebige zirkulare Wirbelringe darstellen. Es ist aber wichtig zu beachten, daß man durch irgendeine Funktion von ϱ und z ein beliebiges Wirbelfeld darstellen kann, das dem zirkularen Wirbelring angehört und das Geschwindigkeitsfeld dieses Wirbelringes, gegebenenfalls unter Berücksichtigung von Grenzflächenbedingungen, eindeutig bestimmt.

Im übrigen sind der zirkulare Wirbel und der zirkulare Wirbelring einander in mehrfacher Hinsicht analog. Wie im zirkularen Wirbel, so ist auch im zirkularen Wirbelring die Geschwindigkeit ein flächennormaler Vektor. Denn zu den in den Meridionalebenen verlaufenden Stromlinien kann man immer Normalkurven $\alpha(\varrho, z)$ legen, und die entsprechenden Umdrehungsflächen sind Normalflächen zu dem Ge-

schwindigkeitsvektor. Dann läßt sich noch eine Funktion $\beta(\varrho, z)$ bestimmen, so daß man die Geschwindigkeit in der doppelt lamellaren Form

$$v = \beta \nabla\alpha \tag{1}$$

darstellen kann. Ist diese Darstellungsform gefunden, so stellt

$$\operatorname{curl} v = \nabla\beta \times \nabla\alpha \tag{2}$$

das Wirbeln dar, und die Flächen $\beta = 0, 1, 2, \ldots, \alpha = 0, 1, 2, \ldots$ geben die Einheits-Wirbelröhren.

Da jede Wirbellinie ein Parallelkreis ist und ein solcher immer aus denselben materiellen Teilchen besteht, hat man im allgemeinen zirkularen Wirbelring materielle Erhaltung von Wirbellinien und Wirbelröhren, während dies nur in einem zirkularen Wirbel spezieller Natur der Fall war.

Das kinematische Resultat der Zusammensetzung eines zirkularen Wirbels mit einem zirkularen Wirbelring überblickt man leicht. Die Gesamtbewegung läßt sich fortwährend durch die Bewegung materiell erhaltener Kreise beschreiben, die jetzt eine dreifache Bewegung haben, indem sie gleichzeitig Radius ϱ und Höhenlage z verändern und längs sich selbst gleiten. Die Stromlinien gehen in schraubenförmige Linien über, die auf den röhrenförmigen Umdrehungsflächen gelegen sind, welche die geschlossenen Stromlinien des Wirbelringes als Profilkurven haben. Je nach der Umlaufsrichtung längs der Parallelkreise im zirkularen Wirbel und längs der geschlossenen Stromlinien des Wirbelringes ergeben sich Linien von Rechts- oder Links-Schraubencharakter mit Steighöhen, die von den beiden Umlaufsgeschwindigkeiten abhängen.

Die Wirbellinien, die im zirkularen Wirbelring Kreise waren, und im zirkularen Wirbel Schnittlinien der Meridionalebenen mit den Umdrehungsflächen $C_p =$ konst., gehen bei der Zusammensetzung in Kurven über, die schraubenlinienartig auf den Umdrehungsflächen $C_p =$ konst. verlaufen, und zwar wie schraubenförmige Linien auf koaxialen Zylinderflächen, wenn der zirkulare Wirbel von dem speziellen Typus mit solidifiierbaren Zylinderflächen war.

22. Kinematik der Schwingungen und Wellen. Ein Punkt laufe auf einer Kreisbahn vom Radius A mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ν herum. Liegt die Kreisbahn in der xz-Ebene, hat sie den Koordinatenanfangspunkt $x = 0$, $z = 0$ als Mittelpunkt und ist die Umlaufsrichtung um die y-Achse positiv nach der Rechtsschraubenregel, so wird die Bewegung längs den beiden Achsen durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = A\cos(\nu t + \varphi), \\ z = -A\sin(\nu t + \varphi) \end{cases} \tag{1}$$

dargestellt, beide mit gleicher *Amplitude* A und gleichem *Phasenwinkel* φ. Die Winkelgeschwindigkeit ν heißt die *Schwingungsfrequenz* der beiden Schwingungen, die Umlaufszeit in der Kreisbahn heißt die *Schwingungsdauer* oder die *Periode* und ist durch

$$T = \frac{2\pi}{\nu} \tag{2}$$

gegeben.

Sind die beiden Amplitudenfaktoren verschieden, aber die Phasenwinkel gleich:

$$\begin{cases} x = A \cos(\nu t + \varphi)\,, \\ z = -C \sin(\nu t + \varphi)\,, \end{cases} \tag{3}$$

so wird die Bahn die Ellipse:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1\,, \tag{4}$$

deren Achsen zu den Koordinatenachsen parallel sind. Bei verschiedenen Phasenwinkeln ergibt sich als Bahn auch eine Ellipse, deren Hauptachsen aber schief zu den Koordinatenachsen liegen.

Wenn sämtliche Punkte, die im Gleichgewichtszustand die Abszissenachse bilden, elliptische Umläufe (3) um ihre Gleichgewichtslagen als Mittelpunkt ausführen, und wenn ihre Phasenwinkel proportional der Länge a längs dieser Achse sind, $\varphi = \pm \mu a$, so hat man eine zusammengesetzt longitudinale und transversale Welle, die sich längs dieser Achse fortpflanzt. Bei positiver Fortpflanzungsrichtung können wir

$$\begin{cases} x = A \cos(\mu a - \nu t)\,, \\ z = C \sin(\mu a - \nu t) \end{cases} \tag{5}$$

schreiben. μ ist die *Wellenzahl*, und für die Wellenlänge L, die Periode T und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ hat man:

$$L = \frac{2\pi}{\;} \qquad T = \frac{2\pi}{\;} \qquad \tilde{\omega} = \frac{L}{T} = \frac{\nu}{\mu}\,. \tag{6}$$

Bei $C = 0$ sind die Wellen reine Longitudinalwellen, die elliptischen Bahnen sind zu geraden Linienstücken in der Fortpflanzungsrichtung entartet. Bei $A = 0$ hat man reine Transversalwellen, die Ellipsen sind zu Linienstücken quer zu der Fortpflanzungsrichtung entartet.

Von den Koordinaten (5) der schwingenden Teilchen gelangt man durch Zeitdifferentiation zu den entsprechenden Geschwindigkeiten:

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu A \sin(\mu a - \nu t)\,, \\ \dot{z} = -\nu C \cos(\mu a - \nu t)\,. \end{cases} \tag{7}$$

Zwei sonst identische Wellenzüge (5), die sich in entgegengesetzten Richtungen fortpflanzen, setzen sich zu stehenden Schwingungen zusammen:

$$\begin{cases} x = A \cos(\mu a - \nu t) + A \cos(\mu a + \nu t) = 2A \cos\mu a \cos\nu t\,, \\ y = C \sin(\mu a - \nu t) + C \sin(\mu a + \nu t) = 2C \sin\mu a \cos\nu t\,. \end{cases} \tag{8}$$

Jede Fortpflanzung hat aufgehört, und die Bahnen der Teilchen sind gerade Linienstücke, parallel der Abszissenachse im Falle der reinen Longitudinalschwingungen $C = 0$, quer zu dieser Achse im Falle der reinen Transversalschwingungen $A = 0$, und Linienstücke, die periodisch alle Richtungen durchlaufen, bei den zusammengesetzt longitudinalen und transversalen Schwingungen.

Die Geschwindigkeiten bei den stehenden Schwingungen sind:

$$(9) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -2A\nu \cos\mu a \sin\nu t, \\ \dot{z} = -2C\nu \sin\mu a \sin\nu t. \end{cases}$$

In der Abb. 3 sind oben die Wellen veranschaulicht durch die Kreisbahnen, die Lagen der Punkte in diesen Bahnen zu einer bestimmten

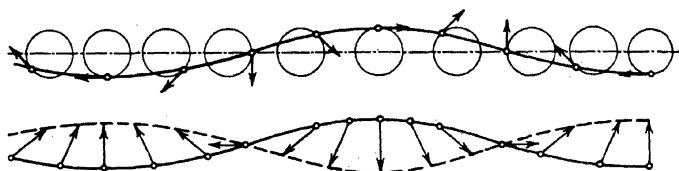



Abb. 3. Sich fortpflanzende Wellen (oben), und stehende Schwingungen (unten).

Zeit t und die Vektoren, welche die Geschwindigkeiten der Punkte zu dieser Zeit darstellen. Endlich ist die wellenförmige Kurve gezeichnet, welche die verschobenen Teilchen verbindet. Unten in derselben Abbildung sind die stehenden Schwingungen veranschaulicht durch die geradlinigen Bahnen, die Lagen der Punkte in diesen Bahnen zu einer bestimmten Zeit t und die Vektoren, die die Geschwindigkeiten der Punkte zu dieser Zeit darstellen. Endlich ist auch hier die wellenförmige Kurve gezeichnet, welche die verschobenen Teilchen verbindet. Man sieht die vollständige Übereinstimmung in der Verteilung der Geschwindigkeitspfeile in den beiden Abbildungen, nur sind einander entsprechende Pfeile um eine viertel Wellenlänge verschoben relativ zu der Kurve, die den Abstand der Punkte von der Abszissenachse angibt: *Bei den Wellen hat man die horizontalen Geschwindigkeitspfeile in Wellenberg und Wellental, die vertikalen in mittlerer Höhe. Bei den stehenden Schwingungen ist es umgekehrt.*

Schließlich denken wir uns, daß die Amplituden A und C Funktionen der Vertikalkoordinate c sind:

$$(10) \qquad A = A(c), \quad C = C(c).$$

Für jede Horizontallinie $c =$ konst. erhält man dann ein Geschwindigkeitsbild wie in Abb. 3, wodurch sich ein vollständiges Stromlinienbild

in der Vertikalebene ergibt. Die Gleichungen 2 (1) der Stromlinien im Falle der sich fortpflanzenden Wellen werden nach (7), indem man x, z durch a, c, und v_x, v_z durch $\dot{x}, \dot{z}$ ersetzt:

$$(11) \qquad \frac{da}{A\sin(\mu a - \nu t)} = -\frac{dc}{C\cos(\mu a - \nu t)}.$$

Die Variablen lassen sich sofort trennen und die Integration führt zu einer Gleichung der Form:

$$(12) \qquad \psi(c)\sin(\mu a - \nu t) = K,$$

wo man die Funktion $\psi(c)$ durch die Quadratur

$$(13) \qquad \psi(c) = e^{\int \frac{A}{C}\mu\, dc}$$

findet. Die Gleichung (12) gibt das Stromliniensystem zu einer beliebigen Zeit t, und dieses Stromliniensystem pflanzt sich mit den Wellen mit der Geschwindigkeit $\bar{\omega}$ unverändert fort.

Um das Stromliniensystem zu diskutieren, bemerken wir, daß die Werte $K = 0$ und $K = \infty$ der Konstanten K in der Gleichung (12) ein rechteckiges Netz von geraden Stromlinien geben, das auch den allgemeinen Verlauf der krummen Stromlinien festlegt.

Dem Parameterwert $K = 0$ entspricht zunächst immer eine Lösung, nämlich:

$$(14) \qquad \sin(\mu a - \nu t) = 0, \qquad \text{d. h.} \qquad a = \frac{\nu}{\mu}t + n\frac{L}{2}.$$

Dies gibt gerade vertikale Stromlinien — die Linien der Horizontalbewegung Null —, die sich im Abstand einer halben Wellenlänge folgen und das Wellenprofil in halber Höhe treffen.

Ferner gibt $K = 0$ eine Lösung $c =$ konst., d. h. eine gerade horizontale Stromlinie, für jeden Nullpunkt der Funktion $\psi(c)$, und $K = \infty$ gibt eine Lösung $c =$ konst., d. h. eine gerade horizontale Stromlinie, für jeden Pol der Funktion $\psi(c)$.

Diese horizontalen Stromlinien bilden zusammen mit den vertikalen (14) ein rechteckiges Netz mit zweierlei Schnittpunkten: entweder zwischen zwei Geraden $K = 0$ oder zwischen einer Geraden $K = 0$ und einer $K = \infty$. Die Schnittpunkte zwischen zwei Geraden $K = 0$ sind hyperbolische Punkte oder Sattelpunkte des Stromliniensystems: durch einen solchen Punkt gehen nur die beiden Geraden $K = 0$, und in unmittelbarer Nähe verlaufen die anderen Stromlinien angenähert wie Hyperbeln mit den erwähnten Geraden als Asymptoten. Die Schnittpunkte einer Geraden $K = 0$ mit einer Geraden $K = \infty$, die einer außerwesentlichen Singularität entspricht, sind Knotenpunkte, durch die alle Kurven mit Parameterwerten zwischen 0 und ∞ hindurchgehen müssen, indem sie im allgemeinen alle entweder die vertikale oder die

horizontale gerade Stromlinie berühren. Wir erhalten in dieser Weise vier Typen von Stromlinien (Abb. 4), die wir zur Abkürzung im folgenden gleich mit Namen belegen wollen:

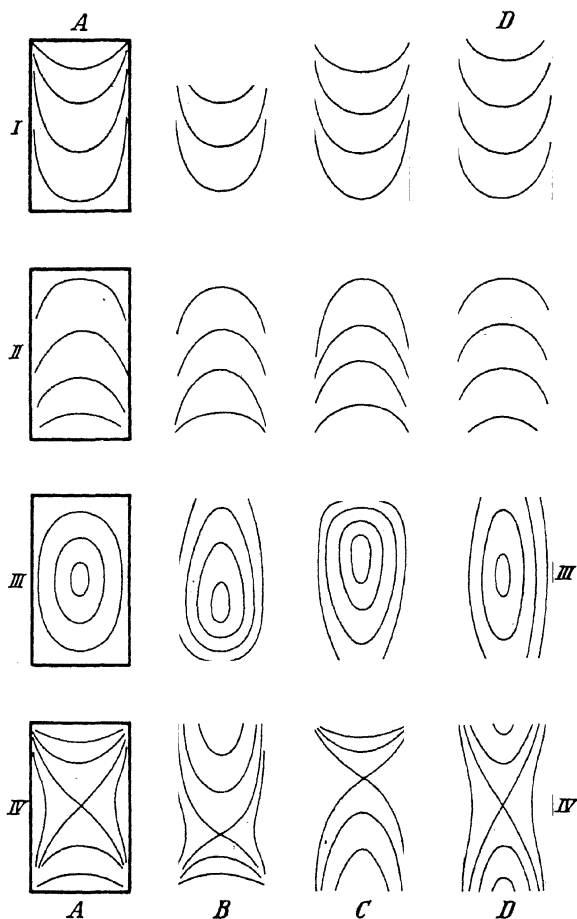



Abb 4. Typen von Stromlinienbildern.

I. *Konkav-parabolische Stromlinien:* Die obere horizontale Seite des Rechteckes ist eine Gerade $K = \infty$, die untere eine Gerade $K = 0$. Man hat oben zwei Knotenpunkte, von denen die Stromlinien parabelähnlich oder kettenlinienähnlich herunterhängen, indem sie hier im allgemeinen entweder die beiden vertikalen Seiten des Rechtecks (I A) oder die horizontale Seite berühren. Speziell kann das Rechteck unendlich

hoch werden, d. h. oben offen (I B) oder unendlich tief, d. h. unten offen (I C) oder gleichzeitig unendlich hoch und tief, d. h. sowohl oben wie unten offen (I D).

II. *Konvex-parabolische Stromlinien:* Die obere horizontale Stromlinie ist eine Linie $K = 0$, die untere eine $K = \infty$. Man hat genau dieselben Stromlinien wie im vorigen Falle, nur spiegelbildlich umgelegt, so daß sämtliche Kurven konvex erscheinen.

III. *Elliptische Stromlinien:* Beide horizontalen Seiten des Rechteckes sind Stromlinien $K = 0$. Sämtliche Stromlinien verlaufen dann geschlossen innerhalb des Rechteckes und umgeben einen elliptischen Punkt, wo die Stromlinie zu einem Punkt zusammengeschrumpft ist. Wieder gibt es die Grenzfälle, daß entweder die obere Seite des Rechteckes ins Unendliche rückt (III B) oder die untere (III C) oder auch beide zugleich (III D).

IV. *Hyperbolische Stromlinien:* Beide horizontalen Stromlinien sind Geraden $K = \infty$. Alle vier Ecken sind Knotenpunkte, durch die eine unendliche Anzahl von Stromlinien geht, indem sie im allgemeinen in jedem Knoten eine und dieselbe Seite des Rechteckes berühren. Innerhalb des Rechteckes befindet sich ein hyperbolischer Punkt, wo sich zwei Äste einer singulären Stromlinie schneiden (IV A). Schließlich kann auch in diesem Falle entweder die obere Seite des Rechteckes ins Unendliche rücken (IV B) oder die untere (IV C) oder auch beide gleichzeitig (IV D).

Es ist wichtig, die Lage des neutralen Punktes. d. h. des elliptischen Punktes im Falle III und des hyperbolischen im Falle IV, bestimmen zu können. Da in diesem Punkte die Bewegung Null ist, hat man hier die Horizontalamplitude Null. Das Niveau c_A dieses Punktes und dadurch auch aller Punkte der Horizontalamplitude Null findet man also, indem man die Gleichung

$$A(c_A) = 0 \tag{15}$$

nach c_A auflöst.

Drittes Kapitel.

Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen.

23. Die physikalischen Variablen. Zu den kinematischen Variablen für die Darstellung der Bewegung haben wir jetzt diejenigen Variablen hinzuzufügen, die nach LAGRANGE den physikalischen Zustand des numerierten Teilchens a, b, c, nach EULER den physikalischen Zustand im Raumpunkte x, y, z angeben sollen.

Den Begriff des Zustandes fassen wir im thermodynamischen Sinne des Wortes auf. Jedes im unendlich kleinen homogenen Massenelement dm der Flüssigkeit verhält sich wie die arbeitende Substanz unter dem Kolben in einer thermodynamischen Maschine, und es kommen drei Zustandsvariablen, Volumen $d\tau$, Druck p und Temperatur θ, in Anwendung. Das konkrete Volumen $d\tau$ ersetzen wir aber am bequemsten entweder durch das auf die Einheit der Masse bezogene *spezifische Volumen* $s = d\tau/dm$ oder durch dessen Reziprokwert, die *Dichte* $q = dm/d\tau$. Jede dieser Größen

$$q = \frac{1}{s}, \qquad s = \tag{1}$$

können wir mit gleichem Recht als *Massenvariable* zur Darstellung des Massenfeldes verwenden. Da sich bald die eine und bald die andere als die bequemere erweist, werden wir oft ohne weiteres von der einen zu der anderen übergehen oder in demselben Gleichungssystem die eine neben der anderen verwenden. Für die auftretenden Differentiationen merken wir uns:

$$dq = -\frac{ds}{s^2}, \qquad ds = -\frac{dq}{q^2} \tag{2}$$

und entsprechende Formeln, wo dq und ds durch Ableitungen von q und s ersetzt sind. Besonders nützlich wird gelegentlich die Formel

$$\frac{\dot{q}}{q} = -\frac{\dot{s}}{s} \tag{2'}$$

sein.

Das Massenfeld können wir folglich in zweierlei Weisen darstellen, durch die *isosteren* Flächen, d. h. Flächen gleichen spez. Volumens, oder die *äquidensen* Flächen, d. h. Flächen gleicher Dichte. Da die Massenvariablen s und q homotrop sind, handelt es sich um dasselbe Flächensystem, deren einzelne Flächen aber verschieden numeriert werden, je nachdem ob sie die eine oder die andere Massenvariable darstellen sollen. Wenn wir offen lassen, welche Massenvariable angewendet werden, werden wir die Äquiskalarflächen des Massenfeldes *äquisubstantielle* Flächen nennen.

Zwischen unseren drei Zustandsvariablen

$$\left.\right\}, \quad p, \quad \theta \tag{3}$$

besteht eine Relation, die man durch Versuche mit jedem einzelnen Teilchen findet. Da die Teilchen eines flüssigen Systems chemisch verschieden sein können, wird diese Zustandsgleichung im allgemeinen Parameter enthalten, die von Teilchen zu Teilchen verschieden sind. Die Gleichung wird also von der Form

$$\chi(s, p, \theta, A, B, \ldots) = 0 \tag{4}$$

sein, wo $A, B, \ldots$ diese Parameter sind. In einem Medium wie das Meer stellt der Parameter A den variablen Salzgehalt der verschiedenen Teilchen dar. In Gasgemischen wie die Sonne oder die Fixsterne beziehen sich $A, B, \ldots$ auf die variablen Anteile verschiedener Elemente oder verschiedener chemischer Verbindungen. In der Atmosphäre ist besonders der Gehalt an Wasserdampf wichtig, der von Masse zu Masse bedeutende Schwankungen aufweisen kann.

Wenn man auf Heterogenitäten dieser Art im flüssigen System Rücksicht zu nehmen hat, kommt ein wesentlicher Vorteil des LAGRANGEschen Systems gegenüber dem EULERschen zum Vorschein. Im LAGRANGEschen System kann man nämlich die Parameter $A, B, \ldots$ einfach als Funktionen der Numerierungskoordinaten darstellen:

$$A = A(a, b, c), \quad B = B(a, b, c), \ldots \tag{5}$$

Im EULERschen dagegen haben wir keine Variablen, um eine Individualisierung für die verschiedenen Teilchen der Flüssigkeit zum Ausdruck zu bringen. Hier steht deshalb nur ein Weg offen. Da die Gleichung (4) für ein und dasselbe Individuum gilt, können wir sie individuell nach der Zeit differentiieren:

$$\frac{\partial \chi}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial \chi}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial \chi}{\partial \theta}\dot{\theta} = 0. \tag{6}$$

Kommt hier nur *ein* Parameter A vor, so kann man ihn aus (4) und (6) eliminieren. Kommen zwei Parameter vor, so muß man die Gleichung (6) noch einmal differentiieren, um eliminieren zu können usw. Während man im LAGRANGEschen System immer die Zustandsgleichung in endlicher Form behält, muß man im EULERschen System im allgemeinsten Falle mit einer Zustandsgleichung in Differentialform

$$\varphi(s, p, \theta, \dot{s}, \dot{p}, \dot{\theta}, \ddot{s}, \ddot{p}, \ddot{\theta}, \ldots) = 0 \tag{7}$$

rechnen. Die Vorteile, die das EULERsche System bei hinlänglich einfachen flüssigen Systemen unstreitig hat, gehen deshalb bei mehr zusammengesetzten Systemen verloren.

Für die Zustandsgrößen s, p, θ jedes Massenteilchens gilt, neben der Zustandsgleichung, der erste Hauptsatz der Thermodynamik, der das Prinzip von der Erhaltung der Energie zum Ausdruck bringt:

$$dw = de + p\,ds. \tag{8}$$

Wenn alles auf die Einheit der Masse bezogen wird, stellt hier $p\,ds$ die elementare Arbeit dar, die das Teilchen durch seine Ausdehnung leistet, e die innere Energie des Teilchens, die eine Funktion der drei Zustandsvariablen s, p, θ ist und dw die während der unendlich kleinen Zustandsänderung zugeführte Wärmemenge.

Diese Wärmemenge ist, im Gegensatz zu e, nicht eine Zustandsgröße, d. h. eine Funktion der Zustandsvariablen s, p, θ. Will man deshalb diese Größe in das Problem hineinziehen, so muß man weitere Variable für die Darstellung der Wärmeleitung und der Wärmestrahlung usw. einführen, und für jede neue Variable muß man eine weitere neue Gleichung suchen. Bei starker Strahlung wie in Sonnen und Fixsternen wäre der Druck p in der obigen Gleichung (8) und den hydrodynamischen Gleichungen noch durch den Strahlungsdruck zu ergänzen.

An diese großen Verallgemeinerungen werden wir aber hier nicht denken. Wir begrenzen das Problem, *indem wir die zugeführte Wärmemenge immer als eine gegebene Größe betrachten.*

Die Differentiale in der Gleichung (8) beziehen sich auf die Änderungen, die man an einem bewegten materiellen Teilchen beobachtet. Durch Division mit dem Zeitelemente dt erhält man deshalb die entsprechenden individuellen Zeitableitungen, also:

$$\dot{w} = \dot{e} + p\dot{s}. \tag{9}$$

In dieser Form geschrieben, fügt sich die Gleichung zwanglos in das LAGRANGEsche wie in das EULERsche System ein: die durch den Punkt symbolisierte Zeitableitung ist im LAGRANGEschen System die partielle, die bei konstant gehaltenen Werten der anderen unabhängigen Variablen a, b, c gebildet wird, und im EULERschen System die zusammengesetzte individuelle Zeitableitung **17** (5).

Die durch die Zustandsgleichung (4) und die Energiegleichung (9) bestimmten Zustandsänderungen des bewegten Teilchens kann man in der gewöhnlichen Weise in dem CLAPEYRONschen thermodynamischen Diagramm veranschaulichen, wo man das spez. Volumen s auf der Abszissenachse, den Druck auf der Ordinatenachse aufträgt. Wir werden nur insofern von der üblichen Darstellungsweise abweichen, als wir die Drucke längs der Ordinatenachse *nach unten* zunehmen lassen, entsprechend dem nach unten zunehmenden Druck in der Atmosphäre. Jeder Punkt in diesem Diagramm vertritt einen Zustand des bewegten Teilchens. Während sich das Teilchen im Raume bewegt, bewegt sich der vertretende Punkt im Diagramm und beschreibt eine Kurve, welche die durchlaufenen Zustände angibt. Jedesmal wenn diese Kurve eine geschlossene Schleife gebildet hat, ist eine gewisse Wärmemenge in Arbeit umgesetzt worden, welche durch den Flächeninhalt der Schleife numerisch gegeben ist. Die Umsetzung ist algebraisch zu verstehen, ihr Vorzeichen ist durch die Umlaufsrichtung auf der Kurve bestimmt. Mit dem nach unten zunehmenden Druck wird die positive Umlaufsrichtung die entgegengesetzte von der gewöhnlichen, aber Ausdruck desselben physikalischen Gesetzes: es wird Wärme in Arbeit

umgesetzt, wenn die Erwärmung des Teilchens bei großem und die Abkühlung bei kleinem Druck stattfindet, dagegen Arbeit in Wärme, wenn die Erwärmung des Teilchens unter kleinem und die Abkühlung unter großem Druck stattfindet.

24. Piezotropie, Barotropie, Autobarotropie. Wenn in der Gleichung **23** (8) $dw = 0$ ist, so daß

$$de + p\,ds = 0 \tag{1}$$

wird, verlaufen alle Zustandsänderungen *adiabatisch*. Diese Gleichung (1) läßt sich mit Hilfe von **23** (4) integrieren. Man erhält zwei endliche Gleichungen für die drei Zustandsvariablen, aus denen man eine von diesen eliminieren kann. Dies gibt eine Zustandsgleichung mit nur zwei Variablen, etwa p und s. Als Parameter kommt aber in dieser Gleichung zu den früheren $A, B, \ldots$ noch eine *Integrationskonstante* hinzu, das Anfangsvolumen s_0 oder die Anfangstemperatur θ_0, die einem gewissen Anfangsdrucke p_0 entspricht. Dieser neue Parameter kann, wie $A, B, \ldots$, von Teilchen zu Teilchen verschieden sein. Die neue speziellere Zustandsgleichung wird also von der Form

$$\chi(p, s, s_0, A, B, \ldots) = 0 \tag{2}$$

sein, mit einer Variablen weniger und einem Parameter mehr als die ursprüngliche allgemeine Zustandsgleichung.

Jede beliebige Zustandsgleichung (2), die außer dem Druck nur noch *eine* andere Zustandsvariable enthält, werden wir eine Gleichung der *Piezotropie* nennen. Sie sagt aus, daß der Zustand des Teilchens durch den Druck allein gegeben ist. Eine Flüssigkeit werden wir dann *piezotrop* nennen, wenn sämtliche Teilchen diese Eigenschaft haben. Die piezotrope Flüssigkeit hat nicht mehr die Fähigkeit, als arbeitende Substanz in einer thermodynamischen Maschine zu dienen. Die Theorie der piezotropen Flüssigkeiten wird deshalb *reine Hydrodynamik*, wo thermodynamische Vorgänge höchstens als Begleiterscheinungen auftreten und nie die primären Ursachen der Bewegungen sind, wie dies sooft in der *physikalischen Hydrodynamik* der Fall ist.

Wir können die Piezotropiegleichung (2) nach der Dichte $q = 1/s$ auflösen:

$$q = q(p, q_0, A, B, \ldots). \tag{3}$$

Die Differentiation nach p ergibt dann eine Größe, die wir den *Piezotropiekoeffizienten* der Dichte nennen wollen:

$$\gamma = \left(\frac{dq}{dp}\right)_{Ph} = -\frac{1}{s^2}\left(\frac{ds}{dp}\right)_{Ph}. \tag{4}$$

Diese Größe gibt die Dichtezunahme des Teilchens pro Einheit der Druckzunahme an. Sie ist immer positiv, gewöhnlich eine Funktion

des Druckes und im allgemeinen von Teilchen zu Teilchen verschieden. Der Index *Ph* deutet die physikalische Natur dieser Größe an, wie der Index G in Formel **1** (4) auf die geometrische Natur des sonst durch einen ganz ähnlichen Differentialquotienten definierten Barotropiekoeffizienten Γ hinweist.

Im LAGRANGEschen System sind die in der Gleichung (2) oder (3) vorhandenen und somit auch in γ vorkommenden Parameter s_0 bzw. q_0 oder θ_0, $A, B, \ldots$ als Funktionen der Numerierungskoordinaten darzustellen:

$$(5)\qquad \begin{cases} s_0 = s_0(a, b, c), \\ A = A(a, b, c), \quad B = B(a, b, c), \ \ldots \end{cases}$$

Im EULERschen System sind die Parameter, wie oben gezeigt, durch individuelle Zeitableitung zu eliminieren. Das Resultat der ersten Ableitung können wir gemäß (3) und (4) aufschreiben:

$$(6)\qquad \dot{q} = \gamma \dot{p} \quad \text{oder} \quad \dot{s} = -\gamma s^2 \dot{p}.$$

Dies ist die endgültige EULERsche Zustandsgleichung, wenn nur ein einziger Parameter vorkommt, den man sogleich aus der Funktion γ mit Hilfe der ursprünglichen Gleichung (2) oder (3), eliminieren kann. Kommen dagegen mehrere Parameter vor, muß man weiter differentiieren, um alle eliminieren zu können.

Die allgemeine Zustandsgleichung **23** (4) mit den drei physikalischen Variablen beschränkt nicht die gegenseitige räumliche Verteilung von Masse und Druck. Auch die speziellere Piezotropiegleichung (2) hat keine solche Beschränkung zur Folge, solange sie noch einen von Teilchen zu Teilchen veränderlichen Parameter enthält. Das Massenfeld ist gewöhnlich *baroklin* mit äquisubstantiellen Flächen, welche die Isobarflächen schneiden.

Der barotrope Zustand kann aber, vorübergehend oder dauernd, als ein Spezialfall des baroklinen auftreten. Die Barotropierelation

$$(7)\qquad \chi_G(p, s) = 0$$

gestattet uns dann, einen *Barotropiekoeffizienten* entsprechend der Gleichung **1** (4) zu definieren:

$$(8)\qquad \Gamma = \left(\frac{dq}{dp}\right)_G = -\frac{1}{s^2}\left(\frac{ds}{dp}\right)_G.$$

Die beiden mathematisch ähnlich definierten Größen γ und Γ müssen wohl unterschieden werden: der Piezotropiekoeffizient γ kennzeichnet eine physikalische Eigenschaft des einzelnen Teilchens, der Barotropiekoeffizient Γ dagegen eine geometrische Beziehung des Dichte- und Druckfeldes.

Der Unterschied in der Bedeutung tritt besonders scharf hervor, wenn einer der Koeffizienten gleich Null ist. Denn nach (4) bedeutet

(9) $$\gamma = 0$$

Inkompressibilität des Teilchens, nach (8) bedeutet dagegen

(10) $$\Gamma = 0$$

Homogenität des Massenfeldes.

Während im allgemeinen Barotropie unabhängig von Piezotropie, und Piezotropie unabhängig von Barotropie vorkommen kann, tritt eine Verknüpfung ein, *wenn die Gleichung der Piezotropie* (2) *keinen Parameter* $s_0, A, B, \ldots$ *enthält, der von Teilchen zu Teilchen verschieden ist.* Die räumlich vorkommenden Dichteunterschiede können dann nur auf den räumlich vorkommenden Druckunterschieden beruhen, und die Gleichungen (2) der Piezotropie und (7) der Barotropie müssen untereinander identisch sein und ebenfalls die aus diesen Gleichungen abgeleiteten Koeffizienten der Piezotropie und Barotropie:

(11) $$\chi \equiv \chi_G \quad \text{und} \quad \gamma = \Gamma.$$

Dies ist der Fall der *zwangsläufigen Barotropie* oder *Autobarotropie*, der nicht gestört werden kann. Denn *ein Austausch zweier Teilchen miteinander ändert das Massenfeld nicht,* weil bei dem Austausch das eine Teilchen zwangsläufig die Dichte des anderen annimmt. Die äquisubstantiellen Flächen können sich unter keinen Umständen von den isobaren trennen.

Die klassische hydrodynamische Literatur hat sich bis jetzt fast ausschließlich auf die Betrachtung dieser *autobarotropen* Flüssigkeiten beschränkt, die im einfachsten Falle homogen und inkompressibel sind, und bei denen im allgemeinsten Falle nur solche Dichteunterschiede auftreten können, die von Druckunterschieden allein herrühren. In diesem Falle, wo jede Individualisierung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen überflüssig ist, erweist sich das EULERsche System wesentlich einfacher als das LAGRANGEsche.

25. Die vollkommenen Gase. Wir werden das Vorhergehende an dem Beispiel erläutern, wo das flüssige System die Eigenschaften eines vollkommenen Gases hat. Die Zustandsgleichung ist dann:

(1) $$p s = R\theta \quad \text{oder} \quad \frac{p}{q} = R\theta.$$

In einem Gasgemisch wechselnder Zusammensetzung, z. B. in der atmosphärischen Luft mit ihrem wechselnden Gehalt an Wasserdampf, ist die Gaskonstante R von Teilchen zu Teilchen verschieden. Sie tritt im LAGRANGEschen System als Funktion der Numerierungskoordinaten auf:

(2) $$R = R(a, b, c).$$

Um aber die Gleichung ins EULERsche System einzuführen, müssen wir R eliminieren, was durch logarithmische Differentiation geschieht:

$$\frac{\dot{p}}{p} + \frac{\dot{s}}{s} = \frac{\dot{\theta}}{\theta} \tag{3}$$

Ist dagegen das Gasgemisch homogen, so daß R denselben Wert für alle einzelnen Teilchen hat, so ist die Gleichung in ihrer endlichen Form (1) im EULERschen System genau so brauchbar wie im LAGRANGEschen.

In dem speziellen Falle der Piezotropie werden wir uns auf eine Piezotropierelation beschränken, welche die Dichte einer Potenz des Druckes proportional setzt:

$$\frac{q}{q_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^n. \tag{4}$$

q_0 ist hier die Anfangsdichte, die das Teilchen unter dem Drucke p_0 hat. Die durch ein und denselben Druck p_0 definierte Anfangsdichte q_0 kann von Teilchen zu Teilchen verschieden sein und ist im LAGRANGEschen System als eine Funktion der Numerierungskoordinaten darzustellen:

$$q_0 = q_0(a, b, c). \tag{5}$$

Im EULERschen System ist q_0 aus der Gleichung (4) zu eliminieren, was wiederum durch die logarithmische individuelle Zeitdifferentiation gelingt:

$$\frac{\dot{q}}{q} = n\frac{\dot{p}}{p}.$$

Die Gleichung läßt sich in der Form **24** (6) schreiben:

$$\dot{q} = \gamma \dot{p}, \tag{6}$$

in der der Piezotropiekoeffizient γ den folgenden Wert hat:

$$\gamma = n\frac{q}{p} = \frac{n}{R\theta}. \tag{7}$$

$n = 1/\varkappa$, wo $\varkappa$ das Verhältnis der spez. Wärme bei konstantem Druck und konstantem Volumen ist ($\varkappa = c_p/c_v = 1{,}403$), gibt die adiabatische Zustandsänderung, in der sich das Teilchen ohne Wärmeaustausch mit den Umgebungen ausdehnt oder zusammenzieht. Dabei ändert sich die Temperatur des Teilchens nach der Gleichung:

$$\theta = \theta_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \tag{8}$$

die sich durch Elimination von q aus (1) und (4) ergibt. Wenn hier $p_0 = 100$ Zentibar (vgl. S. 91) gewählt wird, so ist θ_0 definitionsgemäß die sog. *potentielle Temperatur* im M.T.S.-Systeme. Die potentielle Temperatur eines beliebigen Teilchens ist also:

$$\vartheta = \theta\left(\frac{100}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \theta\left(\frac{100}{p}\right)^{0{,}2872}. \tag{8a}$$

Sie kann von Teilchen zu Teilchen verschieden sein, bleibt aber für jedes Teilchen eine Invariante, so lange seine Zustandsänderungen adiabatisch verlaufen. Die Tabelle I am Schluß des Buches gibt die durch (8a) definierte potentielle Temperatur ϑ als Funktion des Druckes p und der Temperatur θ.

$n = 1$ gibt die isotherme Zustandsänderung, in der man durch Zu- oder Abfuhr von Wärme die adiabatischen Temperaturänderungen aufhebt.

$n = 0$, also $\gamma = 0$, gibt den Fall, in dem sich das Teilchen mit unveränderlichem Volumen bewegt, wo Zu- und Abfuhr von Wärme so abgemessen ist, daß alle Volumenänderungen aufgehoben werden.

Weder die allgemeine Zustandsgleichung (1) noch die Piezotropiegleichung (4) haben für gewöhnlich Barotropie des Massenfeldes zur Folge. Barotropie kann aber als eine unabhängige Erscheinung auftreten. Um dies einzusehen, denken wir uns eine Barotropierelation von der Form (4) gegeben, nur mit einem anderen Exponenten m:

$$\frac{q}{q_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^m. \tag{9}$$

In (4) bezieht sich q_0 auf die Dichte eines Teilchens unter dem Drucke p_0, und die Gleichung sagt aus, welche Dichte dasselbe Teilchen unter anderen Drucken annimmt. In (9) ist dagegen q_0 die Dichte an einem Orte im Raume, wo der Druck p_0 herrscht. Die Gleichung sagt aus, wie sich das Verhältnis zwischen Dichte und Druck von Ort zu Ort im Raume verändert. Für den sich darauf beziehenden Barotropiekoeffizienten findet man nach **1** (4):

$$\Gamma = m\frac{q}{p} = \frac{m}{R\theta}. \tag{10}$$

$m = 1/\varkappa$ gibt hier die räumliche Dichteverteilung nach dem adiabatischen Gesetz, $m = 1$ gibt die räumliche Isothermie und $m = 0$ gibt das räumlich homogene Massenfeld. Ist in einem dieser Fälle $m = n$, also $\Gamma = \gamma$, so hat man Autobarotropie; bei Verschiedenheit von m und n dagegen die zufällige Barotropie. Ein wichtiger Fall, wo diese zufällige Barotropie auftritt, ist:

$$m = 1, \quad n = \frac{1}{\varkappa}, \tag{11}$$

also bei räumlicher Isothermie, während gegebenenfalls auftretende Zustandsänderungen der einzelnen Teilchen adiabatisch verlaufen.

26. Das Schwerefeld. Die äußere Kraft, die dem Gleichgewichte oder der Bewegung des Mediums zugrunde liegt, ist die Schwerkraft. Das Feld dieser Kraft läßt sich durch eine einzige Skalargröße darstellen, das Schwerepotential, auch *Geopotential* genannt. Der Wert

dieses Potentials in einem beliebigen Punkte des Raumes ist durch die Arbeit definiert, die man gegen die Schwerkraft leisten muß, um die Masseneinheit vom Meeresniveau bis zu diesem Punkte zu heben. Ist g — gewöhnlich die Schwerebeschleunigung genannt — der Betrag der Schwerkraft pro Masseneinheit und findet die Hebung längs der Vertikalen statt, so ist das Geopotential in der Höhe z über dem Meeresniveau:

(1) $$\varphi = \int_0^z g\,dz,$$

und

(2) $$\mathbf{g} = -\nabla\varphi$$

drückt die Schwerkraft pro Masseneinheit als Potentialgradienten aus, d. h. als einen Vektor, der senkrecht zu den Äquipotentialflächen steht, in die Richtung abnehmender Potentialwerte zeigt und numerisch durch die reziproke Dicke der Lamellen dargestellt wird.

Von den Äquipotentialflächen der Schwere oder den *Niveauflächen* $\varphi = 0, 1, 2, \ldots$ ist die erste das Meeresniveau, vollständiges Gleichgewicht vorausgesetzt. Die nächste $\varphi = 1$ folgt in der Höhe $1/g$ über dem Meeresniveau. Im *Meter-Tonnen-Sekunden-* (*M.T.S.*-) System, das in der Geophysik sehr bequem ist, ist am Pol $g = 9{,}8321$ m sek^{-2} und am Äquator $9{,}7807$, und die Fläche $\varphi = 1$ liegt am Pol 0,10171 m und am Äquator 0,10224 m über dem Meeresniveau. Dann folgen die weiteren Flächen der Niveaus $2, 3, \ldots$ in ähnlichen Vertikalabständen übereinander, die im Durchschnitt 2% mehr als ein Dezimeter betragen und in den äquatorialen Gegenden etwa 5‰ größer sind als in den polaren.

Diese Niveauflächen sind überall als Gleichgewichtsflächen durch Lot und Libelle erkennbar und bilden die von der Natur selbst angewiesenen Koordinatenflächen für Aufgaben großen Stiles über Gleichgewicht und Bewegung auf der Erde. Denkt man sich eine Fläche hart und glatt, so kann eine Kugel überall auf einer Niveaufläche liegen bleiben, dagegen kommt sie auf einer Fläche gleicher Höhe über dem Meeresspiegel ins Rollen, und zwar in Richtung von den Polen gegen den Äquator. Auf einer Fläche gleicher Tiefe unter dem Meeresniveau würde das Rollen in der umgekehrten Richtung erfolgen.

Man kann die Anwendung der Niveauflächen als Koordinatenflächen an Stelle der Flächen gleicher Seehöhe oder neben diesen durch eine bequeme Terminologie erleichtern. Man kann Potential oder Niveau auch *dynamische Höhe* oberhalb, oder *dynamische Tiefe* unterhalb des Meeresspiegels nennen und gleichzeitig die M.T.S.-Potentialeinheit, die angenähert dem Höhenunterschied von einem Dezimeter entspricht, einen *dynamischen Dezimeter* nennen. Man weiß dann bis auf ein paar

Prozente sofort, welchem geometrischen Höhenunterschied ein Niveauunterschied entspricht, der in dynamischen Metern, Dezimetern, ... angegeben ist[1].

27. Gleichgewicht. Im Falle des Gleichgewichtes fällt jeder Unterschied zwischen der LAGRANGEschen und der EULERschen Methode fort. Wir können die LAGRANGEschen Numerierungskoordinaten a, b, c dauernd mit den EULERschen Raumkoordinaten x, y, z identifizieren:

$$a \equiv x, \quad b \equiv y, \quad c \equiv z. \tag{1}$$

Die Gleichgewichtsgleichung für eine ideale Flüssigkeit ergibt sich, wenn wir in **12** (14) $\boldsymbol{j} = 0$ setzen. Ganz elementar und unabhängig von der allgemeinen Spannungstheorie findet man sie auch folgendermaßen: Wir betrachten ein rechtwinkliges Volumenelement der Flüssigkeit, deren eine Fläche in der Isobarfläche des Druckes p und deren gegenüberliegende Fläche im Abstande dn in der Isobarfläche des Druckes $p + \frac{\partial p}{\partial n} dn$ liegt. Die Drücke der umgebenden Flüssigkeit gegen die übrigen nicht in den Isobarflächen liegenden Flächen des Volumenelementes heben sich wegen der vollständigen Symmetrie auf. Gegen die isobaren Flächenelemente des Areales $d\sigma$ werden aber von der umgebenden Flüssigkeit die elementaren Kräfte $p\, d\sigma$ und $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn\right) d\sigma$ ausgeübt, d. h. die resultierende Kraft ist $-\frac{\partial p}{\partial n} dn\, d\sigma$, die längs der Normale zu den isobaren Flächen in der Richtung abnehmenden Druckes gerichtet ist. Als Vektor dargestellt, wird also diese resultierende Kraft $-\nabla p\, d\tau$, wo $d\tau$ das Volumen des betrachteten Elementes ist. Dividiert man durch $d\tau$, so findet man, daß der *Druckgradient*

$$\boldsymbol{G} = -\nabla p \tag{2}$$

die von dem Drucke herrührende, auf die Einheit des Volumens bezogene Kraft darstellt.

Man merke sich den Unterschied gegenüber dem Potentialgradienten:

$$\boldsymbol{g} = -\nabla \varphi, \tag{3}$$

der die Schwerkraft *pro Masseneinheit* darstellt.

Ein beliebiges Volumenelement $d\tau$ der Flüssigkeit befindet sich nun im Gleichgewicht, wenn sich Schwerkraft $q\boldsymbol{g}\, d\tau$ und Druckkraft $\boldsymbol{G} d\tau$ das Gleichgewicht halten:

$$q\boldsymbol{g}\, d\tau + \boldsymbol{G}\, d\tau = 0. \tag{4}$$

[1] Vollständige Tabellen für den Übergang von Höhen zu Potentialen oder umgekehrt siehe „Dynamische Meteorologie und Hydrographie" I, Anhang.

Von dieser Gleichung kommen wir zu zwei verschiedenen Gleichungsformen, indem wir einmal mit dem Massenelement $q\,d\tau$ und einmal mit dem Volumenelement $d\tau$ als gemeinschaftlichen Faktor dividieren:

$$(5)\qquad \boldsymbol{g} = -s\boldsymbol{G} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{G} = -q\boldsymbol{g}.$$

In der ersten Gleichungsform treten die auf die Masseneinheit, in der zweiten dagegen die auf die Volumeneinheit bezogenen Kräfte auf. Führt man Druck und Schwerepotential ein, so erhält man:

$$(6)\qquad \nabla\varphi = -s\nabla p \quad \text{oder} \quad \nabla p = -q\nabla\varphi.$$

Oder in cartesischer Entwicklung:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -s\frac{\partial p}{\partial x} & & & \frac{\partial p}{\partial x} &= -q\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= -s\frac{\partial p}{\partial y} & &\text{oder} & \frac{\partial p}{\partial y} &= -q\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= -s\frac{\partial p}{\partial z} & & & \frac{\partial p}{\partial z} &= -q\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die Vektorgleichungen (6) enthalten sehr anschauliche Aussagen über die Felder der Masse, des Druckes und des Potentials, die das Gleichgewicht charakterisieren. Jede der Gleichungen (6) setzt einen formal zweifach lamellaren Vektor gleich einem einfach lamellaren. Es folgt, daß s eine Funktion von p, und q eine Funktion von φ sein muß. Oder:

Im Falle des Gleichgewichtes besteht Homotropie gleichzeitig für die Felder der Masse, des Druckes und des Potentials.

Sind weiter h_p und h_φ die Dicke einer isobaren bzw. einer äquipotentiellen Einheitsschicht, so ist nach den Gleichungen (6):

$$(8)\qquad s = \frac{|\nabla\varphi|}{|\nabla p|} = \frac{h_p}{h_\varphi} \quad \text{oder} \quad q = \frac{|\nabla p|}{|\nabla\varphi|} = \frac{h_\varphi}{h_p}.$$

D. h.: *Beim Gleichgewicht enthält jede isobare Einheitsschicht s äquipotentielle Einheitsschichten*; oder: *jede äquipotentielle Einheitsschicht enthält q isobare Einheitsschichten.*

Es erscheint zweckmäßig, dieses Resultat in konkreten Einheiten auszudrücken. Die C.G.S.-Einheit des Druckes ist *Barye* genannt worden. Der Druck der Atmosphäre im Meeresniveau beträgt etwa eine Million Baryes, eine Einheit, die ein *Bar* genannt worden ist, so daß man die Identitäten hat: Bar = Megabarye, Barye = Microbar. Von dem Bar leitet man die praktisch brauchbaren Druckeinheiten Dezibar, Zentibar, Millibar ab. Das Millibar beträgt 0,750 mm Hg und gibt die Teilung des modernen Barometers. *Das Zentibar ist die M.T.S.-Druckeinheit.*

Unter Anwendung dieser Einheiten kann man sagen: Eine isobare Schicht von 1 Zentibar hat eine Dicke von s dynamischen Dezimetern; oder, auf jeden dynamischen Dezimeter Höhe kommen q isobare Schichten

von je einem Zentibar. Die Atmosphäre zerfällt in 100 isobare Schichten von je einem Zentibar. Die unterste hat bei normalem spez. Volumen der Luft eine dynamische Mächtigkeit von 800 dynamischen Dezimetern oder geometrisch von ungefähr 80 Metern. Die Mächtigkeit der Schichten nimmt nach oben zu. Der normalen Luftdichte 0,001293 entsprechend, hat man in den unteren Schichten eine Druckabnahme von 0,001293 Zentibar für jeden dynamischen Dezimeter Höhe.

Enthält die Zustandsgleichung $\chi(p, q, \theta) = 0$ außer den drei Variablen keinen von Teilchen zu Teilchen veränderlichen Parameter, so zieht die Konstanz von p und q längs einer Fläche die Konstanz von θ nach sich: auch die isothermen Flächen fallen mit den übrigen zusammenfallenden Flächen zusammen.

Die Natur des Gleichgewichtes ist in diesem Falle leicht zu untersuchen. Teilchen, die auf derselben Niveaufläche liegen, gehorchen dann derselben Piezotropiegleichung und haben denselben Piezotropiekoeffizienten γ, dessen Verhältnis zum Barotropiekoeffizienten Γ entscheidend ist. Man unterscheidet drei Fälle:

(I) *Barotropiekoeffizient algebraisch größer als Piezotropiekoeffizient,* $\Gamma > \gamma$: ein nach oben verschobenes Teilchen wird dichter, ein nach unten verschobenes wird weniger dicht als die neue Umgebung. Der Austausch zweier Teilchen hat zur Folge, daß der Schwerpunkt des ganzen Systems steigt: *das Gleichgewicht ist stabil.*

(II) *Barotropiekoeffizient gleich dem Piezotropiekoeffizienten,* $\Gamma = \gamma$: ein verschobenes Teilchen nimmt die Dichte seiner neuen Umgebung an, der Austausch zweier Teilchen ändert die Höhe des Schwerpunktes des Gesamtsystems nicht: *das Gleichgewicht ist indifferent.*

(III) *Barotropiekoeffizient algebraisch kleiner als Piezotropiekoeffizient,* $\Gamma < \gamma$: ein nach oben verschobenes Teilchen wird weniger dicht, ein nach unten verschobenes dichter als seine neue Umgebung. Der Austausch zweier Teilchen senkt den Schwerpunkt des Gesamtsystems: *das Gleichgewicht ist instabil.*

Bequeme Formen der Gleichgewichtsgleichungen (6) ergeben sich, wenn man sie skalar mit einem Linienelemente $d\boldsymbol{r}$ multipliziert. Es sind dann $\nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r} = d\varphi$ und $\nabla p \cdot d\boldsymbol{r} = dp$ die totalen Differentiale, welche die Wertänderungen der Größen φ oder p längs des Linienelementes $d\boldsymbol{r}$ darstellen. Die Gleichungen werden dann:

$$(9) \qquad d\varphi = -s\,dp \quad \text{oder} \quad dp = -q\,d\varphi\,.$$

Die Integration längs einer Reihenfolge von Linienelementen, d. h. längs einer Kurve, ergibt:

$$(10) \qquad \varphi_p - \varphi_{p_0} = -\int_{p_0}^{p} s\,dp \quad \text{oder} \quad p_\varphi - p_{\varphi_0} = -\int_{\varphi_0}^{\varphi} q\,d\varphi\,.$$

Die erste Gleichung gibt den dynamischen Höhenunterschied zwischen den Isobarenflächen p und p_0; sie löst die Aufgabe der barometrischen Höhenmessung in ihrer prinzipiell einfachsten Form. Die zweite Gleichung gibt uns den Druckunterschied zwischen den gegebenen Niveaus φ und φ_0. Um das erste Integral ausführen zu können, muß man die Barotropierelation $\chi_G(s, p) = 0$ für den vorliegenden Gleichgewichtszustand kennen. Sie wird in der Praxis durch gleichzeitige Beobachtungen von Druck, Temperatur und Feuchtigkeit längs der Kurve gefunden, wodurch man die zusammengehörigen Werte von s und p in einer Reihe von Punkten findet. Ähnlich kann man das Integral der zweiten Gleichung auswerten, wenn man durch Beobachtungen eine Anzahl zusammengehöriger Werte von Dichte und Potential gefunden hat, $\chi'_G(q, \varphi) = 0$. Auf indirektem Wege kommt man aber auch hier mit der durch Barometer-, Thermometer- und Hygrometerbeobachtungen ermittelten Barotropierelation zum Ziel.

28. Atmosphäre mit linearem Temperaturfeld. Wir benutzen die zweite Form der Gleichgewichtsgleichung **27** (9):

$$dp = -q\, d\varphi \tag{1}$$

und nehmen eine *Barotropiegleichung* der Form **25** (9) an:

$$\frac{q}{q_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^m, \quad \text{also} \quad \Gamma = m\frac{q}{p} = \frac{m}{R\theta}. \tag{2a}$$

Um auch die entsprechende Temperaturverteilung zu erhalten, können wir mit Hilfe der allgemeinen Gasgleichung die Dichte aus (2a) eliminieren. Dies gibt die Barotropiegleichung mit p und θ als Variablen:

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-} \tag{2b}$$

Gleichzeitig nehmen wir eine *Piezotropiegleichung* von derselben Form wie die Barotropiegleichung an, nur mit einem anderen Exponenten:

$$\frac{q}{q_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^n, \quad \text{also} \quad \gamma = n\frac{q}{p} = \frac{n}{R\theta}. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1) und (2) bilden ein integrables System. Am einfachsten gelingt die Integration, wenn man die Gleichung (2b) logarithmisch differentiiert, woraus folgt:

$$\frac{d\theta}{\theta} = (1 - m)\frac{dp}{p},$$

und dann dp mit Hilfe von (1) eliminiert:

$$d\theta = -(1 - m)\frac{q\theta}{p}\, d\varphi.$$

Wegen der allgemeinen Gasgleichung, $p = q R \theta$, ergibt sich hieraus für *den vertikalen Temperaturgradienten* der konstante Wert:

$$(4) \qquad -\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1-m}{R}.$$

Die Integration dieser Gleichung vom Meeresniveau $\varphi = 0$ bis zu einer beliebigen dynamischen Höhe φ ergibt dann:

$$(5) \qquad \theta = \theta_0 - \frac{1-m}{R}\varphi.$$

Wir erhalten also das einfache Resultat: *Wenn die Dichte räumlich wie eine Potenz m des Druckes verteilt ist, so ist die Temperatur eine lineare Funktion des Schwerepotentials mit dem konstanten Temperaturgradienten* $(1-m)/R$.

Die Gleichung (5) gibt nun zusammen mit (2b):

$$(6) \qquad p = p_0\left(1 - \frac{1-m}{R\theta_0}\varphi\right)^{\frac{1}{1-m}},$$

und diese zusammen mit (2a) gibt ferner:

$$(7) \qquad q = q_0\left(1 - \frac{1-m}{R\theta_0}\varphi\right)^{\frac{m}{1-m}},$$

wodurch Druck und Dichte auch als Funktion des Schwerepotentials ausgedrückt sind.

Wir betrachten zuerst den Spezialfall $m = 0$. Dann ist:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \theta &= \theta_0 - \frac{1}{R}\varphi, \\ p &= p_0\left(1 - \frac{1}{R\theta_0}\varphi\right), \\ q &= q_0. \end{aligned}$$

Die Dichte ist also räumlich konstant; man hat den Fall der *homogenen Atmosphäre.* Diese homogene Massenverteilung erhält man bei einem Temperaturgradienten gleich der reziproken Gaskonstante $1/R = 0{,}00348$ oder bei einem Temperaturgefälle von $3^\circ{,}42$ für je Hundert Meter Höhe. Dabei werden die Temperatur und der Druck gleich Null in der dynamischen Höhe:

$$(9) \qquad \varphi_H = R\theta_0,$$

die also die *Höhe der homogenen Atmosphäre* angibt. Wenn die Temperatur im Meeresniveau $\theta_0 = 273^\circ$ beträgt, wird diese Höhe in dynamischem bzw. in geometrischem Maße:

$$(10) \qquad \varphi_H = 78400 \text{ dyn. dm}, \qquad H_H = 8000 \text{ m}.$$

Diese Höhe der homogenen Atmosphäre hat allerdings keine reale physikalische Bedeutung; sie ist aber eine nützliche Rechengröße, die öfters auftreten wird.

Wenn wir sie in die Formeln (5), (6) und (7) einführen, werden diese:

$$= \theta_0 \left[1 - (1 - m)\frac{\varphi}{\varphi_H}\right],$$

$$(11) \qquad p = p_0 \left[1 - (1 - m)\frac{\varphi}{\varphi_H}\right]^{\frac{1}{1-m}}$$

$$q = q_0 \left[1 - (1 - m)\frac{\varphi}{\varphi_H}\right]^{\frac{m}{1-m}}$$

Diese Formeln geben für $m < 1$ Temperatur, Druck und Dichte gleich Null und also die Grenze der Atmosphäre in der dynamischen Höhe:

$$(12) \qquad \varphi_L = \frac{\varphi_H}{1 - m}.$$

Wenn m von Null an wächst, wird diese Höhe immer größer. Bei $m = 1/\varkappa$, wo $\varkappa$ die bekannte Konstante ($\varkappa = 1{,}403$) ist, hat man den wichtigen Fall des adiabatischen Gleichgewichtes. Die Formeln schreiben sich dann:

$$\theta = \theta_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{\varphi}{\varphi_H}\right),$$

$$(13) \qquad p = p_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{\varphi}{\varphi_H}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}},$$

$$= q_0\left(1 - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{\varphi}{\varphi_H}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}.$$

Bei der Temperatur $\theta_0 = 273°$ im Meeresniveau fällt die Grenze dieser *adiabatischen Atmosphäre* in die Höhe:

$$(14) \qquad \varphi_A = 273\,000 \text{ dyn. dm}, \qquad H_A = 27850 \text{ m} \ldots$$

Wenn m den Wert 1 erreicht, rückt die Grenze (12) der Atmosphäre in unendliche Höhe. Gleichzeitig wird $\theta = \theta_0$, also *die Atmosphäre isotherm.* Dabei werden die Ausdrücke (11) für p und q unbestimmt. Nach der Theorie der unbestimmten Ausdrücke oder durch neue Integration der Gleichung (1) mit $m = 1$ in Gleichung (2a) findet man aber leicht die folgenden Formeln für die isotherme Atmosphäre:

$$\theta = \theta_0$$

$$(15) \qquad p = p_0 e^{-\frac{\varphi}{\varphi_H}},$$

$$q = q_0 e^{-\frac{\varphi}{\varphi_H}}.$$

Diese Formeln zeigen: In der Höhe φ_H, wo die homogene Atmosphäre ihre Grenze hat, sind Dichte und Druck der isothermen Atmosphäre auf den e-ten Teil ihres Wertes im Meeresniveau herabgesunken.

Steigt m über den Wert 1 hinaus, so werden die allgemeinen Formeln (11) wieder brauchbar. Die Atmosphäre bleibt nach oben unbegrenzt,

(12) gibt aber eine physikalisch bedeutungslose untere Grenze der Atmosphäre unterhalb des Meeresniveaus.

Die Stabilität oder Instabilität der betrachteten Gleichgewichtszustände hängt von der Gleichung (3) der Piezotropie ab. Solange $n < m$ und somit $\gamma < \Gamma$, hat man Stabilität. Bei $n = m$ und also $\gamma = \Gamma$ herrscht indifferentes Gleichgewicht. Bei $n > m$ und $\gamma > \Gamma$ wird das Gleichgewicht instabil.

Gewöhnlich rechnen wir mit der adiabatischen Piezotropiegleichung, d. h. $n = 1/\varkappa$. Die Lösung (13) gibt dann das indifferente Gleichgewicht. Wir können die vertikale Temperaturverteilung einfach ausdrücken, wenn wir in der Gleichung (5) $m = \frac{1}{\varkappa} = \frac{c_v}{c_p}$ und $R = c_p - c_v$ einführen. Es ergibt sich dann:

(16) $$\theta = \theta_0 - \frac{1}{c_p}\varphi\,.$$

Da im M.T.S.-System $c_p = 999$, wird:

(16′) $$\theta = \theta_0 - 0{,}001001\,\varphi\,,$$

d. h. die Temperaturabnahme nach oben in der indifferent geschichteten Atmosphäre ist ziemlich genau $1/1000°$ C pro dynamischen Dezimeter oder 1° C pro 100 dynamische Meter. Dieser vertikale Temperaturgradient wird allgemein der adiabatische Temperaturgradient genannt. Bei allen Temperaturgradienten, die größer sind als der adiabatische oder, wie man sagt, *bei den überadiabatischen Temperaturgradienten hat man das instabile Gleichgewicht,* das nie als ein Dauerzustand möglich ist. Ausgesprochen instabil wäre somit die homogene Atmosphäre. *Bei allen unteradiabatischen Temperaturgradienten hat man dagegen stabiles Gleichgewicht.* Ausgesprochen stabil ist die isotherme Atmosphäre mit dem Temperaturgradienten Null, und noch stabilere Zustände hat man im Falle der negativen Temperaturgradienten, also im Falle der Temperaturinversion.

Die angegebene Gleichgewichtsverteilung von Temperatur, Druck und Dichte ist unter der Annahme eines idealen Gases gefunden worden. Sie gilt also ohne weiteres für ganz trockene Luft und auch für das Gemisch von Luft und Wasserdampf, solange keine Kondensation eintritt. Die Gleichgewichtsbedingungen nach Eintritt der Kondensation sollen im nächsten Kapitel behandelt werden.

Die Größen Γ und γ werden sich in unseren späteren Untersuchungen als wichtig erweisen. Dabei werden wir gewöhnlich mit dem adiabatischen γ rechnen, so daß wir in (3) $n = 1/\varkappa$ setzen. Nach (2a) und (3) werden dann Γ und γ die folgenden Funktionen des Schwerepotentiales:

(17) $$\Gamma = \frac{m}{R\theta_0\left(1 - (1-m)\frac{\varphi}{\varphi_H}\right)}, \qquad \gamma = \frac{1}{R\varkappa\theta_0\left(1 - (1-m)\frac{\varphi}{\varphi_H}\right)},$$

wobei man sieht, daß $1/\Gamma$ und $1/\gamma$ lineare Funktionen des Schwerepotentiales sind. Indem wir für die Temperatur im Meeresniveau $\theta_0 = 273$ setzen, ergibt sich bzw. für die homogene, die adiabatische und die isotherme Atmosphäre:

$$\Gamma = 0\,, \qquad \gamma = \frac{0{,}9097 \cdot 10^{-5}}{1 - \frac{\varphi}{\varphi_H}} \tag{18}$$

$$\Gamma = \frac{0{,}9097 \cdot 10^{-5}}{1 - 0{,}2872\frac{\varphi}{\varphi_H}}\,, \qquad \gamma = \frac{0{,}9097 \cdot 10^{-5}}{1 - 0{,}2872\frac{\varphi}{\varphi_H}} = \Gamma, \tag{19}$$

$$\Gamma = 1{,}2763 \cdot 10^{-5}\,, \qquad \gamma = 0{,}9097 \cdot 10^{-5}\,. \tag{20}$$

Die Lösung (15), die wir für die isotherme Atmosphäre gefunden haben, bleibt auch gültig, wenn wir $\gamma = 0$ setzen, d. h. für eine inkompressible Flüssigkeit, welche die Massenverteilung der isothermen Atmosphäre hat. Für eine solche Flüssigkeit können wir eine freie Oberfläche einführen, was bei einem Gas unmöglich ist. Auch enthält es keinen physikalischen Widerspruch, wenn wir uns eine Flüssigkeit denken, die sowohl die Massenverteilung wie die Kompressibilität (20) der isothermen Atmosphäre hat, aber dennoch in ihrer Eigenschaft als Flüssigkeit freie Oberfläche haben kann. Die Betrachtung eines solchen Mediums wird sich später als zweckmäßig erweisen.

29. Die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes. Es seien $\boldsymbol{r}$ der Radiusvektor und x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten eines materiellen Punktes der Masse m. Die äußere Kraft, welche auf die Masse wirkt, soll von einem Potential φ abhängen. Die Bewegungsgleichungen des Punktes, als Vektorgleichung oder cartesisch ausgeschrieben, werden dann:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla\varphi \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,, \\ m\ddot{y} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,, \\ m\ddot{z} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Will man die Bewegung auf ganz allgemeine krummlinige Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 beziehen, so braucht man nur, nach der bekannten Methode von LAGRANGE, die neuen Variablen durch **15** (5) in den Ausdruck der kinetischen Energie

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{2}$$

und in den Ausdruck des Potentials φ einzuführen, so daß man

$$T = T(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, t)\,, \qquad \varphi = \varphi(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t) \tag{3}$$

hat. Die Bewegungsgleichungen, auf die neuen Koordinaten bezogen, lassen sich dann folgendermaßen schreiben:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\psi_1} - \frac{\partial T}{\partial \psi_1} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\psi_2} - \frac{\partial T}{\partial \psi_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\psi_3} - \frac{\partial T}{\partial \psi_3} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_3}
\end{aligned}
$$

Wegen der formalen Symmetrie können wir diese drei Gleichungen durch eine einzige symbolisieren. Nach Analogie mit den übrigen Vektorbezeichnungen können wir vereinbaren, die drei Gleichungen (4) durch die eine Gleichung

$$
(5)\qquad \frac{d}{dt}\nabla_{\dot\psi} T - \nabla_\psi T = -\nabla_\psi \varphi
$$

zu symbolisieren, in der sich $\nabla_{\dot\psi}$ genau so auf die Variablen $\dot\psi_1, \dot\psi_2, \dot\psi_3$ und ∇_ψ auf ψ_1, ψ_2, ψ_3 bezieht, wie sonst ∇ auf die Variablen x, y, z.

30. Die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen. Die Gleichung für die Bewegung einer vollkommenen Flüssigkeit, in der sich die Spannung auf denselben isotropen Druck p reduziert wie im Falle des Gleichgewichtes, haben wir **12** (14) als Beispiel zur allgemeinen Tensortheorie schon aufgeschrieben. Die Gleichung ergibt sich auch unmittelbar aus **29** (1). Wir bezeichnen mit $q\,d\tau$ die Masse eines beliebigen Volumenelementes der Flüssigkeit, mit $\boldsymbol{j}$ die Beschleunigung, und auf die rechte Seite schreiben wir die Vektorsumme der beiden wirkenden Kräfte, der Schwerkraft $q\boldsymbol{g}\,d\tau$ und der Druckkraft $\boldsymbol{G}\,d\tau$:

$$
(1)\qquad q\boldsymbol{j}\,d\tau = q\boldsymbol{g}\,d\tau + \boldsymbol{G}\,d\tau .
$$

Von dieser Gleichung, die für das konkrete Element gilt, kommen wir zu zwei verschiedenen Formen, einmal durch Division mit der Masse $q\,d\tau$ und einmal durch Division mit dem Volumen $d\tau$ des Elementes:

$$
(2)\qquad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{g} + s\boldsymbol{G} \quad \text{oder} \quad q\boldsymbol{j} = q\boldsymbol{g} + \boldsymbol{G},
$$

wo sich in der ersten Gleichung die Kräfte auf die Einheit der Masse, in der zweiten auf die Einheit des Volumens beziehen. Wenn wir in diesen Gleichungen die Beschleunigung durch die zweite Zeitableitung des Radiusvektors, $\boldsymbol{g}$ durch das Schwerepotential und $\boldsymbol{G}$ durch den Druck ausdrücken, so ergeben sich die Gleichungen:

$$
(3)\qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla\varphi - s\nabla p \quad \text{oder} \quad q\ddot{\boldsymbol{r}} = -q\nabla\varphi - \nabla p .
$$

Diese physikalisch einfachsten Gleichungsformen werden wir vielfach bei Überlegungen allgemeiner Art anwenden.

Um zu den mathematisch mehr entwickelten Formen der Gleichungen überzugehen, schreiben wir zunächst die Komponentengleichungen auf, die der ersten Gleichung (3) entsprechen:

$$
(4) \qquad \begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - s\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \ddot{y} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - s\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \ddot{z} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - s\dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}
$$

Um zu den LAGRANGEschen Gleichungen zu gelangen, haben wir x, y, z als die abhängigen Variablen beizubehalten und die neuen Größen a, b, c, die Numerierungskoordinaten, als neue unabhängige Variablen einzuführen. Man bildet die neuen auf a, b und c bezogenen Gleichungen, indem man die Gleichungen (4) der Reihe nach einmal mit $\partial x/\partial a$, $\partial y/\partial a$, $\partial z/\partial a$, einmal mit $\partial x/\partial b$, $\partial y/\partial b$, $\partial z/\partial b$ und einmal mit $\partial x/\partial c$, $\partial y/\partial c$, $\partial z/\partial c$ multipliziert und addiert. Dies ergibt die LAGRANGEschen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen:

$$
(5) \qquad \begin{aligned} \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial a} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial a} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial a} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial a} - s\frac{\partial p}{\partial a}, \\ \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial b} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial b} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial b} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial b} - s\frac{\partial p}{\partial b}, \\ \ddot{x}\frac{\partial x}{\partial c} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial c} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial c} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial c} - s\frac{\partial p}{\partial c}. \end{aligned}
$$

Auf der linken Seite der Gleichungen kommt die lineare Differentialoperation **11** (2) vor. Wir können deshalb die skalaren Gleichungen (5) durch die eine Vektorgleichung

$$
(6) \qquad \nabla \mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla \varphi - s \nabla p
$$

ersetzen, in der sich die Operation ∇ auf die Variablen a, b, c bezieht.

Zu den EULERschen Gleichungen gelangt man, wenn man x, y, z als die unabhängigen Variablen beibehält, indem man ihnen die Bedeutung von Koordinaten geometrischer Raumpunkte gibt und

$$
(7) \qquad v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}, \qquad v_z = \dot{z}
$$

als neue abhängige Variablen einführt, wo die Zeitableitungen als individuell zu deuten sind. Die EULERschen Bewegungsgleichungen werden deshalb in expliziter Form:

$$
(8) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - s\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - s\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - s\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}
$$

Die trinomischen Produktglieder auf der linken Seite definieren hier, wie schon früher erwähnt, die lineare Operation **11** (1), und die drei Komponentengleichungen lassen sich durch die eine Vektorgleichung

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla \varphi - s \nabla p \tag{9}$$

ersetzen, in der sich die Operation ∇ jetzt auf die Variablen x, y, z bezieht.

Oben sind die cartesischen Koordinaten x, y, z verwertet worden, teils als Lagekoordinaten der bewegten Teilchen im LAGRANGEschen System, teils als Ortskoordinaten im EULERschen System. Um jetzt ganz beliebige Koordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 ähnlich zu verwerten, führen wir in den Ausdruck der kinetischen Energie einer Masseneinheit

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{10}$$

diese neuen Variablen ein, so daß man

$$T = T(\dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2, \dot{\psi}_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, t) \tag{11}$$

erhält. Dann kann man die Gleichungen (4) folgendermaßen schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \psi_1} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1} - s\frac{\partial p}{\partial \psi_1}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \psi_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2} - s\frac{\partial p}{\partial \psi_2}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_3} - \frac{\partial T}{\partial \psi_3} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_3} - s\frac{\partial p}{\partial \psi_3}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Oder, nach dem Vorbild von **29** (5), kürzer in der symbolischen Form:

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\psi}} T - \nabla_{\psi} T = -\nabla_{\psi}\varphi - s\nabla_{\psi} p. \tag{13}$$

Die Gleichungen (12) oder (13) leiden aber selbstverständlich an derselben Unvollkommenheit wie die Gleichungen (4), daß wir nämlich kein völlig getrenntes System von abhängigen und von unabhängigen Variablen haben. Wieder können wir, um diese Trennung zu erreichen, entweder den LAGRANGEschen oder den EULERschen Weg einschlagen.

Nach LAGRANGE behalten wir die Größen ψ_1, ψ_2, ψ_3 als die abhängigen Variablen bei und führen die neuen Größen a, b, c, die Numerierungskoordinaten, genau so wie oben, als neue unabhängige Variablen ein: wir bilden die neuen auf a, b, c bezogenen Gleichungen, indem wir die Gleichungen (12) der Reihe nach einmal mit $\partial\psi_1/\partial a$, $\partial\psi_2/\partial a$, $\partial\psi_3/\partial a$, einmal mit $\partial\psi_1/\partial b$, $\partial\psi_2/\partial b$, $\partial\psi_3/\partial b$ und einmal mit $\partial\psi_1/\partial c$, $\partial\psi_2/\partial c$, $\partial\psi_3/\partial c$ multiplizieren und addieren. Dies gibt die LAGRANGEschen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen, auf die allgemeinen LAGRANGEschen Koordinaten bezogen:

$$(14)\quad\begin{cases}
\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_1}-\frac{\partial T}{\partial\psi_1}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial a}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_2}-\frac{\partial T}{\partial\psi_2}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial a}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_3}-\frac{\partial T}{\partial\psi_3}\right)\frac{\partial\psi_3}{\partial a}\\
\qquad=-\frac{\partial\varphi}{\partial a}-s\frac{\partial p}{\partial a},\\
\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_1}-\frac{\partial T}{\partial\psi_1}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial b}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_2}-\frac{\partial T}{\partial\psi_2}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial b}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_3}-\frac{\partial T}{\partial\psi_3}\right)\frac{\partial\psi_3}{\partial b}\\
\qquad=-\frac{\partial\varphi}{\partial b}-s\frac{\partial p}{\partial b},\\
\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_1}-\frac{\partial T}{\partial\psi_1}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial c}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_2}-\frac{\partial T}{\partial\psi_2}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial c}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_3}-\frac{\partial T}{\partial\psi_3}\right)\frac{\partial\psi_3}{\partial c}\\
\qquad=-\frac{\partial\varphi}{\partial c}-s\frac{\partial p}{\partial c}.
\end{cases}$$

Hier ist die Wahl der unabhängigen Variablen a, b, c ganz beliebig. Gewöhnlich wird man es aber zweckmäßig finden, die Wahl der abhängigen mit der Wahl der unabhängigen Variablen zu verknüpfen, indem man die als Numerierungskoordinaten dienenden unabhängigen Variablen mit den Anfangswerten der als Ortskoordinaten dienenden abhängigen Variablen identifiziert: $\psi_1^0 = a$, $\psi_2^0 = b$, $\psi_3^0 = c$.

Mit den schon eingeführten abkürzenden Bezeichnungen können wir die Gleichungen (14) durch eine symbolische Vektorgleichung

$$(15)\quad\begin{cases}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_1}-\frac{\partial T}{\partial\psi_1}\right)\nabla\psi_1+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_2}-\frac{\partial T}{\partial\psi_2}\right)\nabla\psi_2+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_3}-\frac{\partial T}{\partial\psi_3}\right)\nabla\psi_3\\
\qquad=-\nabla\varphi-s\nabla p\end{cases}$$

ersetzen. Faßt man hier die drei Klammerglieder formal als Komponenten eines Vektors

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\dot\psi}T-\nabla_\psi T$$

auf und $\nabla\boldsymbol{\psi}$ als einen Tensor mit den drei vektoriellen Komponenten $\nabla\psi_1$, $\nabla\psi_2$, $\nabla\psi_3$, so läßt sich (15), der Gleichung (6) entsprechend, kürzer schreiben:

$$(16)\quad\nabla\boldsymbol{\psi}\cdot\left(\frac{d}{dt}\nabla_{\dot\psi}T-\nabla_\psi T\right)=-\nabla\varphi-s\nabla p,$$

mit dem Tensor $\nabla\boldsymbol{\psi}$ als Präfaktor.

Um von den Gleichungen (12) zu der voll entwickelten EULERschen Form zu gelangen, hat man die neuen abhängigen Variablen zu bilden:

$$(17)\quad v_1=\dot\psi_1,\qquad v_2=\dot\psi_2,\qquad v_3=\dot\psi_3$$

und die Lösung des Problems in der Form

$$(18)\quad\begin{cases}v_1=v_1(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t),\\ v_2=v_2(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t),\\ v_3=v_3(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t),\end{cases}\qquad\begin{array}{l}p=p(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t),\\ s=s(\psi_1,\psi_2,\psi_3,t)\end{array}$$

zu bestimmen, in der man sich vorläufig noch ψ_1, ψ_2, ψ_3 als Koordinaten der bewegten Teilchen denken kann, um sie aber schließlich in Koordinaten geometrischer Raumpunkte übergehen zu lassen.

Zunächst können wir (17) in den Ausdruck (11) von T einführen, so daß dieser

$$T = T(v_1, v_2, v_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, t) \tag{19}$$

wird. Ferner erhalten wir:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\psi_1} = \frac{\partial T}{\partial v_1}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot\psi_2} = \frac{\partial T}{\partial v_2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot\psi_3} = \frac{\partial T}{\partial v_3}. \tag{20}$$

Solange nun ψ_1, ψ_2, ψ_3 noch Koordinaten der bewegten Teilchen sind, ist die totale Zeitableitung der Größen (20) durch die Operation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \psi_1}\frac{d\psi_1}{dt} + \frac{\partial}{\partial \psi_2}\frac{d\psi_2}{dt} + \frac{\partial}{\partial \psi_3}\frac{d\psi_3}{dt} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + v_1\frac{\partial}{\partial \psi_1} + v_2\frac{\partial}{\partial \psi_2} + v_3\frac{\partial}{\partial \psi_3} \end{aligned} \tag{21}$$

zu bilden, die wir immer noch durch

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{22}$$

symbolisieren können, wobei sich jetzt die Operation ∇ auf die Variablen ψ_1, ψ_2, ψ_3 bezieht.

In den Gleichungen (12) können wir uns jetzt T in der Form (19) geschrieben denken, dementsprechend (20) benutzen und ψ_1, ψ_2, ψ_3 in Koordinaten geometrischer Raumpunkte übergehen lassen, unter der Bedingung, daß wir die Zeitableitung in der Form (21) schreiben. Das Gleichungssystem wird dann:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial v_1} + v_1\frac{\partial}{\partial \psi_1}\frac{\partial T}{\partial v_1} + v_2\frac{\partial}{\partial \psi_2}\frac{\partial T}{\partial v_1} + v_3\frac{\partial}{\partial \psi_3}\frac{\partial T}{\partial v_1} - \frac{\partial T}{\partial \psi_1} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_1} - s\frac{\partial p}{\partial \psi_1}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial v_2} + v_1\frac{\partial}{\partial \psi_1}\frac{\partial T}{\partial v_2} + v_2\frac{\partial}{\partial \psi_2}\frac{\partial T}{\partial v_2} + v_3\frac{\partial}{\partial \psi_3}\frac{\partial T}{\partial v_2} - \frac{\partial T}{\partial \psi_2} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_2} - s\frac{\partial p}{\partial \psi_2}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial v_3} + v_1\frac{\partial}{\partial \psi_1}\frac{\partial T}{\partial v_3} + v_2\frac{\partial}{\partial \psi_2}\frac{\partial T}{\partial v_3} + v_3\frac{\partial}{\partial \psi_3}\frac{\partial T}{\partial v_3} - \frac{\partial T}{\partial \psi_3} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \psi_3} - s\frac{\partial p}{\partial \psi_3}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Dies sind die EULERschen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen in allgemeinen LAGRANGEschen Koordinaten. Sie lassen sich durch eine einzige Vektorgleichung ersetzen, nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_v T + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(\nabla_v T) - \nabla T = -\nabla\varphi - s\nabla p, \tag{24}$$

wo sich das ∇ ohne Index auf die unabhängigen Variablen ψ_1, ψ_2, ψ_3 bezieht und ∇_v auf die Variablen v_1, v_2, v_3.

31. Die dynamische Grenzflächenbedingung. Die hydrodynamische Bewegungsgleichung kann nur dort angewendet werden, wo die Variablen

kontinuierlich sind. An einer inneren Diskontinuitätsfläche, wo die abhängigen Variablen sprunghafte Änderungen aufweisen, ist sie deshalb durch eine neue Bedingung, *die dynamische Grenzflächenbedingung*, zu ersetzen, die für die Fläche angewandt einfach Gleichheit von Druck und Gegendruck beiderseits der Fläche verlangt.

Es sei

$$f(x, y, z, t) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer Diskontinuitätsfläche, die bewegt oder unbewegt ist, je nachdem ob t in der Gleichung auftritt oder nicht. Wir denken uns die Drucke p und p' beiderseits dieser Fläche als Funktion von x, y, z bzw. x', y', z' und der Zeit gegeben. Die zu erfüllende Bedingung ist dann:

$$p(x, y, z, t) - p'(x', y', z', t) = 0, \quad \text{wenn } \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}, \tag{2}$$

d. h. wenn die Teilchen einander gerade gegenüberliegen. Diese Gleichung gilt für diejenigen Wertsysteme x, y, z, t, die der Gleichung (1) genügen. Diese Werte sind gegebenenfalls derart zu spezialisieren, daß die Bedingung (2) erfüllt wird.

Mit Hilfe dieser dynamischen Grenzflächenbedingung kann auch die an der Fläche (1) zu erfüllende kinematische Grenzflächenbedingung in einer anderen Form geschrieben werden. (2) ist ja nichts anderes als die Gleichung einer Fläche wie (1), in x, y, z, t ausgedrückt, und die Druckdifferenz $p - p'$ kann deshalb mit dem gleichen Recht wie f in die Gleichungen der kinematischen Grenzflächenbedingungen **18** (2) und (5) eingesetzt werden. Nur muß beachtet werden, daß der Aszendent von (2) durch die vektorielle Differenz der Druckaszendenten ∇p und $\nabla' p'$ für $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$ gegeben ist. Es ergeben sich deshalb die folgenden Grenzflächenbedingungen:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} p(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial t} p'(x', y', z', t) + \dot{\boldsymbol{r}} \cdot [\nabla p(x, y, z, t) - \nabla' p'(x', y', z', t)] = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t} p(x, y, z, t) - \frac{\partial}{\partial t} p'(x', y', z', t) + \dot{\boldsymbol{r}}' \cdot [\nabla p(x, y, z, t) - \nabla' p'(x', y', z', t)] = 0, \\ &\qquad\qquad \text{wenn } \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dies ist eine Kombination der dynamischen und der kinematischen Grenzflächenbedingungen — *die gemischte Grenzflächenbedingung* — in allgemeiner Form, von welcher wir zu der spezielleren LAGRANGEschen oder EULERschen Form übergehen können.

Um die erhaltenen Bedingungen in der LAGRANGEschen Form zu schreiben, verwenden wir die Tatsache, daß die cartesischen Koordinaten nach Voraussetzung für $t = 0$ in die Numerierungskoordinaten übergehen sollen. Aus (2) ergibt sich dann sofort die dynamische Grenzflächenbedingung in der Form:

$$\begin{cases} p(a, b, c, t) - p'(a', b', c', t) = 0, \\ \text{wenn } t = 0,\ a = a',\ b = b',\ c = c'. \end{cases} \tag{4}$$

Um (3) in den Numerierungskoordinaten auszudrücken, sei für einen Augenblick der Operator ∇ auf a, b, c und ∇_r auf x, y, z bezogen und entsprechend für die gestrichenen Buchstaben. Wenn wir nun die individuelle Zeitableitung von p und p' in der EULERschen und in der LAGRANGEschen Form schreiben, so ergeben sich die Identitäten:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}p(x,y,z,t) + \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla_r p(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}p(a,b,c,t),\\ &\frac{\partial}{\partial t}p'(x',y',z',t) + \dot{\boldsymbol{r}}'\cdot\nabla_{r'} p'(x',y',z',t) = \frac{\partial}{\partial t}p'(a',b',c',t). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (3), mit ∇_r und $\nabla_{r'}$ geschrieben, ergibt sich dann:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}p(a,b,c,t) - \frac{\partial}{\partial t}p'(a',b',c',t) - (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla_{r'} p'(x',y',z',t) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}p(a,b,c,t) - \frac{\partial}{\partial t}p'(a',b',c',t) - (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla_r p(x,y,z,t) \quad = 0,\\ &\qquad\qquad \text{wenn } t = 0,\ a = a',\ b = b',\ c = c'. \end{aligned}$$

Wenn schließlich $\dot{\boldsymbol{r}}$ und $\dot{\boldsymbol{r}}'$ durch $\partial\boldsymbol{r}/\partial t$ und $\partial\boldsymbol{r}'/\partial t$ ersetzt werden und der Ausdruck **18** (10) für ∇_r eingeführt wird, so erhalten wir die gemischte Grenzflächenbedingung in der LAGRANGEschen Form:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}p(a,b,c,t) - \frac{\partial}{\partial t}p'(a',b',c',t) - \left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla'\boldsymbol{r}')^{-1}\cdot\nabla' p'(a',b',c',t) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial t}p(a,b,c,t) - \frac{\partial}{\partial t}p'(a',b',c',t) - \left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{r}'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla\boldsymbol{r})^{-1}\cdot\nabla p(a,b,c,t) = 0,\\ &\qquad\qquad \text{wenn } t = 0,\ a = a',\ b = b',\ c = c'. \end{aligned}$$

Grenzt die Flüssigkeit an den leeren Raum, wo der Druck p' gleich Null ist, so können wir von der zweiten Gleichung (7) absehen, und die Gleichung (4) und die erste Gleichung (7) reduzieren sich dann auf:

$$p(a,b,c,t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}p(a,b,c,t) = 0,$$

oder zusammengenommen:

$$(8)\qquad p(a,b,c) = 0,$$

die im LAGRANGEschen System eine materielle Fläche darstellt.

Die EULERsche Form dieser Grenzflächenbedingungen ergibt sich, wenn man in (2) und (3) $\boldsymbol{r}' \equiv \boldsymbol{r}$ und die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ und $\boldsymbol{v}' = \dot{\boldsymbol{r}}'$ einführt. Die dynamische Grenzflächenbedingung wird dann:

$$(9)\qquad p(x,y,z,t) - p'(x,y,z,t) = 0,$$

und die gemischte Grenzflächenbedingung wird:

$$(10)\qquad \frac{\partial(p - p')}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla(p - p') = 0, \qquad \frac{\partial(p - p')}{\partial t} + \boldsymbol{v}'\cdot\nabla(p - p') = 0.$$

Grenzt die Flüssigkeit an den leeren Raum, wo $p' = 0$ ist, so können wir wieder von der zweiten Gleichung (10) absehen und erhalten

$$p(x, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla p = 0 \tag{11}$$

als Bedingungen an einer freien Flüssigkeitsoberfläche.

32. Das LAGRANGEsche Gleichungssystem. Wir können jetzt die vollständigen Gleichungssysteme zusammenstellen, wobei wir die Gleichungen in kürzester symbolischer Form schreiben werden. Als unabhängige Variablen dienen zunächst die LAGRANGEschen Numerierungskoordinaten und die Zeit:

$$a, b, c, t.$$

Als abhängige Variablen dienen die Lagekoordinaten der numerierten Teilchen, bzw. der Radiusvektor, der diese Koordinaten vertritt, und drei physikalische Variablen, eine Massenvariable, nämlich entweder Dichte oder spez. Volumen, Druck und Temperatur:

$$x, y, z \text{ oder } \boldsymbol{r}, \quad q \text{ oder } s, \quad p, \quad \theta.$$

Schließlich können Parameter

$$A, B, \ldots$$

vorkommen, die für ein und dasselbe Teilchen keine zeitliche Änderungen erfahren, die aber von Teilchen zu Teilchen verschieden sein können. Die Verteilung dieser Parameter auf die verschiedenen Teilchen ist ein für allemal gegeben:

$$A = A(a, b, c), \quad B = B(a, b, c), \ldots \tag{1a}$$

Dann soll der Zustand des ganzen Systems zu einer gewissen Anfangszeit, $t = 0$, gegeben sein, d. h. man kennt die Anfangswerte sämtlicher abhängiger Variablen zu dieser Zeit, und zugleich auch die Anfangswerte der Geschwindigkeiten oder der ersten Zeitableitung des Radiusvektors der Teilchen. Also zur Anfangszeit

$$t = 0: \quad \begin{aligned} &\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(a, b, c), \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}_0(a, b, c), \\ &s = s_0(a, b, c), \quad p = p_0(a, b, c), \quad \theta = \theta_0(a, b, c). \end{aligned} \tag{1b}$$

Gesucht werden die Werte dieser Größen zu einer beliebigen Zeit t. Hierbei können wir jedoch von $\dot{\boldsymbol{r}}$ absehen, das gegeben ist, wenn $\boldsymbol{r}$ als Funktion der Zeit bekannt ist:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(a, b, c, t), \\ s = s(a, b, c, t), \quad p = p(a, b, c, t), \quad \theta = \theta(a, b, c, t). \end{cases} \tag{2}$$

Zur Bestimmung dieser Größen brauchen wir eine Vektorgleichung und drei Skalargleichungen, die wir alle schon haben. Die Vektorgleichung ist die LAGRANGEsche Bewegungsgleichung:

$$\nabla \boldsymbol{r} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla \varphi - s \nabla p. \tag{3}$$

Die zwei ersten Skalargleichungen drücken die beiden Erhaltungssätze aus. Die Gleichung für die Erhaltung der Masse, oder die Kontinuitätsgleichung, können wir

$$q\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c}=q_0\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial a}\times\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial b}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial c}\tag{4}$$

schreiben oder in gleichwertiger Weise durch Funktionaldeterminanten ausdrücken, **16** (12″). Die Gleichung für die Erhaltung der Energie ist:

$$\dot{w}=\dot{e}+p\dot{s}.\tag{5}$$

Als dritte Skalargleichung haben wir schließlich die in endlicher Form auftretende Zustandsgleichung:

$$\chi(s,p,\theta,A,B,\ldots)=0.\tag{6}$$

In allen Gleichungen bedeutet der NEWTONsche Punkt eine mit konstanten Werten a, b, c ausgeführte Zeitableitung, also hier im LAGRANGEschen System mathematisch eine partielle Zeitableitung, physikalisch eine individuelle Zeitableitung. Die Operation ∇ in der Bewegungsgleichung bezieht sich auf die Koordinaten a, b, c.

Zu diesen im ganzen Innern des flüssigen Systems gültigen Gleichungen kommt nun die spezielle Anpassung der Gleichungen an die Verhältnisse an inneren Diskontinuitätsflächen oder an äußeren Grenzflächen. Sind a, b, c die Numerierungskoordinaten der Teilchen auf der einen Seite einer inneren Diskontinuitätsfläche und a', b', c' diejenige auf der anderen Seite, so müssen zu der allgemeinen Gleichung dieser Fläche

$$f(a,b,c,t)=0 \quad\text{und}\quad f'(a',b',c',t)=0\tag{7}$$

die kinematischen Grenzflächenbedingungen gehören:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}f(a,b,c,t)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}f'(a',b',c',t)=0,\\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla\mathbf{r})^{-1}\cdot\nabla f(a,b,c,t)=0,\\ \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla'\mathbf{r}')^{-1}\cdot\nabla' f'(a',b',c',t)=0,\\ \text{wenn}\quad t=0,\quad a=a',\quad b=b',\quad c=c',\end{gathered}\tag{8}$$

sowie die dynamische Grenzflächenbedingung:

$$\left\{\begin{aligned}&p(a,b,c,t)-p'(a',b',c',t)=0,\\ &\text{wenn}\quad t=0,\quad a=a',\quad b=b',\quad c=c'.\end{aligned}\right.\tag{9}$$

Die Gleichungen (8) oder (9) können wir auch durch die gemischte Grenzflächenbedingung

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}p(a,b,c,t)-\frac{\partial}{\partial t}p'(a',b',c',t)-\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla'\mathbf{r}')^{-1}\cdot\nabla' p'(a',b',c',t)=0,\\ \frac{\partial}{\partial t}p(a,b,c,t)-\frac{\partial}{\partial t}p'(a',b',c',t)-\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}-\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla\mathbf{r})^{-1}\cdot\nabla p(a,b,c,t)=0,\\ \text{wenn}\quad t=0,\quad a=a',\quad b=b',\quad c=c'\end{gathered}\tag{10}$$

ersetzen. Für eine freie Oberfläche ist schließlich:

(11) $$p(a, b, c) = 0.$$

Im Spezialfall der *Piezotropie* hat man eine physikalische Variable weniger; gewöhnlich eliminiert man dann die Temperatur. Aber dafür kommt gewöhnlich ein Parameter hinein, z. B. der Anfangswert s_0 des spezifischen Volumens der einzelnen Teilchen. Zu den Bedingungen, die das System definieren, kommt dann noch eine hinzu:

(12a) $$s_0 = s_0(a, b, c).$$

Die Zustandsgleichung hat aber eine Variable weniger:

(12b) $$\chi(p, s, s_0, A, B, \ldots) = 0.$$

Die Gleichung (5) für die Erhaltung der Energie kommt als eine Grundgleichung des Problems nicht in Betracht. Sie gestattet uns aber, nach der Lösung des Problems die Wärmemengen zu berechnen, die man den Teilchen zu- oder abführen muß, wenn die Bewegung des Systems die gefundene sein soll.

Ist schließlich die Dichte eines Teilchens von dem Drucke unabhängig, d. h. ist die Flüssigkeit *inkompressibel*, so kommt auch die Zustandsgleichung nicht in Betracht, weil Dichte oder Volumen eines Teilchens überhaupt nicht mehr variieren. Da $q = q_0$, reduziert sich die Kontinuitätsgleichung gleichzeitig auf:

(13) $$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial b} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial c},$$

wo zugleich die rechte Seite gleich 1 ist, wenn die Numerierungskoordinaten mit den Anfangskoordinaten zusammenfallen.

33. Das EULERsche Gleichungssystem. Die unabhängigen Variablen sind die Koordinaten geometrischer Raumpunkte — Ortskoordinaten — und die Zeit:

$$x, y, z, t.$$

Die abhängigen Variablen sind die Geschwindigkeitskomponenten oder der entsprechende Geschwindigkeitsvektor und dieselben physikalischen Variablen wie vorher, also:

$$v_x, v_y, v_z \text{ oder } \mathbf{v}, \quad q \text{ oder } s, \; p, \; \theta.$$

Dazu kommen noch die Werte gewisser Parameter

$$A, B, \ldots$$

die von Teilchen zu Teilchen verschieden sein können. Wir können aber jetzt diese Verteilung nicht durch Numerierungskoordinaten angeben. Dafür müssen wir die anfängliche räumliche Verteilung dieser Parameter kennen, und die Lösung des Problems liefert dann die räumliche Verteilung der Parameter zu jeder späteren Zeit.

Das Problem wird dann das Folgende: Man kennt die räumliche Verteilung sämtlicher abhängigen Variablen und zugleich der Parameter $A, B, \ldots$ zu einer Anfangszeit, also:

$$(1)\quad t = 0: \begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0(x, y, z), \\ s = s_0(x, y, z), \quad p = p_0(x, y, z), \quad \theta = \theta_0(x, y, z), \\ A = A_0(x, y, z), \quad B = B_0(x, y, z), \ldots \end{cases}$$

Man sucht die räumliche Verteilung dieser Variablen und dieser Parameter zu einer beliebigen Zeit t:

$$(2)\quad \begin{cases} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t), \\ s = s(x, y, z, t), \quad p = p(x, v, z, t), \quad \theta = \theta(x, y, z, t), \\ A = A(x, y, z, t), \quad B = B(x, y, z, t), \ldots . \end{cases}$$

Die Zahl der Variablen ist genau dieselbe wie im LAGRANGEschen Fall, und die Gleichungen sind im Prinzip auch dieselben, sie haben nur eine andere mathematische Form. Zunächst haben wir die Bewegungsgleichung in ihrer EULERschen Form:

$$(3)\quad \dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla\varphi - s\nabla p .$$

Dann die Kontinuitätsgleichung, die wir nach **17** (9') und (9) in zwei äquivalenten Formen ausdrücken können:

$$(4)\quad \dot{s} = s\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \quad \text{oder} \quad -\frac{\partial q}{\partial t} = \mathrm{div}\, q\boldsymbol{v} .$$

Man merke sich den Unterschied, daß die Zeitableitung auf der linken Seite in der ersten Gleichung die *individuelle*, in der zweiten die *lokale* ist. Die Gleichung für die Erhaltung der Energie behält genau dieselbe äußere Form wie im LAGRANGEschen System:

$$(5)\quad \dot{w} = \dot{e} + p\dot{s} .$$

Die Zustandsgleichung ist aber nur dann in endlicher Form brauchbar, wenn keine von Teilchen zu Teilchen veränderlichen Parameter $A, B, \ldots$ vorkommen, also:

$$(6a)\quad \chi(p, s, \theta) = 0 .$$

Enthält dagegen die Gleichung solche Parameter, so muß man sich durch individuelle Differentiation nach der Zeit eine genügende Anzahl von Gleichungen verschaffen, um die Parameter eliminieren zu können. Kommt z. B. nur ein Parameter vor, so genügt es, einmal zu differentiieren:

$$(6b)\quad \frac{\partial\chi}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial\chi}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial\chi}{\partial\theta}\dot{\theta} = 0 .$$

Die brauchbare Form der Gleichung erhält man, indem man den Parameter aus dieser Gleichung und der Zustandsgleichung eliminiert.

Schließlich haben wir die Randbedingungen an denjenigen Grenzflächen der Flüssigkeit zu betrachten, die als innere Diskontinuitätsflächen oder als äußere Begrenzungsflächen auftreten können. Es sei

$$(7)\quad f(x, y, z, t) = 0$$

die Gleichung einer solchen Fläche. Für diese müssen die kinematischen Grenzflächenbedingungen

(8) $$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla f = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathfrak{v}' \cdot \nabla f = 0$$

und die dynamische Grenzflächenbedingung

(9) $$p\,(x, y, z, t) - p'\,(x, y, z, t) = 0$$

erfüllt sein. Die Gleichungen (8) oder (9) können wir mit Vorteil auch durch die gemischte Grenzflächenbedingung

(10) $$\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla (p - p') = 0\,, \qquad \frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \mathfrak{v}' \cdot \nabla (p - p') = 0$$

ersetzen. An einer freien Oberfläche haben wir schließlich:

(11) $$p\,(x, y, z, t) = 0\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla p = 0\,.$$

Das System der EULERschen Gleichungen ist damit vollständig, und wir haben nur noch die wichtigsten Spezialfälle zu betrachten, wo es sich vereinfachen läßt.

Im Falle der *Piezotropie* können wir die Temperatur eliminieren. Die Zustandsgleichung enthält dann nur die Variablen s — bzw. q — und p:

(12a) $$\chi(s, p) = 0\,.$$

Die in dieser Gleichung gegebenenfalls vorhandenen Parameter, die von Teilchen zu Teilchen verschieden sein können, sind aus der Gleichung in der angegebenen Weise zu eliminieren. Ist nur ein Parameter vorhanden, so läßt sich das Eliminationsresultat

(12b) $$\dot{q} = \gamma \dot{p} \qquad \text{oder} \qquad \dot{s} = -\gamma s^2 \dot{p}$$

schreiben, wo γ der Piezotropiekoeffizient ist. Die für die Lösung des Problems überflüssige Energiegleichung kann man nachträglich benutzen, um die mit den gefundenen Bewegungen zwangsläufig verbundenen thermischen Prozesse zu finden.

Setzt man $\gamma = 0$, so ergibt sich der Fall der *Inkompressibilität*, der somit als ein Spezialfall der Piezotropie aufgefaßt werden kann. Die Piezotropiegleichung (12b) wird dann:

(12c) $$\dot{q} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \dot{s} = 0\,,$$

oder entwickelt:

(12c') $$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla q = 0\,, \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + \mathfrak{v} \cdot \nabla s = 0\,.$$

Dieses in die erste Gleichung (4) eingeführt, ergibt die *vereinfachte Kontinuitätsgleichung:*

(13a) $$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0\,.$$

Aus der Inkompressibilität folgt somit ein solenoidales Geschwindigkeitsfeld.

Bei stationärem Massenfelde werden die lokalen Zeitableitungen von q und s gleich Null, und die zweite Gleichung (4) wird:

$$\text{div}\, q\boldsymbol{v} = 0. \tag{13b}$$

Bei stationärem Massenfelde ist also das Feld der spez. Bewegung solenoidal.

Bei Homogenität mit Inkompressibilität sind die Gleichungen (13a) und (13b) beide erfüllt.

Der Fall der *Autobarotropie* tritt als Spezialfall der Piezotropie ein, wenn die Piezotropiegleichung (12a) keine von Teilchen zu Teilchen veränderlichen Parameter enthält und diese Gleichung somit sowohl zeitlich für ein und dasselbe Teilchen wie räumlich von Teilchen zu Teilchen gilt. Die Autobarotropie umfaßt als Spezialfall auch die mit Homogenität verbundene Inkompressibilität. Die Bedingung der Autobarotropie beschränkt wesentlich die Allgemeinheit des Bewegungsfeldes. Die Bewegungsgleichung (3) stellt die Beschleunigung dar als die Summe eines einfach lamellaren Vektors $\nabla\varphi$ und eines zweifach lamellaren Vektors $s\nabla p$, d. h. als einen Vektor unbegrenzter Allgemeinheit. Im Falle der Autobarotropie fallen aber die isosteren Flächen $s =$ konst. zwangsläufig mit den isobaren $p =$ konst. zusammen, so daß $s\nabla p$ ein einfach lamellarer Vektor wird, wodurch die ganze rechte Seite der Gleichung, und damit auch die Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}}$, ein lamellarer Vektor wird. Zwischen den Bewegungsfeldern der allgemeinen Flüssigkeit, mit dem gewöhnlich baroklinen Massenfelde und der speziellen autobarotropen Flüssigkeit mit dem zwangsläufig barotropen Massenfelde besteht also der folgende wesentliche Unterschied:

Die Beschleunigung, die gewöhnlich ein Vektor allgemeinster Art ist, reduziert sich in der autobarotropen Flüssigkeit auf einen wirbelfreien, d. h. einen potentiellen oder lamellaren Vektor.

Um dies auch in der Gleichungsform zum Vorschein kommen zu lassen, schreiben wir:

$$s\nabla p = \nabla\pi, \quad \text{wobei} \quad \pi = \int s\,dp, \tag{14}$$

und wo man die Quadratur vermöge der Autobarotropiegleichung $\chi(s, p) = 0$ ausführen kann. Die Bewegungsgleichung wird dann:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla(\varphi + \pi), \tag{15}$$

oder nach Entwicklung der individuellen Zeitableitung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\nabla(\varphi + \pi). \tag{15'}$$

Wie durch Spezialisierung der Flüssigkeitseigenschaften kann man auch durch Spezialisierung der Bewegungsformen wesentliche Vereinfachungen erzielen.

Ist die Beschleunigung ein wirbelfreier und folglich einfach lamellarer Vektor, so muß auch die rechte Seite der Gleichung (3) ein einfach lamellarer Vektor sein, und folglich müssen die äquisubstantiellen Flächen $s=$ konst. mit den isobaren $p=$ konst. zusammenfallen. Fallen umgekehrt die äquisubstantiellen und die isobaren Flächen zusammen, so folgt umgekehrt die Wirbelfreiheit der Beschleunigung. Es ergibt sich also der folgende wichtige Zusammenhang zwischen Bewegungsfeld und Massenfeld einer ganz allgemeinen Flüssigkeit:

Ist die Beschleunigung wirbelfrei, so ist das Massenfeld barotrop, und ist das Massenfeld barotrop, so ist die Beschleunigung wirbelfrei.

Diese spezielle Bewegungsform, gekennzeichnet durch barotropes Massenfeld und wirbelfreie Beschleunigung, ist also bei einer beliebig allgemeinen Flüssigkeit eine mögliche Bewegungsform, bei den autobarotropen Flüssigkeiten die einzig mögliche Bewegungsform.

Setzen wir weiter Wirbelfreiheit nicht nur der Beschleunigung, sondern auch der Geschwindigkeit voraus, so kann man diesen Vektor als Aszendenten oder Gradienten einer Skalargröße, nämlich des Geschwindigkeitspotentials, ausdrücken:

(16) $$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad \boldsymbol{v} = -\nabla\psi\,.$$

Bei dem wirbelfreien Vektor $\boldsymbol{v}$ hat man nach **11** (7): $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \nabla(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2)$, und die Gleichung (15′) läßt sich wie folgt schreiben:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi + \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\right) = -\nabla\varphi - \nabla\pi\,.$$

Da man die Reihenfolge der Operation ∇ und der lokalen Zeitableitung vertauschen kann, ist diese Gleichung unmittelbar integrabel und man erhält:

(17) $$\pi = \pi_0 - \varphi + \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2$$

wo π_0 eine von den Koordinaten unabhängige und höchstens von der Zeit abhängige Größe ist. Nach dieser Gleichung kann man π und dadurch auch den Druck p unmittelbar bestimmen, wenn man das Geschwindigkeitspotential ψ kennt.

Führt man nach (16) das Geschwindigkeitspotential in die Kontinuitätsgleichung (4) ein, so kommt man auf die POISSONsche Gleichung:

(18) $$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{q}\frac{dq}{dt} \qquad \text{oder} \qquad \nabla^2\psi = \frac{1}{q}\frac{dq}{dt}\,.$$

Im Spezialfall der Inkompressibilität ist $p = q\pi$. Die Formel für den Druck wird dann:

(19) $$p = p_0 - q\varphi + q\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}q\boldsymbol{v}^2,$$

und die Kontinuitätsgleichung reduziert sich auf die LAPLACEsche Gleichung:

(20) $$\nabla^2 \psi = 0 .$$

In diesem Falle der Potentialbewegung der homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit ist das Problem der Bestimmung der Flüssigkeitsbewegung auf die Randwertaufgabe reduziert, die der Gleichung (20) genügende Funktion ψ mittels der gegebenen Grenzflächenbedingungen zu bestimmen.

Vergleicht man jetzt das LAGRANGEsche und das EULERsche System miteinander, so hat jedes seine Vorteile.

Betrachten wir die Sache zunächst vom mathematischen Standpunkt, so ist die EULERsche Bewegungsgleichung niedrigerer Ordnung und die EULERsche Kontinuitätsgleichung niedrigeren Grades als die entsprechende LAGRANGEsche Gleichung. Die weiteren Gleichungen sind aber im LAGRANGEschen System sämtlich einfacher als im EULERschen, solange es sich um ganz allgemeine flüssige Systeme handelt, wo die Eigenschaften von Teilchen zu Teilchen variieren können. Dies gilt schon von der Energiegleichung, wo im LAGRANGEschen System die Zeitableitung partiell ist, während sie im EULERschen die zusammengesetzte individuelle Zeitableitung ist. Vor allem führt aber die EULERsche Zustandsgleichung zu komplizierten Gleichungssystemen, wenn man viele Parameter zu eliminieren hat. Eine entschieden größere mathematische Einfachheit kommt deshalb dem EULERschen System nur bei den einfachsten flüssigen Systemen zu, besonders bei den autobarotropen.

Vom physikalischen Standpunkt aus gesehen, sind die EULERschen Gleichungen geeigneter als die LAGRANGEschen, um die allgemeinen Eigenschaften der Bewegungsfelder zu untersuchen. Beispiele dafür haben wir schon oben gesehen, und mehrere werden später gegeben (Kap. V, VI). Je mehr aber die Lösung des vorliegenden Problems den Charakter der Verfolgung der Bewegung von flüssigen Massen verschiedener physikalischer Eigenschaften hat, um so mehr wird man auf die LAGRANGEschen Gleichungen angewiesen sein. Ein solches Problem ist das meteorologische. Das kommende Wetter wird man vorhersagen können durch Berechnung der *neuen Lagen* der bewegten Luftmassen und der *physikalischen Zustände*, in denen sie in den neuen Lagen ankommen — eine Aufgabe, die man sich schließlich nur nach der LAGRANGEschen Methode gelöst denken kann.

Wenn wir auch von der endgültigen Lösung solcher Probleme noch weit entfernt sind, so wird es für die Vorbereitung ihrer Lösung doch wichtig sein, die LAGRANGEschen Methoden soweit wie möglich zu entwickeln.

34. Die Berücksichtigung der Reibung. Bis jetzt haben wir die Reibung vernachlässigt. Über die rationelle Berücksichtigung der Reibung, wenn es sich um die turbulenten Bewegungen handelt, die in den meisten Fällen vorliegen, ist man leider noch nicht im klaren. Wenn dies auch sehr bedauerlich ist, so darf man die Folgen dieser Unkenntnis doch nicht überschätzen, wenn es sich um die ausgedehnten ozeanischen, atmosphärischen oder kosmischen Flüssigkeitsbewegungen handelt. Denn die große Regulierung der Bewegungen geschieht hier durch die Thermodynamik, und nicht, wie vielfach bei Bewegungen kleineren Stiles, durch die Reibung.

Die Symmetriebedingungen **12** (5) gelten ohne Zweifel, solange die Bewegung als streng laminar behandelt werden kann. Bei den gewöhnlich vorkommenden turbulenten Bewegungen, wo die einzelnen Flüssigkeitselemente in sehr verwickelter rotierender und wirbelnder Bewegung begriffen sind, die man weder analytisch darstellen noch durch Beobachtung verfolgen kann, muß man sich aber auf die Beschreibung oder die analytische Darstellung von Durchschnittsbewegungen beschränken. Dabei treten scheinbare, von dem Turbulenzzustand abhängige Reibungserscheinungen auf, deren Gesetze uns noch unbekannt sind. Vorläufig sind wir deshalb darauf hingewiesen, versuchsweise die Gesetze der physikalischen Reibung auch auf diese Turbulenzreibung anzuwenden und die möglicherweise auftretenden gyroskopischen Wirkungen bis auf weiteres außer Betracht zu lassen. Dabei ist aber der Reibungskoeffizient nicht mehr eine Konstante, sondern von der jeweilig vorkommenden Turbulenzmischung abhängig, die sowohl mit der Zeit wie auch mit dem Ort variieren kann. Unter diesen Umständen führt die gewöhnliche Theorie auf die folgenden Ausdrücke für die skalaren Spannungskomponenten, wenn η der Reibungskoeffizient ist:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
P_x^x &= -p - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{r}} + 2\eta\frac{\partial \dot{x}}{\partial x},\\
P_y^y &= -p - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{r}} + 2\eta\frac{\partial \dot{y}}{\partial y},\\
P_z^z &= -p - \frac{2}{3}\eta \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{r}} + 2\eta\frac{\partial \dot{z}}{\partial z},\\
P_y^z &= P_z^y = \eta\left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial z}\right),\\
P_z^x &= P_x^z = \eta\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial x}\right),\\
P_x^y &= P_y^x = \eta\left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\right).
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Spannungskomponenten in die CAUCHYsche Gleichung **12** (12) ein, so ergibt sich die folgende Bewegungsgleichung:

$$
(2)\qquad q\ddot{\boldsymbol{r}} = -q\nabla\varphi - \nabla p + \nabla\cdot(\eta\nabla\dot{\boldsymbol{r}}) + \nabla\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla\eta + \tfrac{1}{3}\eta\nabla\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{r}} - \tfrac{2}{3}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{r}}\,\nabla\eta\,.
$$

Bei inkompressiblen Flüssigkeiten ist $\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{r}} = 0$, so daß die zwei letzten Glieder verschwinden; auch bei Bewegungen wie der atmosphärischen bleibt, trotz der Kompressibilität, die kubische Expansionsgeschwindigkeit einer bewegten Masse so außerordentlich klein, daß man von den Gliedern mit $\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{r}}$ gewöhnlich absehen kann.

Wenn man speziell einen von Ort und Zeit unabhängigen Reibungskoeffizienten voraussetzt, so nimmt die Bewegungsgleichung die folgende Form an:

$$q \ddot{\boldsymbol{r}} = -q \nabla \varphi - \nabla p + \eta \nabla^2 \dot{\boldsymbol{r}} + \tfrac{1}{3} \eta \nabla \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{r}} . \tag{2a}$$

In die mathematisch noch unvollkommene Form der Bewegungsgleichung (2) sollen jetzt entweder LAGRANGEsche oder EULERsche Variablen eingeführt werden.

Die LAGRANGEsche Form der Bewegungsgleichung erhalten wir wie gewöhnlich durch skalare Multiplikation der Gleichung (2) mit dem Tensor $\nabla \boldsymbol{r}$ als Präfaktor, wo sich ∇ auf die LAGRANGEschen Anfangskoordinaten a, b, c bezieht. Um eine Verwechslung mit dem auf die Variablen x, y, z bezogenen Differentialoperator zu vermeiden, werden wir diesen mit ∇_r bezeichnen. Aus der Gleichung (2) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} q \nabla \boldsymbol{r} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = {} & -q \nabla \varphi - \nabla p + \nabla \boldsymbol{r} \cdot [\nabla_r \cdot (\eta \nabla_r \dot{\boldsymbol{r}})] + \nabla \boldsymbol{r} \cdot [\nabla_r \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla_r \eta] \\ & + \tfrac{1}{3} \eta \nabla (\nabla_r \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) - \tfrac{2}{3} (\nabla_r \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) \nabla \eta . \end{aligned}$$

Wenn schließlich der Operator ∇_r durch ∇ ersetzt wird, indem nach **18** (10) $\nabla_r = (\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla$ ist, so ergibt sich die LAGRANGEsche Bewegungsgleichung reibender Flüssigkeiten:

$$\left\{ \begin{aligned} q \nabla \boldsymbol{r} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} = {} & -q \nabla \varphi - \nabla p + \nabla \boldsymbol{r} \cdot \{(\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla \cdot [\eta (\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{r}}]\} \\ & + \nabla \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla \dot{\boldsymbol{r}} \cdot (\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla \eta + \tfrac{1}{3} \eta \nabla [(\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{r}}] \\ & - \tfrac{2}{3} [(\nabla \boldsymbol{r})^{-1} \cdot \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{r}}] \nabla \eta . \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Es ist hier $\boldsymbol{r} = \partial \boldsymbol{r} / \partial t$ zu setzen.

Die EULERsche Form der Bewegungsgleichung erhalten wir aus (2), wenn wir $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ als neue abhängige Variable einführen und $\ddot{\boldsymbol{r}}$ durch $\partial \boldsymbol{v} / \partial t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$ ersetzen. Sie lautet folglich:

$$q \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + q \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -q \nabla \varphi - \nabla p + \nabla \cdot (\eta \nabla \boldsymbol{v}) + \nabla \boldsymbol{v} \cdot \nabla \eta + \tfrac{1}{3} \eta \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v} - \tfrac{2}{3} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \nabla \eta , \tag{4}$$

wo sich ∇ auf die Variablen x, y, z bezieht.

Da diese Bewegungsgleichungen für reibende Flüssigkeiten von höherer Ordnung als diejenige für ideale Flüssigkeiten sind, müssen weitere Grenzflächenbedingungen zu den früher angegebenen hinzukommen, um eine eindeutige Bestimmung der Integrale dieser Gleichungen zu ermöglichen.

An einer inneren Diskontinuitätsfläche

(5) $$f(x, y, z, t) = 0 \quad \text{und} \quad f'(x', y', z', t) = 0$$

muß erstens die Vektorspannung pro Flächeneinheit zu beiden Seiten der Fläche dieselbe sein:

(6) $$\boldsymbol{P}^n(x, y, z, t) - \boldsymbol{P}'^n(x', y', z', t) = 0, \quad \text{wenn } \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}.$$

Im Falle verschwindender Zähigkeit, $\eta \to 0$, reduziert sich diese Bedingung nach (1) auf die für ideale Flüssigkeiten gültige dynamische Grenzflächenbedingung:

$$p(x, y, z, t) - p'(x', y', z', t) = 0, \quad \text{wenn } \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r},$$

welche die Gleichheit von isotropem Druck und Gegendruck an einer inneren Grenzfläche aussagt.

An einer freien Oberfläche gibt die Bedingung (6) speziell:

(7) $$\boldsymbol{P}^n = 0,$$

da dort Spannungen nicht übertragen werden können.

An der Grenzfläche (5) müssen ferner die kinematischen Grenzflächenbedingungen erfüllt sein:

(8) $$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla f = 0, \qquad \frac{\partial f'}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{r}}' \cdot \nabla' f' = 0, \\ (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}') \cdot \nabla f = 0, \qquad (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}') \cdot \nabla' f' = 0, \\ \text{wenn } \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}. \end{gathered}$$

Diese drücken das Prinzip aus, daß zwei einander gerade gegenüberliegende Teilchen beiderseits der Grenzfläche dieselbe Geschwindigkeit senkrecht zur Fläche haben wie die Fläche selbst. Über die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{\boldsymbol{r}}_t$ und $\dot{\boldsymbol{r}}_t'$ tangential zur Fläche sagen sie aber nichts aus. Wenn nun diese voneinander verschieden wären, würden Teilchen der zwei Medien einander vorbeigleiten und bei vorhandener Reibung eine Kraft aufeinander ausüben müssen. Gewöhnlich nimmt man an, daß diese Kraft — die äußere Reibungskraft — dem Geschwindigkeitssprung an der Grenzfläche direkt proportional ist, mit einem Proportionalitätsfaktor η', dem *äußeren* Reibungskoeffizienten, der mit dem *inneren* Reibungskoeffizienten η nicht verwechselt werden darf. Dieser äußeren Reibungskraft hält nun die Tangentialkomponente der Spannungskraft an der Grenzfläche das Gleichgewicht. Da diese Komponente die vektorielle Differenz zwischen der Vektorspannung $\boldsymbol{P}^n$ und deren Normalkomponente $\boldsymbol{P}^n \cdot \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}$ darstellt, erhalten wir die Relation:

$$\boldsymbol{P}^n - \boldsymbol{P}^n \cdot \boldsymbol{n}\boldsymbol{n} = \eta'(\dot{\boldsymbol{r}}_t - \dot{\boldsymbol{r}}_t').$$

Gewöhnlich ergibt sich der äußere Reibungskoeffizient als unendlich groß, wodurch die tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten zu beiden Seiten der Fläche einander gleich werden:

(9) $$\dot{\boldsymbol{r}}_t = \dot{\boldsymbol{r}}_t'.$$

Zwei zu beiden Seiten der Diskontinuitätsfläche liegende Teilchen haben dann dieselbe Geschwindigkeit und haften folglich aneinander. Selbst im Falle verschwindender Zähigkeit, $\eta \to 0$, bleibt diese Bedingung bestehen, und insofern unterscheidet sich dieser Fall erheblich von dem einer idealen Flüssigkeit, wo tangentielle Geschwindigkeitssprünge vorkommen können.

Ist speziell die Grenzfläche eine äußere, feste und unbewegliche Fläche, so sind die Flüssigkeitsteilchen an dieser Fläche in Ruhe.

Diese Grenzflächenbedingungen könnten auch hier in der üblichen Weise in LAGRANGEscher und EULERscher Form geschrieben werden; wir wollen aber darauf nicht eingehen.

Viertes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der hydrodynamischen Stromfelder.

35. Prognostischer und diagnostischer Gebrauch der Gleichungen. Analytische Integrationen des vollständigen hydrodynamisch-thermodynamischen Gleichungssystems sind schwierig, wenn man Integrale von einiger Allgemeinheit verlangt. Wir müssen deshalb versuchen, uns auf dem Wege der Diskussion den mehr umfassenden Problemen ohne Integrationen zu nähern. Ist in dieser Weise ein allgemeiner Überblick gewonnen, so werden sich später nützliche Spezialprobleme ausscheiden.

Statt mit dem gesamten Gleichungssystem anzufangen, werden wir zunächst einzelne Gleichungen oder Gruppen von Gleichungen herausgreifen, um aus ihnen charakteristische Eigentümlichkeiten der Flüssigkeitsbewegungen abzuleiten, und zwar fangen wir dabei mit der Bewegungsgleichung an.

Von einer Bewegungsgleichung kann man im allgemeinen zweierlei Gebrauch machen. Der direkte Gebrauch ist der *prognostische*: aus den gegebenen Bewegungsursachen die Beschleunigung und aus dieser die zukünftigen Geschwindigkeiten und Ortsänderungen der bewegten Teilchen abzuleiten. Nicht weniger wichtig ist der umgekehrte *diagnostische* Gebrauch: aus dem bekannten oder als gegeben vorausgesetzten Verlauf der Bewegungen Rückschlüsse auf die dahinterliegenden Bewegungsursachen zu ziehen. Diese diagnostischen Untersuchungen schaffen vielfach die Grundlage für die spätere Lösung der prognostischen Aufgaben. NEWTONS Ableitung der allgemeinen Gravitation aus den KEPLERschen Gesetzen ist das klassische Beispiel des diagnostischen Gebrauches einer Bewegungsgleichung, welche die Grundlage für die für Jahrtausende gültigen astronomischen Prognosen geschaffen hat. Wie

in der Astronomie werden auch in der Meteorologie umfassende diagnostische Studien der rationellen Lösung des Prognosenproblems vorausgehen müssen.

Diagnosen- und Prognosenproblem laufen gewissermaßen in ein einziges Problem zusammen, wenn es sich um die zeitlich unveränderlichen stationären Bewegungsformen und stationären Zustände handelt. Auf diese wird sich deshalb unsere Aufmerksamkeit stark richten.

36. Potential- und Druckfeld. Die hydrodynamische Bewegungsgleichung in einfachster Form

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g} + s\boldsymbol{G} \tag{1}$$

setzt die Beschleunigung gleich der Vektorsumme von Schwerkraft und Druckkraft, beide auf die Einheit der Masse bezogen. Beim Gleichgewicht, wenn $\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, zeigt der Druckgradient $\boldsymbol{G}$ vertikal aufwärts, und die Isobarflächen fallen mit den Niveauflächen zusammen. Wenn dagegen Beschleunigung vorliegt, *ist der Druckgradient vorwärts geneigt in der Richtung der Horizontalkomponente der Beschleunigung*, und die Isobarflächen haben ein entsprechendes Gefälle in derselben Richtung. Wenn man z. B. eine völlig mit Wasser gefüllte Flasche durch einen Ruck horizontal vorwärts beschleunigt, neigen sich die Isobarflächen vorwärts in der Richtung des Ruckes; und sie neigen sich entgegengesetzt, wenn man die in Bewegung geratene Flasche anhält. Im horizontalen zirkularen Wirbel, wo die Beschleunigung zentripetal gegen die Achse gerichtet ist, neigen sich die Isobarflächen gegen die Achse, wodurch sie die bekannte Trichterform annehmen.

Während sich die Isobarflächen neigen, ändern sie auch ihre gegenseitigen Abstände. Man sieht beides von einem gemeinsamen Gesichtspunkt, wenn man die Gleichung als eine scheinbare Gleichgewichtsgleichung schreibt, so daß das Beschleunigungsglied mit dem negativen Vorzeichen als *Trägheitskraft* auftritt. Lösen wir die Gleichung (1) einmal nach $\boldsymbol{g}$ und einmal nach $\boldsymbol{G}$ auf, so ergibt sich:

(2A) $\boldsymbol{g} = -(s\boldsymbol{G} - \dot{\boldsymbol{v}})$, (2B) $\boldsymbol{G} = -q(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{v}})$,

oder

(2′A) $\nabla\varphi = -s\nabla p - \dot{\boldsymbol{v}}$, (2′B) $\nabla p = q(-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}})$.

Auf der rechten Seite jeder Gleichung tritt eine *scheinbare Kraft* auf, in der ersten die Vektorsumme von Druckkraft und Trägheitskraft, beide auf die Einheit der Masse bezogen, in der zweiten die Vektorsumme von Schwerkraft und Trägheitskraft, beide auf die Einheit des Volumens bezogen. Erinnert man sich nun, daß $\boldsymbol{g}$ und $\boldsymbol{G}$ lamellare Vektoren sind, von denen der erste zu den Niveauflächen senkrecht steht und numerisch gleich dem reziproken Wert der Dicke h_φ der Einheits-Niveauschichten ist, und von denen der zweite senkrecht zu den

Isobarflächen steht und numerisch gleich dem reziproken Wert der Dicke h_p der isobaren Einheitsschichten ist, so findet man die folgenden Sätze, die unmittelbare Verallgemeinerungen der entsprechenden hydrostatischen Sätze über **27** (8) Potential-, Druck- und Massenfeld sind:

(A). Die Niveauflächen verlaufen senkrecht zu der scheinbaren Kraft, welche die Vektorsumme der Druckkraft und der Trägheitskraft ist; die Dicke der Einheitsäquipotentialschichten ist gleich dem reziproken des Zahlenwertes dieser auf die Masseneinheit bezogenen scheinbaren Kraft:

$$(3\,\mathrm{A}) \qquad h_\varphi = \frac{1}{|s\mathbf{G} - \dot{\boldsymbol{v}}|}$$

(B). Die Isobarflächen verlaufen senkrecht zu der scheinbaren Kraft, welche die Vektorsumme der Schwerkraft und der Trägheitskraft ist; die Dicke der Einheitsisobarschichten ist gleich dem reziproken des Zahlenwertes dieser auf die Volumeneinheit bezogenen scheinbaren Kraft:

$$(3\,\mathrm{B}) \qquad h_p = \frac{1}{|\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{v}}|}$$

Die beiden Sätze sind zwei Formulierungen desselben dynamischen Prinzipes, im Falle (A) ausgedrückt für die Ausmessung des Schwerkraftfeldes nach hydrostatisch-hydrodynamischen Methoden (oder kürzer für die barometrische Höhenmessung), im Falle (B) ausgedrückt, um die Erscheinungen des Druckfeldes in einem bekannten Schwerkraftfelde zu verfolgen. Nach diesem Satz sieht man, wie sich die Isobarflächen quasi-hydrostatisch nach derjenigen scheinbaren Kraft einstellen, die ein Beobachter, der die Bewegung mitmacht, als Schwerkraft empfindet: die Isobarflächen stellen sich immer senkrecht zu dieser Kraft ein und ändern ihren gegenseitigen Abstand im umgekehrten Verhältnis zu dieser Kraft.

Um die Beziehung des Druck- und des Potentialfeldes zueinander graphisch darzustellen, hat man zwei Methoden zur Verfügung.

(I) Man kann die Schnittlinien einer Isobarfläche $p = p_0$ mit einer Reihe von Niveauflächen $\varphi = 0, 1, 2, 3, \ldots$ zeichnen. D. h. man zeichnet eine Karte der *dynamischen Topographie* der Fläche. Eine Anzahl solcher Karten, die eine Reihe von Isobarflächen $p = 1$, $p = 2$, $p = 3, \ldots$ darstellen, gibt ein erstes geometrisches Bild der Beziehung des Isobarfeldes zu dem Potentialfelde.

(II) Man kann die Schnittlinien einer Niveaufläche $\varphi = \varphi_0$ mit einer Reihe von Isobarflächen $p = 0, 1, 2, \ldots$ zeichnen. Eine Anzahl solcher *Isobarkarten in gegebenen Niveaus* $\varphi = 0, 1, 2, \ldots$ geben eine ebenso vollständige Darstellung wie (I) von der Beziehung zwischen Druckfeld und Potentialfeld.

In beiden Darstellungen kommen dieselben Kurven zur Anwendung, die Schnittlinien zwischen den Isobarflächen und den Niveauflächen,

nur nach verschiedenen Prinzipien gruppiert, mit dem Resultat, daß Karten mit wesentlich verschiedener Anknüpfung an die Dynamik des flüssigen Systems entstehen. Wir werden deshalb in den folgenden Entwicklungen unsere Aufmerksamkeit besonders auf die verschiedenen Eigenschaften zu richten haben, die einerseits bei den Karten der dynamischen Topographie der Isobarflächen und andererseits bei den Isobarkarten in gegebenen Niveaus auftreten.

Skalare Multiplikation der Gleichungen (2′) mit dem Linienelemente $d\mathbf{r}$ ergibt:

(4A) $d\varphi = (-s\nabla p - \dot{\mathbf{v}}) \cdot d\mathbf{r}$, (4B) $dp = q(-\nabla\varphi - \dot{\mathbf{v}}) \cdot d\mathbf{r}$.

Setzt man in der ersten dieser Gleichung $d\varphi = 0$, in der zweiten $dp = 0$, so erhält man:

(5A) $(-s\nabla p - \dot{\mathbf{v}}) \cdot d\mathbf{r} = 0$, (5B) $(-\nabla\varphi - \dot{\mathbf{v}}) \cdot d\mathbf{r} = 0$.

Die erste Gleichung ist die Differentialgleichung der Niveauflächen, wie sie im Druckfeld verlaufen, und die zweite ist die Differentialgleichung der Isobarflächen, wie sie im Potentialfeld verlaufen. Diese Gleichungen definieren bzw. die Niveau- und die Isobarflächen als die Normalflächen zu den in den Sätzen (A) bzw. (B) erwähnten scheinbaren Kräften.

Es ist bemerkenswert, daß in der Differentialgleichung der Isobarflächen die Massenvariable nicht vorkommt.

Integriert man die Gleichungen (4) längs einer beliebigen Kurve von einem Punkte 0 zu einem Punkte 1, so erhält man:

(6A) $\varphi_1 - \varphi_0 = \int (-s\nabla p - \dot{\mathbf{v}}) \cdot d\mathbf{r}$, (6B) $p_1 - p_0 = \int q(-\nabla\varphi - \dot{\mathbf{v}}) \cdot d\mathbf{r}$.

Die erste Formel löst die Aufgabe der barometrischen Höhenmessung, d. h. den Potentialunterschied zweier Punkte zu bestimmen, wenn man längs einer Kurve, welche die beiden Punkte verbindet, die Werte von Druck, spez. Volumen und Beschleunigung der Luftteilchen kennt. Die zweite Formel gestattet uns, den Druckunterschied zweier Punkte zu bestimmen, wenn man längs einer Kurve, die diese Punkte verbindet, die zusammengehörigen Werte von Potential, Dichte und Beschleunigung kennt. Hat man durch Integration der Gleichung (5B) den Verlauf der Isobarflächen gefunden, so genügt es, die Integration (6B) längs einer Kurve auszuführen, die sämtliche Flächen schneidet, um die Druckwerte der einzelnen Isobarflächen zu finden.

Speziell günstig für die Ausführung der Integrationen (6) sind *Kurven, die überall senkrecht zur Richtung der Beschleunigung verlaufen.* Längs solcher Kurven reduzieren sich die Integrale (6) auf die statischen Integrale:

(7A) $\varphi_1 - \varphi_0 = -\int s\,\delta p$, (7B) $p_1 - p_0 = -\int q\,\delta\varphi$,

das sind die Integrale **27** (10), die wir schon in verschiedenen Spezialfällen ausgewertet haben, **28**. Dies kommt z. B. bei der dynamischen Untersuchung des zirkularen Wirbels vor, weil hier die Beschleunigung senkrecht zur Wirbelachse ist. Im stationären zirkularen Wirbel kann man deshalb die Potential- oder Druckfelder nach den Gleichgewichtsformeln (7A) oder (7B) berechnen, vorausgesetzt, daß man die Integration längs Geraden parallel der Wirbelachse ausführt.

Andererseits hat man einen einfachen Spezialfall von (6A), wenn man die Kurve in eine Isobarfläche legt und von (6B), wenn man die Kurve in eine Niveaufläche legt. In der Isobarfläche hat man $\nabla p \cdot d\boldsymbol{r} = dp = 0$, in der Niveaufläche $\nabla \varphi \cdot d\boldsymbol{r} = d\varphi = 0$, und die Gleichungen (6) werden:

$$\text{(8A)} \quad \varphi_1 - \varphi_0 = -\int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot d\boldsymbol{r}, \qquad \text{(8B)} \quad p_1 - p_0 = -\int q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot d\boldsymbol{r}.$$

Die erste Gleichung gibt die Potentialdifferenzen, die verschiedene Punkte einer und derselben Isobarfläche haben können, die zweite gibt die Druckdifferenzen, die man in einem und demselben Niveau finden kann.

Die Gleichungen (8) geben wichtige Eigenschaften derjenigen zweidimensionalen Vektoren, die durch die Projektion des Vektors $\dot{\boldsymbol{v}}$ auf die Isobarfläche und des Vektors $q\dot{\boldsymbol{v}}$ auf die Niveaufläche bestimmt sind. Wir werden die Isobarprojektion durch den Index *is*, die Projektion auf die Niveaufläche oder die Horizontalprojektion durch den Index *h* bezeichnen. Für diese zweidimensionalen Vektoren kann man dann nach (8) die folgenden Gleichungen schreiben:

$$\text{(9A)} \quad \dot{\boldsymbol{v}}_{is} = -\nabla_{is}\varphi, \qquad \text{(9B)} \quad q\dot{\boldsymbol{v}}_h = -\nabla_h p,$$

wo ∇_{is} und ∇_h Aszendentenoperationen in den betreffenden Flächen sind. Also: die Isobarprojektion der Beschleunigung ist ein zweidimensionaler potentieller Vektor mit dem Wert des Schwerepotentiales in der Isobarfläche als Potential; und die Horizontalprojektion des Vektors Dichte mal Beschleunigung ist ein potentieller Vektor mit dem Wert des Druckes in der Niveaufläche als Potential. Es folgen hieraus wichtige Fundamentaleigenschaften der oben definierten Karten. Die topographischen Karten der Isobarflächen geben die lamellare Darstellung der Isobarkomponente $\dot{\boldsymbol{v}}_{is}$ der Beschleunigung: dieser zweidimensionale Vektor $\dot{\boldsymbol{v}}_{is}$ ist senkrecht zu den Niveaukurven der Karte im Sinne abnehmenden Potentiales gerichtet und numerisch gleich dem Reziproken des Abstandes zwischen den Einheitsniveaukurven. Ähnlich geben die Isobarkarten in gegebenen Niveaus die lamellare Darstellung der Horizontalkomponente $q\dot{\boldsymbol{v}}_h$ des Vektors Dichte mal Beschleunigung: Dieser zweidimensionale Vektor $q\dot{\boldsymbol{v}}_h$ ist senkrecht zu den Isobarkurven im Sinne abnehmenden Druckes gerichtet und ist numerisch gleich dem

Reziproken des Abstandes zwischen den Isobarkurven für den Druckunterschied Eins.

Die Gleichung (9A) kann man auch skalar

(10) $$\dot{v}_{is} = -\frac{d\varphi}{ds}$$

schreiben, wo ds das Element einer Kurve größten Gefälles auf der Isobarfläche ist. Ersetzt man hier $d\varphi$ durch $g\,dz$, so findet man die Verhältniszahl dz/ds, welche der Sinus des Winkels θ_p ist, den die Isobarfläche mit der Niveaufläche bildet:

(11) $$\sin\theta_p = -\frac{\dot{v}_{is}}{g}.$$

Man hat also die einfache Relation: das Verhältnis der isobaren Beschleunigungskomponente zur Schwerebeschleunigung gibt den Sinus des Neigungswinkels der Isobarfläche.

Die isobare Beschleunigungskomponente läßt sich durch die vertikale Beschleunigungskomponente $\dot{v}_v$ und die horizontale $\dot{v}_h$ ausdrücken: $\dot{v}_{is} = \dot{v}_v \sin\theta_p + \dot{v}_h \cos\theta_p$. Setzt man dies in (11) ein und löst nach den Winkel θ_p auf, so findet man die Tangente des Winkels zwischen Isobarfläche und Niveaufläche

(12) $$\operatorname{tg}\theta_p = -\frac{\dot{v}_h}{g + \dot{v}_v}$$

als das Verhältnis der horizontalen Beschleunigung zu der Summe der Schwerebeschleunigung und der vertikalen Beschleunigung. Diese Formel findet man auch leicht von der Bewegungsgleichung aus, indem der zu der Isobarfläche senkrechte Vektor $\mathbf{g} - \dot{\mathbf{v}}$ die Horizontalkomponente $-\dot{v}_h$ und die Vertikalkomponente $-g - \dot{v}_v$ hat. Bei dem Übergang von dem Vektor $\mathbf{g} - \dot{\mathbf{v}}$ zu der Vertikalkomponente desselben tritt g mit dem negativen Vorzeichen auf, weil die Schwerkraft nach unten gerichtet ist.

Wenn die Beschleunigung rein horizontal ist, vereinfacht sich die Formel (12) auf

(13) $$\operatorname{tg}\theta_p = -\frac{\dot{v}_h}{g},$$

die beispielsweise die Neigung der Isobarflächen im stationären zirkularen Wirbel im konstanten Schwerkraftfelde gibt.

Die Formeln (1) bis (12) beziehen sich auf ganz beliebige Flüssigkeitsbewegungen, die mit Beschleunigungen beliebiger Richtung und beliebiger Intensität verlaufen können. Je mehr man aber von den reinen Lokalerscheinungen zu Bewegungen großen Ausmaßes übergeht, um so kleiner werden die Beschleunigungen im Vergleich zur Schwerebeschleunigung und um so mehr nähert sich die Druckverteilung der durch das Schwerefeld bestimmten statischen Druckverteilung. Und

noch eins kommt bei den ganz großen atmosphärischen und ozeanischen Bewegungen hinzu: ebenso wie die vertikalen Dimensionen der Atmosphäre und des Meeres klein sind im Vergleich zu den horizontalen, werden auch die vertikalen Komponenten von Geschwindigkeit und Beschleunigung klein gegenüber den horizontalen.

Bei den großen atmosphärischen und ozeanischen Bewegungen kann man deshalb vielfach die horizontalen Beschleunigungskomponenten als klein von erster Ordnung und die vertikalen als klein von zweiter Ordnung im Vergleich zur Schwerebeschleunigung betrachten. Die Bewegung findet dann, wie wir sagen werden, unter *quasi-statischen* Bedingungen statt. Die Gleichgewichtsgleichung scheint dann längs ieder einzelnen Vertikalen sehr angenähert erfüllt zu sein. Infolge der horizontalen Beschleunigungen sind aber die Isobarflächen schwach geneigt, und man findet verschiedene Gleichgewichtsbedingungen längs zwei verschiedenen Vertikalen, die hinlänglich weit voneinander entfernt sind.

Unter diesen quasi-statischen Bedingungen kann man die Formeln (11), (12), (13) als miteinander identisch betrachten, weil bei den kleinen Winkeln kein Unterschied zwischen Sinus, Tangente und Winkel selbst besteht, und weil gleichzeitig der Unterschied zwischen Isobarkomponente und Horizontalkomponente der Beschleunigung verschwindet. Endlich kann man bei dieser Bewegungsform die statischen Formeln (7A) und (7B) in Anwendung bringen, nicht nur auf rein vertikale Kurven, die senkrecht zu der Horizontalbeschleunigung verlaufen, sondern auch auf Kurven, die wir als *quasi-vertikal* bezeichnen wollen, das sind solche Kurven, deren Neigungswinkel mit der Horizontale groß sind im Vergleich zu den Neigungswinkeln der Isobarflächen mit der Horizontale.

37. Diskontinuitätsflächen. Beim Gleichgewichte herrscht Homotropie der Felder der Masse, des Druckes und des Potentiales. Wie sich bei der Bewegung die Isobarflächen von den Niveauflächen der Schwerkraft trennen, ist eben gezeigt worden. Wie sich gleichzeitig die äquisubstantiellen Flächen verhalten — außer bei den autobarotropen Flüssigkeiten, wo sie ein für allemal den Isobarflächen folgen —, wird dagegen erst später allgemein erörtert werden können. Der Extremfall einer Diskontinuitätsfläche, an der die Dichte und das spez. Volumen einen plötzlichen Sprung erleidet, läßt sich aber gleich unter Berücksichtigung der Grenzflächenbedingungen behandeln.

In einer inkompressiblen Flüssigkeit gehört eine Diskontinuitätsfläche direkt dem System der äquisubstantiellen Flächen an, sie kann als eine Anzahl von zusammenfallenden äquisubstantiellen Flächen betrachtet werden. In der kompressiblen Flüssigkeit gehen die äquisubstantiellen Flächen von der einen Seite in die Diskontinuitätsfläche hinein, folgen ihr eine gewisse Strecke und gehen dann auf der anderen

Seite wieder hinaus. Sie besteht also auch in diesem Falle überall aus zusammenfallenden äquisubstantiellen Flächen, obschon nicht in ihrer ganzen Länge aus denselben äquisubstantiellen Flächen. Die Abb. 5a, b zeigen, wie man die Diskontinuitätsfläche (a) als Grenzfall einer kontinuierlichen Verteilung (b) ansehen kann. Wir bezeichnen im folgenden

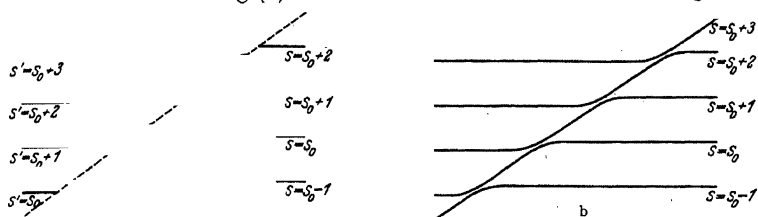



Abb. 5. a) Diskontinuitätsfläche, b) Übergangsschicht.

die Größen auf der einen Seite der Fläche wie früher mit ungestrichenen, auf der anderen Seite mit den entsprechenden gestrichenen Buchstaben.

An der Diskontinuitätsfläche sind nach den Grenzflächenbedingungen der Druck und die Normalkomponente der Geschwindigkeit stetig. Die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit kann sich dagegen sprunghaft ändern, und die Vektordifferenz $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$ ist also ein zu der Fläche tangentieller Vektor, der die Geschwindigkeit darstellt, womit die Massen beiderseits der Fläche *aufeinandergleiten.* Befindet sich die Diskontinuitätsfläche in Ruhe, so sind die beiderseitigen normalen Geschwindigkeitskomponenten Null, und die Stromlinien laufen tangentiell zu der Diskontinuitätsfläche, ohne sie zu durchsetzen (Abb. 6a). Bewegt sich dagegen die Fläche, so hat jede der Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$ eine Komponente längs der Normale der Fläche gleich der Geschwindigkeit der Fläche senkrecht zu sich selbst. *In diesem Falle durchsetzen die Stromlinien die Diskontinuitätsfläche* (Abb. 6b), *aber mit einer Brechung, die um so größer ist, je größer der tangentielle Geschwindigkeitssprung ist.* Diese Brechung der Stromlinien ist ein wichtiges Kennzeichen der atmosphärischen Diskontinuitätsflächen oder richtiger der Übergangsschichten, die so dünn sind, daß sie im Kartenmaßstab als Flächen erscheinen.

Abb. 6. Geschwindigkeitsfelder bei einer Diskontinuitätsfläche.

Sind die Drucke $p(x, y, z, t)$ und $p'(x, y, z, t)$ in den flüssigen Massen beiderseits der Grenzfläche gefunden, so gibt die Kontinuität des Druckes:

$$p - p' = 0, \tag{1}$$

wodurch die Gleichung der Diskontinuitätsfläche in endlicher Form dargestellt wird. Um die Eigenschaften der Fläche zu verfolgen, bilden wir nach **36** (4B) die Druckdifferentiale dp und dp':

$$\begin{cases} dp = q(-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}}) \cdot d\boldsymbol{r}, \\ dp' = q'(-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}}') \cdot d\boldsymbol{r}'. \end{cases} \tag{2}$$

Auf der einen Seite der Fläche laufen die Isobarflächen senkrecht zum Vektor $-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}}$, auf der anderen Seite senkrecht zum Vektor $-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}}'$. Jetzt sind die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}'$ verschieden, und gewöhnlich werden dann auch die Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}$ und $\dot{\boldsymbol{v}}'$ beiderseits der Grenzfläche verschieden sein. *An der Diskontinuitätsfläche erfolgt deshalb im allgemeinen eine Brechung der Isobarflächen.* Dies gibt wieder ein wichtiges Merkmal, um bei der Analyse der Wetterkarten die Diskontinuitätsflächen aufzufinden.

Die beiden physikalisch verschiedenen Linienelemente $d\boldsymbol{r}$ und $d\boldsymbol{r}'$ in den Gleichungen (2) können wir jetzt in der Grenzfläche der beiden Flüssigkeitsmassen geometrisch zusammenfallen lassen. Für diese in der Grenzfläche zusammenfallenden Linienelemente gilt dann nach (1) $dp - dp' = 0$, und wir erhalten:

$$[(q - q')(-\nabla\varphi) - (q\dot{\boldsymbol{v}} - q'\dot{\boldsymbol{v}}')] \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Dividiert man mit $q - q'$ und führt die Hilfsgröße

$$\dot{\boldsymbol{v}}^* = \frac{q\dot{\boldsymbol{v}} - q'\dot{\boldsymbol{v}}'}{q - q'} \tag{3}$$

ein, so findet man als *Differentialgleichung der Diskontinuitätsfläche*:

$$[-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}}^*] \cdot d\boldsymbol{r} = 0, \tag{4}$$

eine Gleichung, die, wie man sieht, aus der Differentialgleichung für die Isobarflächen **36** (5B) entsteht, wenn man den einfachen Beschleunigungsvektor $\dot{\boldsymbol{v}}$ durch den zusammengesetzten Beschleunigungsvektor $\dot{\boldsymbol{v}}^*$ nach (3) ersetzt. Dies gestattet uns aus dem, was wir für die Neigung der Isobarflächen relativ zu den Niveauflächen entwickelt haben, entsprechendes für die Neigung der Diskontinuitätsflächen abzuleiten. Bemerken wir dabei zugleich, daß (4) in die Differentialgleichung einer Niveaufläche übergeht, wenn $\dot{\boldsymbol{v}}^* = 0$, d. h. wenn $q\dot{\boldsymbol{v}} = q'\dot{\boldsymbol{v}}'$, und in die Differentialgleichung einer Isobarfläche, wenn $\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{v}}' = \dot{\boldsymbol{v}}^*$, d. h. wenn keine Diskontinuität der Beschleunigung vorliegt, so findet man die folgende Regel:

Die Diskontinuitätsfläche hat ein Gefälle in Richtung der Horizontalprojektion des Vektors $\dot{\boldsymbol{v}}^*$ und fällt dabei mit einer Isobarfläche zusammen, wenn kein Beschleunigungssprung vorliegt, $\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{v}}'$, dagegen mit einer Niveaufläche, wenn kein Sprung des Vektors Dichte mal Beschleunigung vorliegt, $q\dot{\boldsymbol{v}} = q'\dot{\boldsymbol{v}}'$.

Da der Vektor $\dot{\boldsymbol{v}}^*$ jede Richtung im Raume haben kann, kann die Diskontinuitätsfläche jeden beliebigen Winkel sowohl mit den Niveauflächen wie mit den Isobarflächen bilden.

Der Neigungswinkel mit den Niveauflächen wird, der Gleichung **36** (12) entsprechend, wenn wir die Indices h und v durch t und n ersetzen, durch die Formel

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\theta_d = -\frac{\dot{v}_t^*}{g + \dot{v}_n^*} = -\frac{q\dot{v}_t - q'\dot{v}_t'}{g(q - q') + q\dot{v}_n - q'\dot{v}_n'}$$

gegeben, wo die Bedeutung von $\dot{v}_t^*$ und $\dot{v}_n^*$ direkt aus (3) hervorgeht. In dem Spezialfalle, wo die Beschleunigung horizontal ist, ergibt sich die einfachere Formel:

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\theta_d = -\frac{\dot{v}_t^*}{g} = -\frac{1}{g}\,\frac{q\dot{v}_t - q'\dot{v}_t'}{q - q'}$$

die z. B. in einem horizontalen zirkularen Wirbel in Anwendung kommt.

Die oben betrachtete Diskontinuitätsfläche ist nicht die einzige, welche in den meteorologischen Anwendungen von Wichtigkeit ist. Wir begegnen dort auch einer anderen Art, die wir in Analogie mit den Bezeichnungen von HADAMARD eine *Diskontinuitätsfläche erster Ordnung* nennen wollen (dabei ist die gewöhnliche Diskontinuitätsfläche als von *nullter Ordnung* zu betrachten). Die Diskontinuitätsfläche erster Ordnung ist definitionsgemäß dadurch charakterisiert, daß Beschleunigung und Dichte an der Fläche stetig sind, d. h.:

$$(7) \qquad q = q' \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{v}}',$$

während ihre Ableitungen normal zur Fläche einen Sprung erleiden.

Aus der Bewegungsgleichung **30** (3) sieht man, daß der Druckgradient dann beiderseits der Fläche derselbe ist, d. h.:

$$(8) \qquad \nabla p = \nabla p'.$$

Die TAYLORsche Entwicklung der Drucke p und p' lautet nun:

$$p(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}) = p(\boldsymbol{r}) + \nabla p \cdot d\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r} \cdot \nabla\nabla p \cdot d\boldsymbol{r} + \cdots$$
$$p'(\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}') = p'(\boldsymbol{r}) + \nabla p' \cdot d\boldsymbol{r}' + d\boldsymbol{r}' \cdot \nabla\nabla p' \cdot d\boldsymbol{r}' + \cdots$$

Da p gleich p' ist für $d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}'$, so folgt hieraus durch Subtraktion unter Beachtung von (8):

$$(9) \qquad d\boldsymbol{r} \cdot \nabla(\nabla p - \nabla p') \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Durch Einführung der Werte von ∇p und $\nabla p'$ nach der Bewegungsgleichung **30** (3) ergibt dies

$$d\boldsymbol{r} \cdot \nabla[q(-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}}) - q'(-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}}')] \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

oder nach Ausführung der Differentiationen und Beachtung von (7):

$$(9') \qquad d\boldsymbol{r} \cdot [\nabla(q - q')\,(\nabla\varphi + \dot{\boldsymbol{v}}) + q\nabla(\dot{\boldsymbol{v}} - \dot{\boldsymbol{v}}')] \cdot d\boldsymbol{r} = 0\,.$$

Die Gleichung (9') wird besonders einfach, wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, daß die Diskontinuitätsfläche im betrachteten Punkte die Ebene $z = 0$ berührt. Da $q - q'$, $\dot{\boldsymbol{v}} - \dot{\boldsymbol{v}}'$ längs der Fläche Null sind, hat man:

$$\frac{\partial}{\partial x}(q - q') = \frac{\partial}{\partial y}(q - q') = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\dot{\boldsymbol{v}} - \dot{\boldsymbol{v}}') = \frac{\partial}{\partial y}(\dot{\boldsymbol{v}} - \dot{\boldsymbol{v}}') = 0\,.$$

Betrachten wir den Fall, wo die einzige äußere Kraft die Schwerkraft mit den Komponenten 0, g_y, g_z ist, so vereinfacht sich die Gleichung (9') auf:

$$\left\{(g_z + \dot{v}_z)\frac{\partial(q-q')}{\partial z} + q\frac{\partial(\dot{v}_z - \dot{v}_z')}{\partial z}\right\}dz + \left\{(g_y + \dot{v}_y)\frac{\partial(q-q')}{\partial z} + q\frac{\partial(\dot{v}_y - \dot{v}_y')}{\partial z}\right\}dy = 0\,.$$

Soll diese Gleichung mit $dz = 0$ identisch sein, so muß:

$$\frac{\dot{v}_y \dfrac{\partial(q - q')}{\partial z} + q\dfrac{\partial(\dot{v}_y - \dot{v}_y')}{\partial z}}{\dfrac{\partial(q - q')}{\partial z}}$$

sein. Der Winkel θ_d', den die Diskontinuitätsfläche mit der Horizontalebene bildet, wird durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\theta_d' = \frac{g_y}{g_z}$$

gegeben. Ist θ_d', wie es in den Anwendungen immer der Fall ist, klein, so hat man angenähert:

$$g_z = g\,,$$

und es ergibt sich:

$$(10) \qquad \operatorname{tg}\theta_d' = \frac{g_y}{g} = -\frac{\dot{v}_y\dfrac{\partial(q - q')}{\partial z} + q\dfrac{\partial(\dot{v}_y - \dot{v}_y')}{\partial z}}{g\dfrac{\partial(q - q')}{\partial z}}$$

Wenn θ_d' klein ist, kann man ohne großen Fehler $\partial/\partial z$ als Ableitung längs der Vertikalen statt als Ableitung senkrecht zur Fläche deuten.

38. Niveauflächen und Isobarflächen im stationären zirkularen Wirbel. Die verschiedenen Resultate, die wir aus den Grundgleichungen ableiteten, werden wir anwenden auf den wichtigen Fall des stationären zirkularen Wirbels, deren Kinematik wir schon (**20**) diskutiert haben.

Die kinematische Analyse zeigte, daß wir eine besondere Klasse dieser Wirbel ausscheiden können, die durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet ist: die Beschleunigung ist ein potentieller Vektor, die Zirkulation geschlossener materieller Kurven ist zeitlich unveränderlich und die koaxialen Zylinderflächen sind solidifiierbar. Da nun, nach **33**, S. 111,

Wirbelfreiheit der Beschleunigung und Barotropie des Massenfeldes untrennbar zusammengehören, so können wir den speziellen Wirbeltypus *barotrop* und den allgemeinen *baroklin* nennen. Wir haben somit allgemein:

Der *barokline Wirbel* ist, außer durch ein baroklines Massenfeld, noch durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet: die Beschleunigung ist ein wirbelnder Vektor, die Zirkulation geschlossener materieller Kurven ist eine lineare Funktion der Zeit und die koaxialen Zylinderflächen sind nicht solidifiierbar.

Der *barotrope Wirbel* ist außer durch ein barotropes Massenfeld noch durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet: wirbelfreie Beschleunigung, zeitlich unveränderliche Zirkulation geschlossener materieller Kurven, solidifiierbare koaxiale Zylinderflächen.

In der autobarotropen Flüssigkeit sind nur barotrope Wirbel möglich, während in der allgemeinen Flüssigkeit sowohl der allgemeine barokline wie der spezielle barotrope Wirbel auftreten kann.

Im stationären zirkularen Wirbel ist die Beschleunigung die rein zentripetale **20** (5):

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\omega^2 \boldsymbol{\varrho} = -\omega^2 \nabla(\tfrac{1}{2}\varrho^2)\,. \tag{1}$$

Die Ausdrücke **36** (4) des Potentialdifferentiales und des Druckdifferentiales im stationären zirkularen Wirbel werden dann:

$$\text{(2A)}\quad d\varphi = (-s\nabla p + \omega^2\boldsymbol{\varrho})\cdot d\boldsymbol{r}, \qquad \text{(2B)}\quad dp = q(-\nabla\varphi + \omega^2\boldsymbol{\varrho})\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Die Differentialgleichungen der Niveauflächen bzw. der Isobarflächen werden:

$$\text{(3A)}\quad (-s\nabla p + \omega^2\boldsymbol{\varrho})\cdot d\boldsymbol{r} = 0, \qquad \text{(3B)}\quad (-\nabla\varphi + \omega^2\boldsymbol{\varrho})\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

Die letztere, die Differentialgleichung der Isobarflächen, sagt aus, daß diese Flächen senkrecht zu der Resultante der äußeren Kraft $-\nabla\varphi$ und der Zentrifugalkraft $\omega^2\boldsymbol{\varrho}$ verlaufen.

Für den barotropen Wirbel sind beide Gleichungen integrabel. Denn wegen der Barotropie ist $s\nabla p$ ein lamellarer Vektor $s\nabla p = \nabla\pi$, und die wirbelfreie Zentripetalbeschleunigung $-\omega^2\boldsymbol{\varrho}$ läßt sich durch das Aszendentenpotential χ:

$$-\omega^2\boldsymbol{\varrho} = \nabla\chi, \quad \text{wo} \quad \chi = -\int \omega^2\boldsymbol{\varrho}\cdot d\boldsymbol{r}, \tag{4}$$

ausdrücken, das gleichzeitig das *Gradientenpotential der Zentrifugalkraft* wird, $\omega^2\boldsymbol{\varrho} = -\nabla\chi$. Führt man dieses in (3) ein, so erhält man

$$\text{(5A)}\quad \pi + \chi = \text{konst.}, \qquad \text{(5B)}\quad \varphi + \chi = \text{konst.}$$

als endgültige Gleichungen der Niveauflächen bzw. der Isobarflächen des barotropen Wirbels. Wir werden einige Anwendungen der letzten Gleichung machen.

Die Größe

$$\psi = \varphi(\varrho, z) + \chi(\varrho) \tag{6}$$

ist das Potential der scheinbaren Kraft, die als Vektorsumme der äußeren Kraft und der Zentrifugalkraft entsteht. Die Isobarflächen des barotropen zirkularen Wirbels sind die Niveauflächen dieses zusammengesetzten Potentiales, das man somit zeichnerisch durch graphische Addition der Felder der beiden einzelnen Potentiale findet.

Im konstanten Schwerefelde mit dem Potential $\varphi = gz$ sind die Isobarflächen eines beliebigen barotropen Wirbels die Niveauflächen des Potentiales:

$$\psi = gz + \chi(\varrho) \,. \tag{7}$$

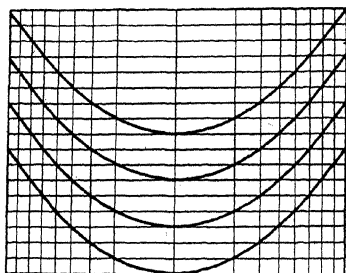
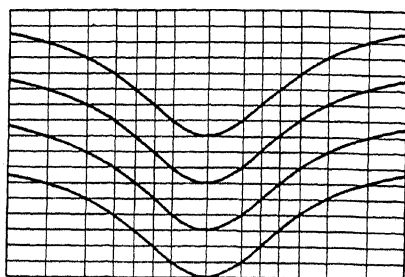



Abb. 7.

Abb. 8.

Abb. 7 u. 8. Barotrope zirkulare Wirbel im konstanten Schwerefelde.

Wir können zwei Beispiele betrachten:

$$\chi = \tfrac{1}{2}\omega^2 \varrho^2 \quad \text{gibt} \quad \psi = gz + \tfrac{1}{2}\omega^2 \varrho^2 \,, \tag{8}$$

$$\chi = \frac{2\omega_0^2 \varrho_0^2}{1 + \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}} \quad \text{gibt} \quad \psi = gz + \frac{2\omega_0^2 \varrho_0^2}{1 + \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}} \,. \tag{9}$$

Die Abb. 7 und 8 geben die durch graphische Addition gefundenen Profilkurven der Isobarflächen. Die erste Figur stellt die bekannten Parabeln dar, die sich ergeben, wenn die Flüssigkeit wie ein starrer Körper rotiert. Die Profilkurven der zweiten Abbildung sind dritten Grades mit den horizontalen Geraden $gz =$ konst. als Asymptoten. Die Winkelgeschwindigkeit in diesem Wirbel

$$\omega = \frac{2\omega_0}{1 + \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}} \,, \tag{9'}$$

fängt mit dem Maximalwert $2\omega_0$ an der Achse an, wo die Bewegung angenähert diejenige eines starren Körpers ist, sinkt in dem Abstande ϱ_0 auf den halben Wert ω_0 herab und strebt im unendlich Fernen wie ϱ^{-2} gegen Null. Die entsprechende lineare Geschwindigkeit $v = \omega\varrho$

fängt mit dem Wert Null an der Achse an, steigt zu dem Maximalwert $v_0 = \omega_0 \varrho_0$ im Abstande ϱ_0 an und nimmt dann wieder im unendlich Fernen nach dem Gesetz ϱ^{-1} ab. In diesem Wirbel dritten Grades kombiniert sich also die Rotationsbewegung eines starren Körpers nahe an der Achse mit der wirbelfreien Zirkulationsbewegung im unendlich Fernen. Im Abstand ϱ_0 von der Achse, wo der Übergang von dem einen Wirbeltypus zum anderen am schnellsten ist, hat die Isobarfläche ihre halbe Tiefe erreicht.

Als erstes Glied in (6) führen wir weiter das Potential einer Zentralkraft ein, die zu einem Punkte auf der Wirbelachse hin gerichtet ist. Ist $\boldsymbol{r}$ der von diesem Punkte aus gemessene Radiusvektor, so bekommt man als Potential der scheinbaren Kraft:

$$\psi = \varphi(r) + \chi(\varrho)\,, \tag{10}$$

deren Niveauflächen die gesuchten Isobarflächen sind.

Ein erstes Beispiel ist:

$$\psi = \frac{1}{2}\frac{g}{r_0}(r^2 - r_0^2) - \frac{1}{2}\Omega^2\varrho^2\,. \tag{11}$$

Das erste Glied ist das Potential der Schwerkraft im Innern einer homogenen Kugel, wenn g die Anziehung im Abstande r_0 vom Zentrum ist. Das Potential ist so bestimmt, daß es für $r = r_0$ den Wert 0 hat. Das zweite Glied ist das Potential der Zentrifugalkraft bei der Rotation der ganzen Masse als fester Körper mit der Winkelgeschwindigkeit Ω. Die Flächen $\psi =$ konst. sind Umdrehungsellipsoide. Deutet man g als der polare Wert der Schwere, r_0 als der polare Erdradius und Ω als die Winkelgeschwindigkeit der Erde, so gibt $\psi = 0$ ein Ellipsoid, dessen äquatoriale Achse 21,9 km länger ist als die polare, während die geodätischen Messungen 21,1 ergeben. Der Unterschied rührt von der heterogenen Verteilung der Massen im Erdinnern her und von der nicht genau zentralen Richtung der Schwerkraft, wenn der anziehende Körper Ellipsoidgestalt hat.

Außerhalb der Erde kann man

$$\psi = -g_0 r_0^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \frac{1}{2}\Omega^2\varrho^2 \tag{12}$$

setzen. Die Flächen $\psi =$ konst. stellen dann die Isobarflächen in einer mit der Erde rotierenden Atmosphäre dar (Abb. 9), wenn diese Atmosphäre im Vergleich zu der festen Erde verschwindende Masse hat. $\psi = 0$ gibt eine fast ellipsoide Fläche, deren äquatorialer Radius 22,0 km länger ist als der polare, die also fast dieselbe Darstellung der Erdoberfläche gibt wie (11). Weiter außen weichen die Flächen immer mehr von der Ellipsoidform ab. Eine singuläre Fläche schneidet sich selbst längs eines Kreises in der Äquatorebene. Auf diesem Kreise halten sich

Schwere und Zentrifugalkraft das Gleichgewicht. Diese singuläre Fläche begrenzt einen linsenförmigen Raum um die Erde, innerhalb dessen die Schwerkraft eine mit der Erde rotierende Atmosphäre festhält. Der äquatoriale und der polare Durchmesser dieser Linse verhalten sich wie 3:2 und der äquatoriale Durchmesser beträgt 6,7, der polare 4,45 Erddurchmesser.

Schließlich können wir die Kombination

$$\psi = -g_0 r_0^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \quad \frac{2\omega_0^2 \varrho_0^2}{1 + \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}} \tag{13}$$

betrachten (Abb. 10). Bei hinlänglich kleinen Werten von ω_0 wird die Anziehung überall die Oberhand gewinnen, und sämtliche Äquipotential-

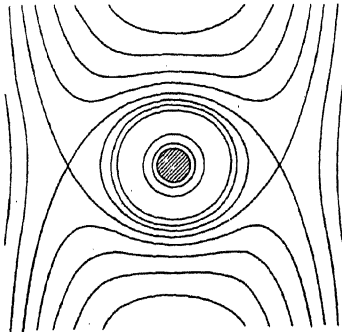



Abb. 9.

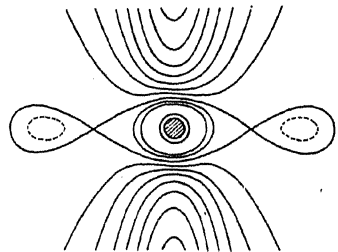



Abb. 10.

Abb. 9 u. 10. Barotrope kosmische Wirbel.

flächen werden geschlossene, mehr oder minder flache ellipsoide Flächen. Für hinlänglich große Werte von ω_0 werden zugleich nichtgeschlossene Flächen auftreten. Für alle hinlänglich großen Werte von ω_0 wird es eine mittlere Zone geben, wo die Zentrifugalkraft im Überschuß ist, während die Anziehung die Oberhand gewinnt sowohl in allen größeren als auch in allen kleineren Abständen. Unter den Flächen gibt es dann eine geschlossene singuläre Fläche, die sich längs eines Kreises in der Äquatorebene selbst schneidet und die den Raum in drei verschiedene Gebiete teilt: einen inneren Raum, in dem alle Flächen geschlossen und einfach zusammenhängend sind; einen äußeren Raum, in dem ebenfalls alle Flächen einfach zusammenhängende, geschlossene Flächen sind; und einen ringförmigen Raum, in dem alle Flächen ringförmig sind. Die innerste ringförmige Fläche ist zu einem Kreise in der Äquatorebene zusammengeschrumpft. Zwischen diesem Kreis und dem Kreis, in dem die singuläre Fläche sich selbst schneidet, überwiegt die Zentrifugalkraft die Anziehung, und man hat hier eine Druckinversion, deren Druckgradient zum Anziehungszentrum hin gerichtet ist.

Die gezeichneten Figuren geben den Verlauf der Isobarflächen nur in den barotropen Wirbeln. Die Werte des Druckes auf den verschiedenen Flächen findet man bequem, wenn man die Daten hat, um das Integral **36** (7B) längs einer geraden Linie parallel der Wirbelachse berechnen zu können. Denn längs dieser Linien bestehen die Gleichgewichtsbeziehungen zwischen Potential, Druck und Dichte oder spez. Volumen, und zwar im barotropen Wirbel identisch dieselbe Gleichgewichtsbeziehung längs aller Parallelen zur Wirbelachse. So können beispielsweise längs der Parallelen zur Wirbelachse im barotropen Wirbel, sei er von irdischen oder kosmischen Dimensionen, sämtliche im Abschnitt **28** entwickelten Gleichgewichtsbeziehungen bestehen.

Von den gegebenen Beispielen barotroper Wirbel kann man zu verwandten Beispielen barokliner Wirbel übergehen, indem man die eingehenden Konstanten durch passende Funktionen ersetzt, die explizite oder implizite von z abhängen. Im Ausdruck (9) des Wirbels dritten Grades kann man z. B. die Konstante ω_0 durch eine Funktion $\omega_0(z)$ oder $\omega_0(\varphi)$ ersetzen. Statt des barotropen Wirbels, wo alle Isobarflächen gleich große Depressionen haben, erhält man dann einen baroklinen, in der die verschiedenen Isobarflächen verschieden tiefe Depressionen haben. Hat man die Isobarflächen eines solchen baroklinen Wirbels gefunden, so kann man wieder die Druckwerte mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen längs Parallelen zur Wirbelachse finden. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind aber nicht mehr wie im barotropen Wirbel identisch dieselben für alle diese Geraden, sondern ändern sich mit deren Abstand von der Achse.

Indem wir den Wert (1) der Beschleunigung in **36** (13) einführen, finden wir, daß die Isobarflächen des Horizontalwirbels im konstanten Schwerkraftfelde den Neigungswinkel

$$\operatorname{tg}\theta_p = \frac{v^2}{g\varrho} = \frac{1}{g}\,\omega^2\varrho \tag{14}$$

haben, wodurch die Trichterform dieser Flächen entsteht.

Um die allgemeine Formel **36** (12) auf einen kosmischen Wirbel anwenden zu können, bezeichnen wir mit g_a die reine Anziehungskraft an der betrachteten Stelle. Dieser in der Meridianebene gelegene Vektor bildet einen Winkel φ mit der Rotationsebene oder mit der Äquatorebene des kosmischen Wirbels. Befindet sich der betrachtete Punkt im Abstande ϱ von der Wirbelachse, so hat die Zentripetalbeschleunigung $-\omega^2\varrho$ die Projektionen $\dot{v}_n = -\omega^2\varrho\cos\varphi$ und $\dot{v}_t = -\omega^2\varrho\sin\varphi$ auf Normale und Tangentialebene der Niveauflächen der reinen Anziehungskraft, die ja Flächen senkrecht zum Vektor g_a sind. Die Formel **36** (12) für die Neigung der Isobarflächen relativ zu diesen Niveauflächen wird dann:

$$\operatorname{tg}\theta_p = \frac{\omega^2\varrho\sin\varphi}{g_a - \omega^2\varrho\cos\varphi}\,. \tag{15}$$

Für einen Beobachter, der in Richtung der Zentripetalbeschleunigung sieht, neigen sich die Isobarflächen abwärts unter die Niveauflächen der Anziehungskraft: dies gibt die bekannte Abplattung der Isobarflächen relativ zu den Niveauflächen der reinen Anziehung.

Auf der Erde sind die Niveauflächen der reinen Anziehungskraft g_a sehr nahe Kugeln, und φ wird die geographische Breite auf der Kugel, also $\varrho = r\cos\varphi$, wo r der Kugelradius ist. Führen wir die Winkelgeschwindigkeit der Erde als festen Körper ein, $\omega = \Omega$, so gibt (15):

(16) $$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\Omega^2 \varrho \sin\varphi}{g_a - \qquad \cos\varphi} \qquad \Omega^2 r \sin\varphi \cos\varphi$$

wo

(17) $$g = g_a - \Omega^2 \varrho \cos\varphi = g_a - \Omega^2 r \cos^2\varphi$$

die Größe ist, die wir als Erdbewohner die Schwere nennen und die durch das Zusammenwirken von Massenanziehung und Zentrifugalkraft entsteht. θ_0 ist der Winkel, den die Niveauflächen dieser Schwere mit den Niveauflächen der reinen Anziehung bilden. Oder, wie wir uns kurz ausdrücken wollen: θ_0 ist der Winkel, den die *Niveauflächen der rotierenden Erde* mit den *Niveauflächen der ruhenden Erde* bilden.

Denken wir uns die Atmosphäre fortwährend als zirkulare Wirbel, aber mit Winkelgeschwindigkeiten, die nur wenig von denjenigen der festen Erde abweichen, so können wir

(18) $$\omega = \Omega +$$

einführen, wo v die relativ zur rotierenden Erde gemessene lineare Luftgeschwindigkeit längs den Parallelen ist. Für diesen Begriff wollen wir den Ausdruck *zonaler Wind* benutzen (oder auch zonale Windkomponente, wenn der Wind auch eine Meridionalkomponente besitzt). Ein Erdbewohner wird den positiven zonalen Wind v als einen Westwind, und den negativen zonalen Wind v als einen Ostwind empfinden. Der Westwind gibt vergrößerte, der Ostwind verkleinerte, absolute Umlaufsgeschwindigkeit (18), d. h. in einer Westwindzone haben die Isobarflächen mehr abgeplattete und in einer Ostwindzone weniger abgeplattete Formen als die Niveauflächen der rotierenden Erde. Ein Erdbewohner, der in die Richtung des zonalen Windes blickt — gleichviel des Westwindes wie des Ostwindes —, beobachtet ein nach links gerichtetes Gefälle der Isobarflächen, wenn er sich auf der nördlichen Halbkugel befindet, und ein nach rechts gerichtetes Gefälle, wenn er sich auf der südlichen Halbkugel befindet.

Um den Neigungswinkel θ_{pr} zu bestimmen, welche die Isobarflächen des reinen zonalen Windes mit den Niveauflächen der rotierenden Erde bilden, können wir (18) in (15) einführen. Wenn wir (16) und (17) berücksichtigen und Quadrate der kleinen Größe v/ϱ vernachlässigen, ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\theta_p = \frac{\Omega^2 r \sin\varphi \cos\varphi}{g} + \frac{2\,\Omega}{g}\, v \sin\varphi\,,$$

und da es sich um so kleine Winkel handelt, daß sich die Tangenten wie die Winkel summieren lassen, finden wir unter Berücksichtigung von (16):

(19) $$\operatorname{tg}\theta_{pr} = \frac{2\Omega}{\sigma} v \sin\varphi = \frac{2\Omega_z}{g} v.$$

Im letzten Ausdruck ist Ω_z die Winkelgeschwindigkeit um die lokale Vertikale z. Löst man andererseits diese Gleichung nach v auf, so erhält man:

(20) $$v = \frac{g}{2\Omega\sin\varphi}\operatorname{tg}\theta_{pr} = \frac{g}{2\Omega_z}\operatorname{tg}\theta_{pr}.$$

Die Formeln zeigen: jeder stationären zonalen Windgeschwindigkeit v entspricht auf jedem Breitengrad ein bestimmter Neigungswinkel θ_{pr} der Isobarflächen gegen die Niveauflächen der rotierenden Erde; und umgekehrt, jedem solchen Neigungswinkel θ_{pr} entspricht eine bestimmte stationäre zonale Windgeschwindigkeit v.

Dieses Gesetz gestattet uns, aus der Druckverteilung die Windverteilung oder aus der Windverteilung die Druckverteilung in der als zirkularen Wirbel aufgefaßten Atmosphäre abzuleiten; dies wird im Kapitel XV durchgeführt.

Die Formeln (19) und (20), die wir hier für die zonalen Winde abgeleitet haben, sind, wie wir später zeigen werden, für stationäre Winde aller Windrichtungen gültig und sind in dieser verallgemeinerten Form der Ausdruck des *barischen Windgesetzes*. Daß dieses Gesetz sich von dem Azimut als völlig unabhängig erweisen wird, sieht man unmittelbar voraus, wenn man die Rotation der Erde in zwei Komponenten zerlegt, eine um die lokale Vertikale und eine um eine horizontale meridionale Achse. Die Rotation um die letztere Achse kann keine Neigung der Isobarflächen erzeugen. Die Neigung dieser Flächen kann nur von der Rotation $\Omega_z = \Omega\sin\varphi$ um die lokale Vertikale abhängen, und relativ zu dieser Achse muß sich der Wind eines jeden Azimuts gleich verhalten.

39. Diskontinuitätsflächen im stationären zirkularen Wirbel. Zu den Formeln für eine Diskontinuitätsfläche im stationären zirkularen Wirbel können wir jetzt in zweierlei Weise gelangen. In den allgemeinen Formeln für eine solche Fläche, die in **37** gegeben sind, können wir für die allgemeine Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}}$ die spezielle Zentripetalbeschleunigung $-\omega^2\varrho$ des Wirbels einführen. Oder wir können die Analogie der Diskontinuitätsfläche mit den Isobarflächen ausnutzen und die im vorigen Abschnitte entwickelten Formeln für Isobarflächen zu solchen für eine Diskontinuitätsfläche umschreiben.

Man gelangt dann zunächst zu der Differentialgleichung dieser Fläche:

(1) $$[-\nabla\varphi + (\omega^2\varrho)^*]\cdot d\boldsymbol{r} = 0,$$

wo der Vektor $(\omega^2\varrho)^*$ durch

(2) $$(\omega^2\varrho)^* = \frac{q\,\omega^2\varrho - q'\omega'^2\varrho}{q - q'}$$

gegeben ist. Dieser Vektor $(\omega^2\varrho)^*$ hat eine einfache Bedeutung. Hier sind $q\omega^2\varrho$ und $q'\omega'^2\varrho$ die auf die Volumeneinheit bezogenen Zentrifugalkräfte beiderseits der Grenzfläche, und $(\omega^2\varrho)^*$ ist also die Differenz dieser Zentrifugalkräfte dividiert durch den Dichtesprung $q - q'$, der immer positiv ist, da die gestrichenen Buchstaben sich auf die obere, die nichtgestrichenen auf die untere Schicht beziehen. Als Differenz zweier zur Wirbelachse senkrechter Vektoren ist auch $(\omega^2\varrho)^*$ ein zu dieser Achse senkrechter Vektor. Er ist positiv und zeigt wie die Zentrifugalkraft von der Wirbelachse fort, wenn die Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit in der unteren Schicht die größere ist, dagegen zur Achse hin, wenn die Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit in der oberen Schicht die größere ist. Im Übergangsfall, wenn die Zentrifugalkräfte pro Volumeneinheit beiderseits der Grenzfläche einander gleich sind, ist $(\omega^2\varrho)^* = 0$, und die Differentialgleichung (1) reduziert sich auf diejenige einer Niveaufläche. Wenn andererseits die Zentrifugalkräfte pro Masseneinheit beiderseits der Grenzfläche einander gleich sind, $\omega^2\varrho = \omega'^2\varrho$, findet man $(\omega^2\varrho)^* = \omega^2\varrho = \omega'^2\varrho$, und die Gleichung (1) reduziert sich auf diejenige einer Isobarfläche.

Abb. 11. Diskontinuitätsflächen im konstanten Schwerefelde.

Die Differentialgleichung (1) definiert somit die Diskontinuitätsfläche als eine Fläche, die senkrecht zur Vektorsumme der äußeren Kraft $-\nabla\varphi$ und des Vektors $(\omega^2\varrho)^*$ verläuft. Nach den jetzt bekannten Eigenschaften dieses Vektors können wir ohne weiteres die folgenden Resultate formulieren, die wir gleichzeitig für einen einfachen Horizontalwirbel im konstanten Schwerkraftfelde und für einen kosmischen Wirbel aussprechen können. Es genügt, in allen Fällen das Verhalten der Fläche in der Gegend der Wirbelachse zu kennzeichnen. Man findet (Abb. 11 und 12):

1. $\omega^2\varrho > \omega'^2\varrho$, $q\omega^2\varrho > q'\omega'^2\varrho$ d. h. die Zentrifugalkraft, gleichviel ob auf Massen- wie auf Volumeneinheit bezogen, ist am größten unterhalb der Diskontinuitätsfläche: In der Gegend der Achse taucht die Diskontinuitätsfläche tiefer unter die Niveauflächen, als es die Isobarflächen tun.

2. $\omega^2 \varrho = \omega'^2 \varrho$, d. h. die Zentrifugalkraft pro Masseneinheit ist beiderseits der Grenzfläche gleich groß: die Diskontinuitätsfläche fällt mit einer Isobarfläche zusammen.

3. $\omega'^2 \varrho > \omega^2 \varrho$, $q\omega^2 \varrho > q'\omega'^2 \varrho$, d. h. die Zentrifugalkraft pro Masseneinheit ist am größten ober-, die Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit am größten unterhalb der Diskontinuitätsfläche: In der Gegend der Achse taucht die Diskontinuitätsfläche weniger tief unter die Niveauflächen, als es die Isobarflächen tun.

4. $q\omega^2 \varrho = q'\omega'^2 \varrho$, d. h. die Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit ist beiderseits der Diskontinuitätsfläche gleich groß: die Diskontinuitätsfläche fällt mit einer Äquipotentialfläche der reinen Anziehung zusammen.

5. $\omega'^2 \varrho > \omega^2 \varrho$, $q'\omega'^2 \varrho > q\omega^2 \varrho$, d. h. die Zentrifugalkraft sowohl auf Masseneinheit wie auf Volumeneinheit bezogen ist größer oberhalb als unterhalb der Diskontinuitätsfläche: In der Gegend der Achse hebt sich die Diskontinuitätsfläche über die Niveauflächen.

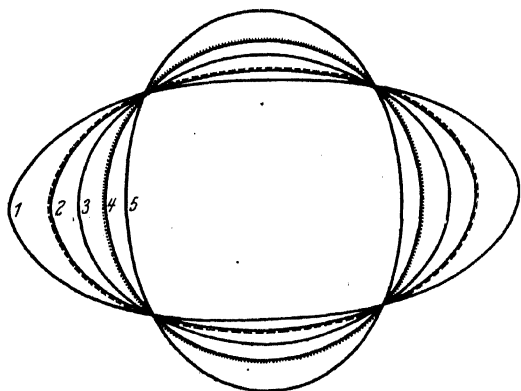



Abb. 12. Diskontinuitätsflächen im kosmischen Wirbel.

Qualitativ gesehen, sind diese Resultate unmittelbar einleuchtend. In dem Horizontalwirbel im konstanten Schwerkraftfelde liegt die Wirkung der Zentrifugalpumpe vor, die bei Überschuß der Zentrifugalkraft in der oberen Schicht die schwereren Massen in der Gegend der Achse hebt und bei Überschuß der Zentrifugalkraft in der unteren Schicht die leichteren Massen in der Gegend der Achse heruntersaugt. Im kosmischen Wirbel ist die Wirkung dieselbe. Durch den Überschuß der Zentrifugalkraft bei der äußeren oder oberen Masse wird das Absinken der schweren Massen in den polaren Gegenden verhindert. Durch hinlänglichen Überschuß der Zentrifugalkraft in den inneren oder unteren Massen bekommt die Diskontinuitätsfläche größere Exzentrizität als die Isobarflächen.

Nichts hindert, daß dabei die Diskontinuitätsfläche auch saturnringförmige Gebilde begrenzen kann, die schwerere Massen als die Umgebungen enthalten, aber von einem Überschuß von Zentrifugalkraft getragen werden (ähnliche Figur wie Abb. 10).

Nach der Formel **38** (14) für den Winkel einer Isobarfläche mit einer Niveaufläche im Horizontalwirbel bildet man die Formel für die Neigung einer Diskontinuitätsfläche:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg}\theta_d = \frac{1}{g}(\omega^2\varrho)^* = \frac{1}{g}\frac{q\omega^2\varrho - q'\omega'^2\varrho}{q-q'}$$

oder

$$\text{(3')} \qquad \operatorname{tg}\theta_d = \frac{1}{g}\left(\frac{v^2}{\varrho}\right)^* = \frac{1}{g}\frac{qv^2 - q'v'^2}{\varrho(q-q')}$$

wo die mit einem Stern versehenen Symbole nach Analogie mit **37** (3) gebildete abkürzende Ausdrücke sind.

Aus **38** (15) erhält man für diesen Neigungswinkel im kosmischen Wirbel:

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{tg}\theta_d = \frac{(\omega^2\varrho)^*\sin\varphi}{g_a - (\omega^2\varrho)^*\cos\varphi} = \frac{(q\omega^2\varrho - q'\omega'^2\varrho)\sin\varphi}{g_a(q-q') - (q\omega^2\varrho - q'\omega'^2\varrho)\cos\varphi}.$$

Hat man hier auf beiden Seiten der Diskontinuitätsfläche die konstante Winkelgeschwindigkeit $\omega = \omega' = \Omega$ der Erde, so erhält man:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tg}\theta_d = \frac{\Omega^2\varrho\sin\varphi}{g_a - \Omega^2\varrho\cos\varphi} = \frac{\Omega^2 r\sin\varphi\cos\varphi}{g},$$

identisch mit **38** (16). Die Formel gilt z. B. für die Grenzfläche zwischen Meer und Luft, wenn diese beiden Medien relativ zur Erde in Ruhe sind. Andererseits kann man in (4)

$$\text{(6)} \qquad \omega = \Omega + \frac{v}{\varrho}, \qquad \omega' = \Omega + \frac{v'}{\varrho}$$

einführen und die Quadrate der kleinen Größen v/ϱ und v'/ϱ vernachlässigen. Es ergibt sich dann:

$$\operatorname{tg}\theta_d = \frac{\Omega^2 r\sin\varphi\cos\varphi}{g} + \frac{2\Omega}{g}\frac{qv - q'v'}{q-q'}\sin\varphi.$$

Oder man findet für den Winkel θ_{dr}, den die Diskontinuitätsfläche mit der Meeresoberfläche bildet:

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tg}\theta_{dr} = \frac{2\Omega\sin\varphi}{g}\frac{qv - q'v'}{q-q'}.$$

Wenn man hier nach der Gasgleichung die Dichten q und q' durch die Temperaturen ersetzt, wird dies die bekannte MARGULESsche Formel für die Neigung einer Diskontinuitätsfläche relativ zu der Erdoberfläche. Sie ist hier unter der Voraussetzung abgeleitet, daß der Wind zonal ist. Durch eine ähnliche Überlegung, wie wir sie für das barische Windgesetz anstellten, erkennt man, daß diese Formel für jedes Azimut der Winde gelten muß. Wir werden dies direkt sehen im Kapitel XII, wo die Wirkung der Erddrehung systematisch berücksichtigt wird.

40. Wirbelbildung. Wir kehren zu der hydrodynamischen Bewegungsgleichung in ihren beiden parallelen Formen

$$\text{(1 A)} \quad \dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla\varphi - s\nabla p \qquad \text{und} \qquad \text{(1 B)} \quad q\dot{\boldsymbol{v}} = -q\nabla\varphi - \nabla p$$

zurück. Die Wirbelableitung ergibt:

(2A) $\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{v}} = \nabla s \times (-\nabla p)$ (2B) $\operatorname{curl} q\dot{\boldsymbol{v}} = \nabla q \times (-\nabla \varphi)$.

Oder in Worten:

(A). Die Beschleunigung ist *rotatorisch verteilt* relativ zu den isobar-isosteren Kurven $(s, -p)$ als Achsen, mit einer Drehrichtung vom Volumenaszendenten ∇s zum Druckgradienten $-\nabla p$.

(B). Der Vektor Dichte mal Beschleunigung ist *rotatorisch verteilt* relativ zu den äquidens-äquipotentiellen Kurven $(q, -\varphi)$ als Achsen, mit einer Drehrichtung vom Dichteaszendenten ∇q zum Potentialgradienten $-\nabla \varphi$.

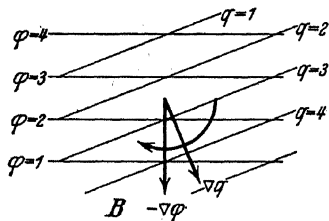
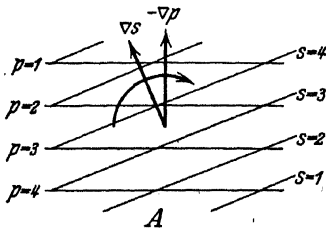



Abb. 13. Rotatorische Beschleunigung. A) Durch Asymmetrie des Massenfeldes relativ zum Druckfelde, B) durch Asymmetrie des Massenfeldes relativ zum Schwerefelde.

Beide Sätze sind unmittelbar qualitativ einleuchtend. Die rotatorische Beschleunigung (A) kommt von der unsymmetrischen Verteilung der Massen relativ zum Druckgradienten: unter der Wirkung der auf die Volumeneinheit bezogenen Druckkraft $-\nabla p$ werden die Volumenelemente mit kleinerem Masseninhalt mehr beschleunigt als die Volumenelemente mit größerem Masseninhalt (Abb. 13A); dies gibt die drehende Beschleunigung in der angegebenen Richtung um die Schnittlinien der isobaren und der isosteren Flächen. Im Spezialfalle der Barotropie, wo die äquisubstantiellen Flächen mit den isobaren zusammenfallen, ist die Massenverteilung in bezug auf den Druckgradienten symmetrisch: die Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}}$ wird ein rotations- oder wirbelfreier Vektor, und die rotatorische Beschleunigung fällt fort. Der Satz (B) ist Ausdruck der noch einfacheren Tatsache, daß die schwereren flüssigen Massen relativ zu den leichteren die tiefere Lage gewinnen (Abb. 13B).

Gleichwertige und für viele Zwecke bequemere Formen dieser Sätze ergeben sich, wenn wir aus den Gleichungen (1) Linienintegrale für geschlossene, bewegte materielle Kurven bilden. Durch skalare Multiplikation der Gleichungen (1) mit dem Vektorlinienelemente $\delta \boldsymbol{r}$ einer solchen Kurve und Integration längs der ganzen Kurve ergibt sich:

(3A) $$\int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = -\int s \nabla p \cdot \delta \boldsymbol{r} = N(s, -p),$$

(3B) $$\left\{ \begin{aligned} \int q \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} &= -\int q \nabla \varphi \cdot \delta \boldsymbol{r} \\ &= N(q, -\varphi) \end{aligned} \right.$$

wo wir in der zweiten Zeile die Linienintegrale der zweifach lamellaren Vektoren $s\nabla p$ und $q\nabla\varphi$ nach **5** (14) durch Solenoidzahlen ausgedrückt haben.

Die Gleichungen (3) geben nicht wesentlich mehr als das schon in den Gleichungen (2) Enthaltene. Weil aber die Kurve eine materiell bewegte Kurve ist, können wir die Integrale links nach den Formeln **19** (12) und (19) umformen. Indem wir uns der Definitionen $\bar{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v}$ und

(4A) $$\boldsymbol{C} = \int \boldsymbol{v}\cdot\delta\boldsymbol{r},$$ (4B) $$\bar{C} = \int \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{r}$$

erinnern, erhalten wir:

(5A) $$\frac{dC}{dt} = -\int s\nabla p\cdot\delta\boldsymbol{r},$$

(5B) $$\frac{d\bar{C}}{dt} = -\int q\nabla\varphi\cdot\delta\boldsymbol{r} - \int \tfrac{1}{2}v^2\nabla q\cdot\delta\boldsymbol{r} - \int e\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{r},$$

wo $e = \operatorname{div}\boldsymbol{v}$ ist.

Dank der Relation **19** (12) hat der Satz (5A), der sich auf Geschwindigkeiten bezieht, seine einfache Form behalten, während der auf Bewegungsgrößen bezogene Satz (5B) komplizierter ist, da hier drei partielle Zirkulationsbeschleunigungen auftreten, nämlich:

(6) $$\frac{d\bar{C}}{dt} = \left(\frac{d\bar{C}}{dt}\right)_a + \left(\frac{d\bar{C}}{dt}\right)_b + \left(\frac{d\bar{C}}{dt}\right)_c,$$

gegeben durch die Integrale:

(6a) $$\left(\frac{d\bar{C}}{dt}\right)_a = -\int q\nabla\varphi\cdot\delta\boldsymbol{r} = \int \varphi\nabla q\cdot\delta\boldsymbol{r},$$

(6b) $$\left(\frac{d\bar{C}}{dt}\right)_b = -\int \tfrac{1}{2}v^2\nabla q\cdot\delta\boldsymbol{r} = \int q\nabla(\tfrac{1}{2}v^2)\cdot\delta\boldsymbol{r},$$

(6c) $$\left(\frac{d\bar{C}}{dt}\right)_c = -\int e\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{r}.$$

Das zweite Integral (6a) und (6b) wird durch eine partielle Integration längs der geschlossenen Kurve erhalten. Die relativen Größenordnungen der beiden Integrale (6a) und (6b) hängen von den Wertunterschieden ab, welche die auf die Masseneinheit bezogene potentielle Energie φ bzw. die kinetische Energie $\frac{1}{2}v^2$ in den verschiedenen Punkten der geschlossenen Kurve aufweisen können. Nun nimmt φ im Schwerefelde für jeden Meter Höhe um 10 m²/sec², für 1000 m Höhe um 10000 m²/sec² und für 10000 m Höhe (Höhe der Troposphäre) um 100000 m²/sec² zu. Gleichzeitig verändert sich die Luftgeschwindigkeit, von ganz bodennahen Schichten abgesehen, auf 100 m Höhe nur selten um mehr als ein paar m/sec. Wenn man von Orkanen und Überorkangeschwindigkeiten absieht (30 m/sec oder mehr), so kommen innerhalb der ganzen Troposphäre keine größeren kinetischen Energien pro

Masseneinheit als 900 m^2/sec^2 vor. Gewöhnlich wird deshalb (6b) neben (6a) bei atmosphärischen Bewegungen nur sehr wenig und bei ozeanischen Bewegungen noch weniger zu bedeuten haben. Noch bedeutungsloser ist das Integral (6c), das von der Volumänderungsgeschwindigkeit e der bewegten Teilchen abhängt; denn schon in der kompressiblen Luft und noch mehr in dem fast inkompressiblen Meereswasser verlaufen diese Volumänderungen mit äußerster Langsamkeit.

Bei der Diskussion atmosphärischer oder ozeanischer Bewegungen sind wir daher berechtigt, in erster Annäherung von den Gliedern (6b) und (6c) abzusehen. Wir gehen deshalb zu der Diskussion der beiden folgenden formal parallelen Sätze über, von denen der erste exakt und der zweite angenähert gültig ist:

(7A) $$\frac{dC}{dt} = N(s, -p).$$

(A). *Die Beschleunigung der Zirkulation C (Geschwindigkeitszirkulation) einer geschlossenen materiellen Kurve ist gleich der Zahl der isobar-isosteren Solenoide $(s, -p)$, welche die Kurve umschließt, und hat die Richtung von dem Volumenaszendenten ∇s zu dem Druckgradienten $-\nabla p$.*

(7B) $$\frac{d\bar{C}}{dt} \approx N(q, -\varphi).$$

(B). *Die Beschleunigung der Zirkulation $\bar{C}$ (Bewegungsgrößezirkulation) einer geschlossenen materiellen Kurve ist angenähert gleich der Zahl der äquidens-äquipotentiellen Solenoide $(q, -\varphi)$, welche die Kurve umschließt, und hat die Richtung von dem Dichteaszendenten ∇q zu dem Potentialgradienten $-\nabla \varphi$.*

Der exakte Satz (A) bezieht sich auf die Zirkulation im gewöhnlichen Sinne des Wortes (Geschwindigkeitszirkulation) und wegen der STOKESschen Identität auch auf das entsprechende Wirbelfeld. (7A) gibt deshalb das allgemeine Gesetz der *Wirbelbildung* in reibungslosen Flüssigkeiten allgemeinster Art und enthält als Spezialfall die HELMHOLTZsche *Wirbelerhaltung*. Diese trifft für die autobarotropen Flüssigkeiten zu, wo die Solenoidzahl innerhalb jeder beliebigen geschlossenen Kurve identisch Null ist, $N(s, -p) = 0$, weil in diesem Falle jede isobare Fläche immer zugleich äquisubstantiell ist. Dann ist:

(8) $$\frac{dC}{dt} = 0, \quad \text{d. h.} \quad C = \text{konst.}$$

D. h. in der autobarotropen Flüssigkeit hat jede geschlossene materielle Kurve zeitlich unveränderliche Zirkulation, so daß Wirbellinien und Wirbelröhren materiell erhalten bleiben und die letzteren zeitlich unveränderliche Wirbelstärke haben, **19** (13) und (14). Das Wirbeln curl $\mathbf{v}$ selbst ändert sich deshalb im umgekehrten Verhältnis zu dem während der Bewegung zeitlich veränderlichen Querschnitt der Wirbelröhre.

In der allgemeinen Flüssigkeit mit baroklinem Massenfeld fällt jedoch jede Beschränkung der Veränderungen des Vektors curl $\boldsymbol{v}$ fort. In dieser Flüssigkeit geht die Wirbelbildung nach dem Gesetze (7A) vor sich: jede materielle geschlossene Kurve erhält in jedem Zeitelement dt eine Zirkulationsvermehrung $N(s, -p)\,dt$. D.h. das vorliegende Wirbelfeld erhält ein Wirbel-Zuschlagsfeld, in dem die isobar-isosteren Solenoide $(s, -p)$ Wirbelröhren sind, jede mit einer Wirbelstärke gleich der Einheit multipliziert mit dem Zeitelement dt. Dieses elementare Wirbelfeld addiert sich vektoriell zu dem schon vorhandenen, mit dem Resultat, daß die materiellen Kurven, die zur Zeit t Wirbellinien waren, es zur Zeit $t + dt$ gewöhnlich nicht mehr sind. Die neuen Wirbellinien begrenzen neue Wirbelröhren, die aus anderen Massen bestehen und andere Wirbelstärken als die früheren haben. In jedem Zeitelement kommt in dieser Weise ein neugebildetes elementares Wirbelfeld hinzu, das sich vektoriell zu dem schon vorhandenen addiert: man hat ein stetig sich veränderndes Wirbelfeld. Was daraus folgt, wird in den weiteren Entwicklungen dieses Buches durch zahlreiche Beispiele erläutert werden.

Der Satz (7B) beschreibt in entsprechender Weise die Bildung des Feldes des Wirbelns curl $\bar{\boldsymbol{v}}$ der spez. Bewegungsgröße. In jedem Zeitelement entsteht ein elementares Feld mit den äquipotentiell-äquidensen Solenoiden als Wirbelröhren und mit einer Wirbelstärke gleich der Einheit multipliziert mit dem Zeitelement dt. Dies elementare Wirbelfeld addiert sich vektoriell zu dem schon existierenden Felde des Vektors curl $\bar{\boldsymbol{v}}$. Zu dem resultierenden Wirbelfeld fügt sich nach einem weiteren Zeitelement dt ein neues elementares Wirbelfeld usf. Dazu kommen noch Korrektionsglieder, die von den beiden vernachlässigten Integralen (6b) und (6c) herrühren. Aus diesem Grunde bekommen wir keine neuen Erhaltungssätze. Nur im Falle der Homogenität und Inkompressibilität verschwinden diese Integrale identisch, und es ergibt sich der Erhaltungssatz $\bar{C} =$ konst., der aber bei der räumlich und zeitlich konstanten Dichte mit $C =$ konst. identisch ist.

Der äquivalente Gebrauch der beiden Sätze (7A) und (7B) sei durch das folgende Beispiel erläutert. In einer kompressiblen Atmosphäre sei eine begrenzte Luftmasse vorhanden mit anderer Dichte, z. B. als Folge einer höheren Temperatur als die der umgebenden Luft. In einer Übergangsschicht variieren das spez. Volumen und die Dichte mehr oder weniger schnell. Hier verlaufen dann eine Anzahl teils geschlossener, teils nicht geschlossener äquisubstantieller Flächen, die für die Anwendung des Satzes (7A) nach dem spez. Volumen, für die Anwendung des Satzes (7B) nach der Dichte zu numerieren sind (s. Abb. 14A und B). Der Volumenaszendent zeigt nach innen, der Dichteaszendent nach außen. Diese Flächen werden von den in Abb. 14A angenähert horizontalen

Isobarflächen und in Abb. 14B von den exakt horizontalen Niveauflächen geschnitten.. Senkrecht zu den ersteren zeigt der Druckgradient nach oben, senkrecht zu den letzteren zeigt der Potentialgradient nach unten. Die Abb. 14A veranschaulicht die isobar-isosteren, die Abb. 14B die äquidens-äquipotentiellen Solenoide, die den Körper ringförmig umgeben. In diesen findet Wirbelbildung statt, in den isobar-isosteren Solenoiden Geschwindigkeitswirbeln, die vom Volumenaszendenten zum Druckgradienten, und in den äquipotentiell-äquidensen Solenoiden Bewegungsgrößewirbeln, die vom Dichteaszendenten zum Potentialgradienten gerichtet ist. Das Resultat ist in beiden Fällen dasselbe, nämlich, daß sich die warme Luftmasse durch die umgebende Atmosphäre nach oben

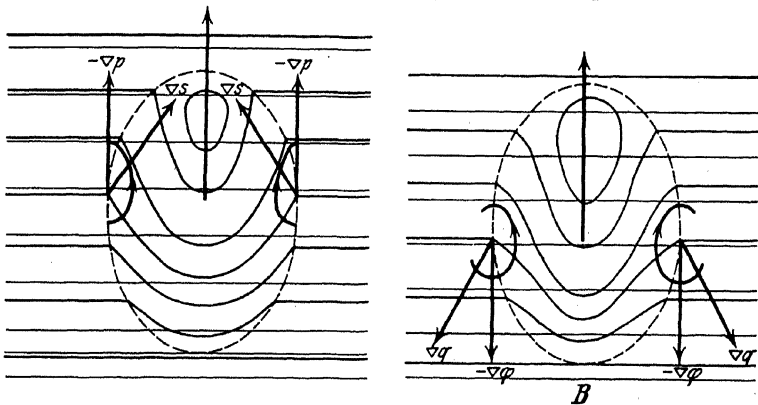



Abb. 14. Progressive Bewegung wegen Zirkulationsbildung. A) Um isobar-isosteren, B) um äquidens-äquipotentiellen Solenoiden.

bewegt. Wenn die betrachtete Luftmasse größere Dichte als die Atmosphäre hat, so haben Volumen- und Dichteaszendent die entgegengesetzte Richtung, und man hat die entgegengesetzte Wirbelbildung mit einer Bewegung der Luftmasse nach unten.

Die Bedeutung des vorläufig vernachlässigten Integrales (6b) geht unmittelbar aus dessen Ähnlichkeit mit (6a) hervor. Wir können (6b) analog (7B)

$$\left(\frac{dC}{dt}\right)_b = N(q, \tfrac{1}{2}v^2) \tag{9}$$

schreiben, wo die negativ genommene potentielle Energie pro Masseneinheit φ jetzt durch die positiv genommene kinetische Energie pro Masseneinheit $\frac{1}{2}v^2$ ersetzt ist. D.h. (9) stellt eine Wirbelbildung der spez. Bewegungsgröße dar, die um die Schnittlinien der äquidensen Flächen mit den Flächen gleicher kinetischer Energie pro Masseneinheit stattfindet und vom Dichteaszendenten zum Energieaszendenten (nicht

Gradienten) gerichtet ist. In der Abb. 15, die Abb. 14B entspricht, hat man zur Vereinfachung angenommen, daß die Dichte konstant ist, sowohl in der umgebenden Flüssigkeit wie im Inneren des flüssigen Körpers, während in einer Übergangsschicht eine Anzahl äquidenser Flächen verlaufen. Man liest aus der Figur sofort das folgende Resultat ab für die Bewegung eines flüssigen Körpers in einer Flüssigkeit anderer Dichte: der leichte Körper bewegt sich nach Stellen kleinerer, der schwere nach Stellen größerer kinetischer Energie pro Masseneinheit — genau wie sich nach (7B) der leichte Körper nach Stellen größerer und der schwere nach Stellen kleinerer potentieller Energie bewegt.

Als kleiner Zuschlag zu der Hauptbewegung tritt die durch (9) gegebene Bewegungstendenz meistens wenig in Erscheinung. Besteht aber die Hauptbewegung in kleinen Schwingungen, die sogar unsichtbar verlaufen können, so ist die progressive Bewegung des leichten flüssigen

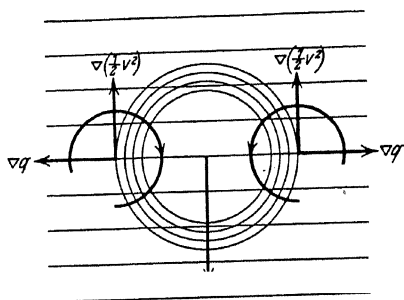



Abb. 15. Progressive Bewegung wegen Zirkulationsbildung um äquidens-äquienergetische Solenoiden.

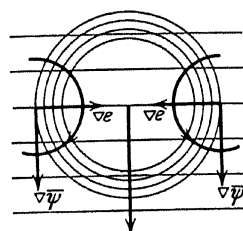



Abb. 16. Progressive Bewegung wegen Zirkulationsbildung, beruhend auf Volumenänderung.

Körpers gegen kleinere und des schweren flüssigen Körpers gegen größere Feldenergie eine sehr auffällige Erscheinung. Ersetzt man den flüssigen Körper durch einen festen, so bringt das keinen wesentlichen Unterschied, da die Trägheit und nicht die Starrheit des Körpers das Wesentliche ist; er wird von dem vibrierenden Körper, der die Flüssigkeitsbewegung erzeugt, abgestoßen, wenn er leichter, und angezogen, wenn er schwerer als die umgebende Flüssigkeit ist.

Ist noch kein Wirbeln curl$\overline{\boldsymbol{v}}$ der spez. Bewegungsgröße gebildet, so drückt sich dieser Vektor durch ein Potential aus, $\overline{\boldsymbol{v}} = -\nabla\overline{\psi}$, und auch das zweite vorläufig vernachlässigte Integral (6c) läßt sich dann durch eine Solenoidzahl ausdrücken:

$$(10) \qquad \left(\frac{d\overline{C}}{dt}\right)_c = -\int e\overline{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \int e\nabla\overline{\psi}\cdot\delta\boldsymbol{r} = N(e,\overline{\psi}) .$$

Die Gleichung beschreibt eine Wirbelbildung, die um die Schnittlinien der Flächen gleichen Potentiales $\overline{\psi} =$ konst. mit den Flächen gleicher

Expansionsgeschwindigkeit pro Volumeneinheit $e =$ konst. stattfindet, mit einer Drehrichtung von dem Expansionsaszendenten ∇e zu dem Potentialaszendenten $\nabla \psi$, welcher die entgegengesetzte Richtung der spez. Bewegungsgröße $\bar{\mathfrak{v}}$ hat. Aus der Abb. 16 liest man dann ab, daß diese Wirbelbildung eine Zuschlagsbewegung zur Folge hat, für den kontrahierenden Körper *mit*, für den expandierenden *entgegen* der Strömungsrichtung.

Durch die neugebildete Bewegung verliert der Vektor $\bar{\mathfrak{v}}$ seine Potentialeigenschaft. Die Wirbelbildung setzt sich aber in demselben Sinne fort, in der Richtung, die der Vektor $-e\bar{\mathfrak{v}}$ auf einer geschlossenen Kurve bestimmt, die den Körper durchsetzt und durch die umgebende Flüssigkeit zurückkehrt. Denn nur auf dem ersten und nicht auf dem letzten Teil der Kurve existiert der Vektor $-e\bar{\mathfrak{v}}$.

Gewöhnlich bleibt diese Zuschlagsbewegung neben der ursprünglichen Hauptbewegung wenig bemerkbar. Ist aber die Hauptbewegung oszillatorisch und hat sie entgegengesetzte Richtungen, während sich der Körper ausdehnt und zusammenzieht, so findet die Wirbelbildung immer in der gleichen Richtung statt: Im Falle des Synchronismus nimmt ein pulsierender (periodisch volumenändernder) Körper in einer oszillierenden Strömung eine progressive Bewegung an, in der Richtung, die die Strömung hat zur Zeit, wo sich der Körper zusammenzieht. Rührt die oszillierende Strömung von einem anderen pulsierenden Körper her, so findet man: gleichphasig pulsierende Körper ziehen einander an, mit entgegengesetzter Phase pulsierende stoßen einander ab. Das Resultat ist für flüssige pulsierende Körper abgeleitet. Aber es ändert nichts Wesentliches, wenn man sie durch nichtflüssige, z. B. elastische feste Körper, ersetzt.

Die Gesetze der Wirbelbildung in reibungslosen Flüssigkeiten allgemeinster Art haben wir somit für die zwei Fundamentalvektoren, Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und spez. Bewegungsgröße $\bar{\mathfrak{v}}$, entwickelt. Je nach den Zielen, die wir verfolgen, haben wir deshalb freie Wahl zwischen zwei verschiedenen Wegen, die durch den Gebrauch des einen oder des anderen der beiden Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ gekennzeichnet sind. Erscheinungen wie die aus (9) und (10) gefolgerten, findet man nur unter Zuhilfenahme des zweiten Vektors. Erscheinungen dieser Art werden wir in dem nächsten Kapitel weiter verfolgen. Für das Studium von Zirkulationsbewegungen großen Stiles wie die atmosphärischen und ozeanischen bieten sich die beiden parallelen Sätze (7A) und (7B) dar und ergänzen einander gegenseitig. (7B) hat den Vorteil, mit einem festliegenden und nur einem bewegten Flächensystem zu arbeiten, verwertet dafür aber den mehr zusammengesetzten Vektor $\bar{\mathfrak{v}}$ und ist nicht wie (7A) exakt gültig. Dazu kommt, daß (7A) mit den thermodynamisch so

wichtigen Variablen Druck und Volumen arbeitet. Endlich ist die Erweiterung dieses Satzes auf ein rotierendes Bezugssystem äußerst einfach, so einfach, daß wir sie geben können, ohne sonst auf die volle Theorie der relativen Bewegung eingehen zu brauchen.

41. Berechnung von Solenoidzahlen. Wenn man die Zirkulationssätze quantitativ verwerten will, so geschieht die Berechnung der Solenoidzahlen gewöhnlich nicht durch ein wirkliches Zählen der Parallelogramme in einem Schnitte, sondern durch die Berechnung der Linienintegrale für Kurven besonders geeigneter Form. Die bequemsten Kurven für die Berechnung der isobar-isosteren Solenoide bestehen aus krummlinigen Vierecken, deren zwei Seiten in den Isobarflächen $p = p_0$ und $p = p_1$ verlaufen und deren zwei andere Seiten gewöhnlich relativ kurze Kurvenstücke a und b sind, welche die Enden dieser isobaren Kurven verbinden. Ähnlich berechnet man die Zahl der äquipotentiell-äquidensen Solenoide am bequemsten für krummlinige Vierecke, deren zwei Seiten in Äquipotentialflächen $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = \varphi_1$ verlaufen, und deren beide anderen Seiten gewöhnlich relativ kurze Kurvenstücke a und b sind, welche die Endpunkte dieser äquipotentiellen Kurven verbinden. Die Integrale längs der langen isobaren bzw. äquipotentiellen Kurven fallen dann fort und es bleiben nur die Integrale längs den kurzen Verbindungsstücken übrig. Gleichzeitig wird es sich als zweckmäßig erweisen, auf die ursprünglichen Formen **40** (3 A) und (3 B) zurückzugehen. Die beiden Zirkulationssätze nehmen dann die folgende Form an:

$$(1\text{A})\quad \int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{p_0}^{p_1} s_a\,\delta p + \int_{p_0}^{p_1} s_b\,\delta p, \qquad (1\text{B})\quad \int q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} q_a\,\delta\varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} q_b\,\delta\varphi,$$

wo sich die Integrale rechts auf die Verbindungskurven a und b beziehen. Sind nun $\bar{s}_a$, $\bar{s}_b$, $\bar{q}_a$, $\bar{q}_b$ geeignete Mittelwerte des spez. Volumens oder der Dichte längs dieser Kurven, so werden die Integrale:

$$(2\text{A})\quad \int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta\boldsymbol{r} = (\bar{s}_a - \bar{s}_b)(p_0 - p_1), \qquad (2\text{B})\quad \int q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta\boldsymbol{r} = (\bar{q}_a - \bar{q}_b)(\varphi_0 - \varphi_1).$$

Besonders zweckmäßig ist es, wenn man die Verbindungskurven a und b so legt, daß sie senkrecht zu den Beschleunigungen verlaufen, was nicht nur immer möglich, sondern in vielen Fällen auch leicht möglich ist. Im stationären zirkularen Wirbel genügt es z. B., daß diese Verbindungskurven Geraden parallel der Wirbelachse sind. In dem Falle gelten längs den Verbindungslinien die Gleichgewichtsbedingungen, und die Integrale rechts in (1 A) sind die Potentialunterschiede zwischen den Endpunkten der Kurve a bzw. der Kurve b, die Integrale rechts in (1 B) sind die entsprechenden Druckunterschiede zwischen den Endpunkten der Kurve a bzw. der Kurve b. Wir können diese Potentialunterschiede

mit $(\varphi_{p_0}^{p_1})_a$ und $(\varphi_{p_0}^{p_1})_b$ und diese Druckunterschiede mit $(p_{\varphi_0}^{\varphi_1})_a$ und $(p_{\varphi_0}^{\varphi_1})_b$ bezeichnen, wodurch die Gleichungen (1)

(3 A) $\int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = (\varphi_{p_0}^{p_1})_a - (\varphi_{p_0}^{p_1})_b$, (3 B) $\int q \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = (p_{\varphi_0}^{\varphi_1})_a - (p_{\varphi_0}^{\varphi_1})_b$

werden.

Für Kurven dieser speziellen Form kann man oft auch die Berechnung der linken Seite der Gleichungen vereinfachen. Man kann gewöhnlich von dem Linienintegral der Beschleunigung längs der kurzen Verbindungslinien absehen, und zwar ist dies exakt, wenn diese Kurven senkrecht zu den Beschleunigungen gelegt sind. Zur Berechnung der linken Seiten der Gleichungen hat man dann nur den Vektor $\dot{\boldsymbol{v}}$ oder den Vektor $q\dot{\boldsymbol{v}}$ längs der langen Kurven zu berechnen. Sind dann $\dot{\boldsymbol{v}}_1$ und $\dot{\boldsymbol{v}}_0$ die Werte der Beschleunigung, q_1 und q_0 diejenigen der Dichte in einander entsprechenden Punkten dieser Kurven (die strenge Korrespondenz findet man mit Hilfe von Kurven derselben Art wie diejenigen, welche die Endpunkte der Kurven verbinden und die im vorteilhaftesten Falle senkrecht zu den Beschleunigungen des Feldes verlaufen), so findet man die Integrale auf der linken Seite, indem man die Differenz $\dot{\boldsymbol{v}}_1 - \dot{\boldsymbol{v}}_0$ oder $(q\dot{\boldsymbol{v}})_1 - (q\dot{\boldsymbol{v}})_0$ einmal längs der einen Kurve von a nach b integriert. Also, um das Resultat nur in Verbindung mit der Gleichungsform (3) aufzuschreiben:

(4A) $\int (\dot{\boldsymbol{v}}_1 - \dot{\boldsymbol{v}}_0) \cdot \delta \boldsymbol{r} = (\varphi_{p_0}^{p_1})_a - (\varphi_{p_0}^{p_1})_b$, (4B) $\int [(q\dot{\boldsymbol{v}})_1 - (q\dot{\boldsymbol{v}})_0] \cdot \delta \boldsymbol{r} = (p_{\varphi_0}^{\varphi_1})_a - (p_{\varphi_0}^{\varphi_1})_b$.

Man hat somit einfache Formeln, die sich in vielen Fällen als bequem erweisen werden, um die Solenoidzahlen und auch die Zirkulationen zu berechnen. Wenn nicht Dichte oder spez. Volumen, sondern dafür die Temperatur zu den unmittelbar gegebenen Größen gehören, so kann man diese mittels der Gasgleichung in die oben entwickelten Formeln einführen.

Wenn es sich aber dabei um den ersten Zirkulationssatz und also um die isobar-isosteren Solenoide handelt, wird es oft zweckmäßig sein, die Temperatur in einem möglichst frühen Stadium einzuführen. Nach der Gasgleichung $ps = R\theta$ läßt sich die Bewegungsgleichung **40** (1 A) in der Form

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla\varphi - \frac{R\theta}{p}\nabla p \tag{5}$$

schreiben. Die Wirbelableitung ergibt, der Gleichung **40** (2 A) entsprechend:

$$\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{R}{p}\nabla\theta \times (-\nabla p) = -R\nabla\theta \times \nabla \log p\,. \tag{6}$$

Der Zirkulationssatz wird, der Gleichung **40** (3 A) entsprechend:

$$\frac{dC}{dt} = \int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = -R\int \theta(\nabla \log p) \cdot \delta \boldsymbol{r} = N(-\log p, -R\theta)\,. \tag{7}$$

Die isobar-isosteren Solenoide kann man deshalb durch Solenoide ersetzen, die durch die beiden Skalarfunktionen $R\theta$ und $\log p$ gebildet sind. Die positive Drehrichtung dieser Solenoide geht *vom Druckgradienten zum Temperaturgradienten.*

Das Linienintegral der Größe $\theta\nabla\log p$ verschwindet längs der isobaren Kurven des krummlinigen Viereckes. Der Gleichung (1 A) entsprechend erhält man:

$$\frac{dC}{dt} = -R\int_{p_0}^{p_1}\theta_a\delta\log p + R\int_{p_0}^{p_1}\theta_b\delta\log p\,, \tag{8}$$

und wenn $\bar{\theta}_a$ und $\bar{\theta}_b$ passende Mitteltemperaturen längs der Verbindungskurven a und b sind, so ergibt sich:

$$\frac{dC}{dt} = R(\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_b)\log\frac{p_0}{p_1} \tag{9}$$

Es versteht sich von selbst, daß man auch in dieser Gleichung die linke Seite in der Form (4 A) schreiben kann.

Die Größe rechts in Gleichung (9) ist in der Tabelle II am Ende des Buches tabuliert für die in der Atmosphäre vorkommenden Drucke von 100 bis zu 10 cbar und für die Temperaturdifferenzen, die zwischen zwei verschiedenen Vertikalen in der Atmosphäre vorkommen können.

42. Zirkulation in der relativen Bewegung. In einem starren Körper, der mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um eine feste Achse rotiert, ist das Wirbeln der konstante Vektor $2\mathbf{\Omega}$ parallel der Rotationsachse. Die Einheitswirbelröhren sind Röhren parallel der Achse vom konstanten Querschnitt $1/(2\Omega)$. Die Zirkulation C_r einer geschlossenen Kurve des rotierenden Körpers oder die Anzahl N der Einheits-Wirbelröhren, welche die Kurve umschließt, wird dann gleich $2\Omega\Sigma$, wo Σ der Flächeninhalt der auf die Rotationsebene projizierten Kurve ist. Bewegt sich eine geschlossene Kurve mit der Zirkulation C relativ zu dem rotierenden Körper, so wird ihre „absolute" Zirkulation C_a gleich der Summe dieser relativen Zirkulation C und der Zirkulation $N(2\Omega)$ oder $2\Omega\Sigma$, welche die Kurve haben würde, wenn wir uns sie für einen Moment mit dem starren Körper starr verbunden denken. In Formel **40** (7A) können wir deshalb das hier für absolute Zirkulation stehende C durch die Summe $C + N(2\Omega)$ oder $C + 2\Omega\Sigma$ ersetzen und nach dem Gliede auflösen, das die relative Zirkulation C enthält:

$$\frac{dC}{dt} = N(s, -p) - \frac{dN(2\Omega)}{dt} = N(s, -p) - 2\Omega\frac{d\Sigma}{dt}. \tag{1}$$

Der Zirkulationssatz in dieser Form enthält ein Glied mehr als in der Form **40** (7A): Zu der Anzahl $N(s, -p)$ der von der Kurve umfaßten isobar-isosteren Solenoiden kommt noch die negativ genommene Zeit-

ableitung der Anzahl $2\Omega\Sigma$ der von der Kurve umfaßten Wirbelsolenoide der Erde.

Die Bedeutung des neu hinzugekommenen Gliedes erkennt man am besten, wenn man den Fall $N(s, -p) = 0$ betrachtet, wo in der absoluten Bewegung Erhaltung der Zirkulation vorliegt. Dann läßt sich die Gleichung (1) integrieren:

$$C - C_0 = N_0(2\Omega) - N(2\Omega) = 2\Omega(\Sigma_0 - \Sigma) . \tag{2}$$

Die Gleichung ist der Ausdruck der folgenden einfachen Tatsache: Wenn eine Kurve in der relativen Bewegung von einer Lage zu einer anderen übergeht, so gewinnt oder verliert sie so viel an relativer Zirkulation, als sie an Anzahl von umfaßten Einheits-Wirbelröhren des rotierenden Systems verloren oder gewonnen hat. Dies kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden: Die mit 2Ω multiplizierte Änderung des Flächeninhaltes der Projektion der geschlossenen Kurve auf die Rotationsebene liefert die Änderung der Anzahl Einheits-Wirbelröhren, welche die Kurve umfaßt.

Wenn es sich um Zirkulation relativ zur Erde handelt, nennen wir eine Zirkulation *zyklonisch* oder *antizyklonisch*, je nachdem, ob sie bei Projektion auf die Äquatorebene mit oder entgegen dem Rotationssinn der Erde verläuft. Sowohl auf der nördlichen wie auf der südlichen Halbkugel hat die antizyklonische Zirkulation den gleichen und die zyklonische Zirkulation den entgegengesetzten Umlaufssinn wie die Sonne. Wenn es sich um eine geschlossene Kurve in der Atmosphäre oder im Meer handelt, die keine isobar-isostere Solenoide umfaßt, so nimmt ihre Zirkulation relativ zur Erde in zyklonischer Richtung in dem Maße zu, wie die Zahl der von ihr umfaßten Einheits-Wirbelröhren der Erde abnimmt; und die Zirkulation in antizyklonischer Richtung nimmt in dem Maße zu, wie die Anzahl von umfaßten Einheits-Wirbelröhren der Erde zunimmt. Für Kurven von horizontalem Verlauf folgt hieraus einfach: *Kontraktion der Kurve gibt zyklonische, Expansion antizyklonische Zirkulation.*

Für die Berechnung des Erddrehungsgliedes in den Gleichungen (1) oder (2) dient die Tabelle III am Ende des Buches, die sehr vielseitig zur Berechnung der Erddrehungswirkungen verwertet werden kann.

Die Tabelle bezieht sich allgemein auf eine Längeneinheit, die eine Verschiebung senkrecht zu sich selbst erleidet, so daß sie ein Flächenelement erzeugt. Das in der Tabelle vorkommende *Winkelargument* φ ist ganz allgemein der Winkel, den die Normale dieses Flächenelementes mit der Äquatorebene bildet. Wenn das erzeugte Flächenelement horizontal ist, was wir in den meisten Fällen voraussetzen werden, so wird dieser Winkel die geographische Breite.

Das *lineare Argument* (erste Horizontallinie) kann in zweierlei Weise gedeutet werden:

(I) Das lineare Argument stellt in beliebiger Einheit die Geschwindigkeit dar, welche die Längeneinheit quer zu sich selbst hat. Die tabulierte Größe stellt dann in der entsprechenden Einheit eine Beschleunigungskomponente längs der bewegten Längeneinheit dar. Wir werden sie später die Komponente der Coriolisbeschleunigung längs dieser Richtung nennen. Von dieser Beschleunigung können wir zwei geometrische Bilder geben: sie ist gleich der Zahl von Wirbelsolenoiden der Erde, welche die Längeneinheit infolge ihrer Geschwindigkeit quer zu sich selbst pro Zeiteinheit durchschneidet; oder sie ist gleich dem mit 2Ω multiplizierten Flächeninhalt, den die Projektion der bewegten Längeneinheit pro Zeiteinheit auf der Äquatorebene beschreibt.

(II) Das lineare Argument stellt in beliebiger Einheit die Verschiebung dar, welche die Längeneinheit quer zu ihrer eigenen Richtung erlitten hat. Die tabulierte Größe stellt dann in der entsprechenden Einheit eine Geschwindigkeit dar. Wir werden sie später die Komponente der Coriolisgeschwindigkeit längs der Längeneinheit nennen. Diese Geschwindigkeit wird geometrisch dargestellt durch die Anzahl von Wirbelsolenoiden der Erde, die den von der verschobenen Längeneinheit erzeugten Flächeninhalt durchsetzen; oder auch durch die mit 2Ω multiplizierte Projektion dieses Flächeninhaltes auf die Äquatorebene.

Wenn man die Rechnung für alle Längeneinheiten der geschlossenen Kurve ausführt und summiert, so findet man bei der Deutung (I) des linearen Argumentes das Erddrehungsglied der Gleichung (1) und bei der Deutung (II) die auf der Erddrehung beruhende totale Zirkulationsveränderung der Kurve in Gleichung (2).

43. Störung des Gleichgewichtes. Welle und Wirbel. Im Gleichgewichtszustande fallen die äquisubstantiellen Flächen mit den isobaren und diese wiederum mit den Niveauflächen zusammen. Durch summarisch-energetische Betrachtungen, S. 92, haben wir gezeigt, daß der Zustand des Gleichgewichtes stabil, indifferent oder instabil ist, je nachdem ob der Barotropiekoeffizient Γ algebraisch größer, gleich oder kleiner als der immer positiv vorausgesetzte Piezotropiekoeffizient γ ist. Mit Hilfe der Zirkulationssätze können wir jetzt die Art der Bewegung bestimmen, die aus einer Störung eines dieser Gleichgewichtszustände folgt.

Wir werden den Satz über Geschwindigkeitszirkulation **40** (7A) anwenden. Es kommt dann darauf an, zu sehen, wie die kleine Störung nicht die absolute, sondern die *gegenseitige* Lage der isobaren und der isosteren Flächen beeinflußt.

Wenn man von der Gleichgewichtslage aus gewisse Massen nach oben verschiebt, so folgt zwangsläufig eine entsprechende Verschiebung gewisser anderer Massen nach unten. Wir betrachten immer solche zusammengehörige Verschiebungssysteme, die den Charakter einer Drehung oder Zirkulation haben. Wir haben vier Fälle (A) bis (D) zu betrachten, wovon (A), (C) und (D) in der Abb. 17 dargestellt sind.

(A). $\Gamma > \gamma > 0$, also der Barotropiekoeffizient ist positiv und größer als der Piezotropiekoeffizient. Beim positiven Barotropiekoeffizienten zeigt der Volumenaszendent ∇s genau wie der Druckgradient $-\nabla p$ nach oben. Von den Teilchen, die sich nach einer Verschiebung auf einer Isobarfläche befinden, haben dann die von oben stammenden Teilchen ein größeres Volumen als die von unten herrührenden. Bei der allgemeinen Zunahme des Volumens nach oben heißt dies, daß die isosteren Flächen und der Volumenaszendent eine ähnliche Drehung

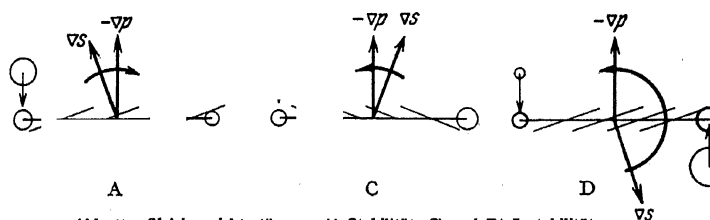



Abb. 17. Gleichgewichtsstörung. A) Stabilität, C) und D) Instabilität.

wie die verschobenen Massen erlitten haben. Das gebildete Solenoidensystem, mit der Drehrichtung vom Volumenaszendenten zum Druckgradienten setzt der störenden Verschiebung eine Zirkulationsbeschleunigung entgegen.

(B). $\Gamma = \gamma > 0$, der Barotropiekoeffizient ist positiv und gleich dem Piezotropiekoeffizienten. Der Volumenaszendent zeigt immer noch nach oben. Die Teilchen, die nach der Verschiebung auf einer Isobarfläche liegen, haben dann alle das gleiche spez. Volumen, gleichviel ob sie von oben oder von unten stammen. Es sind keine Solenoide gebildet und die durch die Störung erzeugte Zirkulationsbewegung bleibt im HELMHOLTZschen Sinne erhalten: man hat das indifferente Gleichgewicht der autobarotropen Flüssigkeiten.

(C). $\gamma > \Gamma > 0$, der Barotropiekoeffizient ist positiv, aber kleiner als der Piezotropiekoeffizient. Der Volumenaszendent zeigt immer noch nach oben. Die Teilchen, die nach einer Verschiebung auf einer Isobarfläche liegen, haben dann, wenn sie von oben stammen, ein kleineres Volumen als wenn sie von unten gekommen sind, und in Verbindung mit der allgemeinen Zunahme des Volumens nach oben folgt hieraus, daß die isosteren Flächen und der Volumenaszendent relativ zu den Isobarflächen und dem Druckgradienten eine Drehung erlitten

haben entgegen der störenden Drehung der Teilchen. Das dabei gebildete Solenoidensystem mit Drehrichtung vom Volumenaszendenten zum Druckgradienten wird dann die eingeleitete Störungsbewegung weiter beschleunigen.

(D). $\gamma > 0 > \Gamma$, der Barotropiekoeffizient ist negativ, der Volumenaszendent zeigt nach unten. Die von oben zu einer Isobarfläche gelangten Teilchen haben dann ein kleineres spez. Volumen als die von unten angelangten, genau wie im vorigen Falle. Bei der allgemeinen Zunahme des spez. Volumens nach unten ergibt dies jedoch die entgegengesetzte Neigung der isosteren Flächen relativ zu den isobaren; und die gebildeten Solenoide mit Drehrichtung vom Volumenaszendenten zum Druckgradienten beschleunigen weiter die eingeleitete Störungsbewegung.

Zusammenfassend kann man also sagen: Die Störung, die ihrer Natur nach aus zirkulatorisch verteilten Verschiebungen bestehen muß, erzeugt ein Solenoidsystem, das, wenn Γ algebraisch größer als γ, auf diese zirkulatorischen Verschiebungen verzögernd und, wenn Γ algebraisch kleiner als γ ist, auf sie beschleunigend wirkt.

Als Beispiel wollen wir annehmen, daß das flüssige Medium in einem rechteckigen Kasten mit vertikalen Seitenwänden eingeschlossen ist. Das Medium kann eine heterogene inkompressible Salzlösung sein, die im Stabilitätsfall nach unten und im Instabilitätsfall nach oben zunehmende Konzentration hat. Oder es kann atmosphärische Luft sein, deren Temperatur im Stabilitätsfall nach oben entweder zunimmt oder auch abnimmt, aber langsamer als nach dem adiabatischen Gesetze, und im Instabilitätsfall nach oben schneller als nach dem adiabatischen Gesetze abnimmt (Fall des *überadiabatischen* Temperaturgradienten). In dieser ursprünglich ruhenden Flüssigkeitsmasse erzeugt man durch kleine Impulse eine störende Zirkulation mit Stromlinien von dem Typus IIIA, Abb. 4, S. 79. Die fortschreitende Verschiebung der Massen aufwärts auf der einen Seite und abwärts auf der anderen erzeugt im Stabilitätsfall ein Solenoidsystem von zunehmender Stärke, das immer mehr die Störungszirkulation retardiert, sie schließlich zu Umkehr zwingt und dann eine zunehmende Zirkulation in der entgegengesetzten Richtung erzeugt. Dabei nimmt aber die Solenoidzahl wieder ab und wird Null im Moment, wo die Massen mit maximaler Intensität der Zirkulation ihre alten Gleichgewichtslagen passieren. Dann bilden sich Solenoide des entgegengesetzten Vorzeichens, die diese Zirkulation retardieren und sie wieder zu Umkehr bringt: es erfolgt eine stehende Schwingung des ganzen Systems.

Je größer Γ im Verhältnis zu γ ist, um so intensiver sind die gebildeten Solenoidfelder und um so schneller verlaufen die Schwingungen. Je mehr aber Γ abnimmt, um so kleiner wird die bei gleich großer

Störung erzeugte Solenoidzahl und um so langsamer verlaufen die Schwingungen. Wird schließlich $\Gamma = \gamma$, so werden keine Solenoide mehr gebildet, die einmal eingebrachte Störungszirkulation bleibt für immer bestehen. Das ist der HELMHOLTZsche Fall, man erhält eine fortdauernde Zirkulationsbewegung der autobarotropen Flüssigkeit. Wird aber dann Γ algebraisch kleiner als γ, so erzeugt die Störung ein beschleunigendes Solenoidsystem, das zunächst an Stärke zunimmt, um dann wieder abzunehmen und Null zu werden, wenn die beim instabilen Gleichgewicht oben gelegenen, potentiell oder absolut schwereren Massen unten angekommen sind. Sobald diese Lage mit maximaler Intensität der Zirkulation passiert ist, bildet sich ein retardierendes Solenoidsystem, das die Zirkulation verzögert, bis das System die ursprüngliche Lage des instabilen Gleichgewichtes mit minimaler Zirkulationsgeschwindigkeit passiert, wonach sich wieder das beschleunigende Solenoidsystem zu bilden anfängt usf. Das Resultat wird dann eine rhythmisch verlaufende Zirkulation, entsprechend dem rhythmischen Umlauf eines Pendels, das in seiner Lage instabilen Gleichgewichtes durch eine kleine Störung in Bewegung gesetzt worden ist. Die theoretisch denkbare rhythmisch verlaufende Zirkulation wird sicher in Wirklichkeit nicht lange bestehen können, sie wird bald durch Turbulenz gestört. Sie ist vor allem als Übergangsform zu einer in Turbulenz aufgelösten Bewegung von Bedeutung. In dem Maße, in dem sie realisierbar ist, wird sie natürlich auch von der Lage des stabilen Gleichgewichtes aus erreicht werden können. Je größer man die störenden Impulse wählt, um so größer werden die Amplituden der erfolgenden Schwingungen, bis zuletzt die Lage des instabilen Gleichgewichtes erreicht und überschritten wird.

Wir können uns jetzt beliebig viele rechteckige Kästen wie die beschriebenen nebeneinander gestellt denken (Abb. 18A), alle mit identisch derselben zunächst stabil geschichteten Flüssigkeit gefüllt. In je zwei aneinander grenzenden Schachteln soll die Bewegung in bezug auf die gemeinsame Vertikalwand symmetrisch sein. Gegen diese Wand muß dann die Flüssigkeit beiderseits den gleichen Druck ausüben. Die Wand kann weggenommen werden, ohne daß dadurch die Bewegung gestört wird. Man hat dann innerhalb eines beliebig langgestreckten rechteckigen Gefäßes einen Zustand stehender Schwingungen oder Wellen, die man mit Rücksicht auf die rechteckige Aufteilung *zellular* nennen kann. Innerhalb jeder Zelle besteht dabei eine periodische Wirbelbewegung, die zur Folge hat, daß längs einer Zellenwand die Massen aufsteigen, während sie an der nächsten Zellenwand absinken usf. Die Teilchen, die beim Gleichgewicht auf einer Horizontale gelegen waren, bilden während der Bewegung eine Wellenlinie wie

eine schwingende Saite. Die Berge und Täler dieser Wellenlinie befinden sich an den Vertikalwänden der Zellen und zeigen an, wo sich die gehobenen und wo sich die gesenkten Massen befinden.

Ein solches stehendes Wellensystem kann man sich, wie schon hervorgehoben 22 (8), als aus zwei identischen sich gegeneinander fortpflanzenden Wellensystemen entstanden denken. Wenn man die beiden Seitenwände S_1 und S_2 wegnimmt, fängt auch das stehende Wellensystem sofort an, sich in diese zwei sich fortpflanzenden Wellensysteme aufzulösen, eines, das sich von S_1 nach links und eines, das sich von S_2 nach rechts bewegt. Diese Auswanderung von Wellen nach beiden Seiten dauert an, bis im ursprünglichen Störungsgebiet alles zur Ruhe gekommen ist, während die beiden getrennten Wellensysteme sich von jetzt an immer mehr voneinander entfernen. Man erinnert sich dabei an

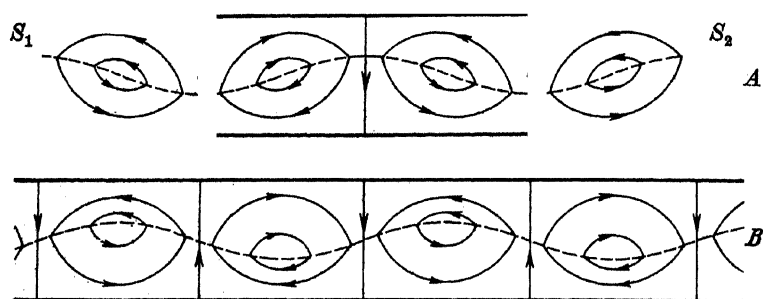



Abb. 18. Wellen. A) Stehende, B) sich fortpflanzende.

den schon hervorgehobenen Unterschied der stehenden und der sich fortpflanzenden Wellen. Das Stromliniensystem bleibt dasselbe, nur daß es bei den stehenden Wellen still im Raume liegt, bei den sich fortpflanzenden Wellen dagegen die Fortpflanzung des Wellensystems mitmacht; die einzelnen Teilchen, die bei den stehenden Schwingungen geradlinig längs Elementen der festliegenden Stromlinien oszillierten, führen bei den sich fortpflanzenden Wellen elliptische Umläufe aus, und in dem Punkte, wo sich das Teilchen zu einer beliebigen Zeit befindet, hat man Berührung zwischen der Ellipse und dem Stromliniensystem für diese Zeit. Weiter: *die Wellenlinie der Teilchen, die beim Gleichgewichte eine horizontale Gerade bildeten, hat ihre Wellenberge und Wellentäler in den Mittelebenen der Zellen* (Abb. 18B), nicht mehr wie bei den *stehenden Schwingungen* (Abb. 18A) *in den Grenzebenen der Zellen.*

Abgesehen von den Bedingungen der Stabilität, $\Gamma > \gamma$, der Indifferenz, $\Gamma = \gamma$, und der Instabilität, $\Gamma < \gamma$, haben wir im vorhergehenden keine besonderen Voraussetzungen über die Werte der Größen Γ und γ

von Schicht zu Schicht in dem flüssigen System gemacht. Nichts hindert uns anzunehmen, z. B. daß die Bedingung $\Gamma > \gamma$ nur in einer dünnen Zwischenschicht erfüllt ist, während sowohl oberhalb wie unterhalb dieser Übergangsschicht angenähert oder exakt die Bedingung der Autobarotropie erfüllt ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn eine Süßwasserschicht auf einer homogenen Salzwasserschicht ruht, mit einer dünnen Schicht des Überganges oder auch, wenn zwei Luftschichten verschiedener potentieller Temperatur aufeinander ruhen. Im Falle einer kleinen Störung werden sich dann die Solenoide vornehmlich oder ausschließlich in der Übergangsschicht ausbilden. Die Bewegung in den beiden angenähert oder exakt autobarotropen Schichten ist wirbelfrei, geschlossene Kurven, die nur in einer dieser Schichten verlaufen, erhalten keine oder nur sehr unbedeutende Zirkulation. Die geschlossenen Kurven aber, die zur Hälfte in der einen und zur Hälfte in der anderen Schicht verlaufen, nehmen dieselben Zirkulationen an wie zuvor, entsprechend der wechselnden Solenoidsysteme, die sich in der Übergangsschicht bilden. Die Bewegung als ganzes gesehen bleibt deshalb dieselbe stehende oder sich fortpflanzende Wellenbewegung wie zuvor, nur mit einiger Veränderung des inneren Bewegungsfeldes in den Wellen: mit der auf die Übergangsschicht begrenzten Bildung des eigentlichen Wirbelns curl $\boldsymbol{v}$ folgen entgegengesetzte Tangentialgeschwindigkeiten beiderseits der Übergangsschicht (Abb. 19). Läßt man die Dicke der Übergangsschicht verschwinden, so geht sie in eine Diskontinuitätsfläche über.

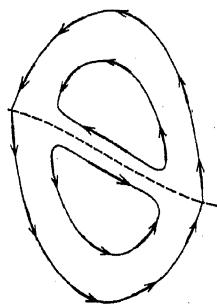



Abb. 19. Zusammenhang zwischen Zirkulation verschiedener Kurven und Geschwindigkeitssprung an der Diskontinuitätsfläche.

Nichts hindert, daß die Mächtigkeit der autobarotropen Schichten auf der einen oder auf beiden Seiten dieser Grenzfläche ins Unendliche wächst. Die Gesamtbewegung wird dabei ihren Charakter beibehalten. Die weit von der inneren Grenzfläche befindlichen Flüssigkeitsschichten nehmen wenig an der Bewegung teil, wie man unmittelbar daraus sieht, daß die sehr langen Kurven, die große Abstände von der Grenzfläche erreichen, nicht mehr wirbelbildende Solenoide umfassen als die kurzen dicht an der Grenzfläche verlaufenden.

Läßt man die Dichte der Flüssigkeit in der oberen Schicht abnehmen, so nimmt die Solenoidschicht in der Übergangsschicht an Intensität zu und die Bewegung verläuft rascher, ohne sonst in geometrischer Hinsicht Veränderungen zu erleiden. Wenn man die Dichte der oberen

Schicht gegen Null konvergieren läßt, erhält man die Wellenform, mit der wir aus der täglichen Erfahrung am meisten vertraut sind, die Oberflächenwellen. Der sichtbare Zusammenhang von Welle und Wirbel, der bisher mit voller Deutlichkeit hervortrat, geht dabei verloren, da nur ein Halbwirbel in der unteren Schicht bestehen bleibt. Wenn wir aber eine obere Schicht von verschwindender Dichte einführen, können wir das für die Vorstellung oft nützliche Bild eines vollständigen Wirbels wieder hineinbringen.

Schließlich soll der Fall der Instabilität vorliegen, so daß im Falle der Inkompressibilität das mehr salzige Wasser oben und das weniger salzige unten liegt oder im Falle der Kompressibilität die obere Luftschicht niedrigere potentielle Temperatur als die untere hat. Erzeugt man in diesem Falle eine wellenförmige Störung, so werden unter fortschreitender Solenoidbildung in der Übergangsschicht die einmal gebildeten Wellenberge immer ansteigen und die Wellentäler sich entsprechend vertiefen. Bei dem fortgesetzten Prozeß können sich die höchsten Gipfel der Berge loslösen und ihre Bewegung nach oben fortsetzen. Ähnlich können sich die am tiefsten nach unten hervorgedrungenen Massen loslösen und als geschlossene Massen nach unten fortsetzen.

Diese im Instabilitätsfall mit zeitlich zunehmenden Amplituden auftretenden Wellen haben nicht mehr wie die stabilen Wellen eine Fortpflanzungsenergie. Alle Energie wird zu der Umwälzung verbraucht, und der Unterschied zwischen stehenden und sich fortpflanzenden Wellen, der im Stabilitätsfall so ausgesprochen ist, fällt für die Instabilitätswellen fort.

44. Das Massenfeld. Als wir die Folgen einer kleinen Störung des Gleichgewichtes untersuchten, machten wir prognostischen Gebrauch von den Zirkulationssätzen. Wenn andererseits hinlängliche Daten über die Bewegung vorliegen, können wir diese Sätze oder geeignete Äquivalenten derselben für diagnostische Untersuchungen über die Beziehung des Massenfeldes zu den Feldern der Bewegung, des Druckes oder des Potentiales verwerten.

Einen solchen diagnostischen Gebrauch gestatten unmittelbar die Gleichungen **40** (2), nämlich:

(1A) $\operatorname{curl}\dot{\mathbf{v}} = \nabla s \times (-\nabla p)$, (1B) $\operatorname{curl} q\dot{\mathbf{v}} = \nabla q \times (-\nabla \varphi)$.

Die rechten Seiten dieser Gleichungen enthalten implizite den Sinus des Winkels, den die äquisubstantiellen Flächen im einen Falle mit den Isobarflächen, im anderen Falle mit den Niveauflächen bilden. Die Auflösung nach diesen Sinussen gibt:

(2A) $$\left\{\begin{aligned} |\sin\theta| &= \frac{|\operatorname{curl}\dot{\mathbf{v}}|}{|\nabla s|\,|-\nabla p|} \\ &= h_s h_p\,|\operatorname{curl}\dot{\mathbf{v}}|, \end{aligned}\right.$$

(2B) $$\left\{\begin{aligned} |\sin\theta'| &= \frac{|\operatorname{curl} q\dot{\mathbf{v}}|}{|\nabla q|\,|-\nabla\varphi|} \\ &= h_q h_\varphi\,|\operatorname{curl} q\dot{\mathbf{v}}|, \end{aligned}\right.$$

wo h_s, h_p, h_q, h_φ die Dicken der isosteren, der isobaren, der äquidensen und der äquipotentiellen Einheitsschichten sind. Für die Winkel, welche die äquisubstantiellen Flächen mit den Isobarflächen oder den Niveauflächen bilden, erhalten wir somit die folgenden Sätze, indem wir nach den Gleichungen (1) die Vorzeichen der Winkel und nach (2) die Zahlenwerte ihrer Sinusse nehmen:

(A) Die äquisubstantiellen Flächen fallen mit den isobaren zusammen, wenn $\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, und sind sonst in der Weise zu den Isobarflächen geneigt, daß die Drehrichtung vom Volumenaszendenten Γs zum Druckgradienten $-\nabla p$ mit der Drehrichtung der rotatorischen Beschleunigung $\operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{v}}$ übereinstimmt. Der Sinus des Drehwinkels ist numerisch gleich dem Zahlenwert der rotatorischen Beschleunigung multipliziert mit dem Produkte der Dicken der isobaren und der isosteren Einheitsschichten.

(B) Die äquisubstantiellen Flächen fallen mit den Niveauflächen zusammen, wenn $\operatorname{curl} q\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, und sind sonst in der Weise zu den Niveauflächen geneigt, daß die Drehrichtung vom Dichteaszendenten ∇q zum Potentialgradienten $-\nabla\varphi$ mit der Drehrichtung des Vektors $\operatorname{curl} q\dot{\boldsymbol{v}}$ übereinstimmt. Der Sinus des Drehwinkels ist numerisch gleich dem Zahlenwert des Vektors $\operatorname{curl} q\dot{\boldsymbol{v}}$ multipliziert mit dem Produkte der Dicken der äquidensen und der äquipotentiellen Einheitsschichten.

Um den Satz (A) durch ein Beispiel zu veranschaulichen, können wir eine mit Flüssigkeit vollständig gefüllte Flasche betrachten, die plötzlich horizontal beschleunigt wird.

Die Flüssigkeit sei zunächst eine inkompressible Salzlösung mit nach unten zunehmender Dichte. Die Isobarflächen nehmen dann momentan ihre geneigte Lage senkrecht zu der scheinbaren Kraft $\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{v}}$ an. Die äquisubstantiellen Flächen, die sich mit den inkompressiblen Teilchen, aus denen sie bestehen, bewegen, können aber diese Momentanbewegung der isobaren Flächen nicht mitmachen. Sie eilen nach und erreichen ähnliche, aber schwacher geneigte Lagen, da bei der Beschleunigung die unteren schwereren Massen relativ zu den leichteren oberen Massen zurückbleiben.

Ist die Flüssigkeit in der Flasche kompressibel und autobarotrop, so hat man ebenfalls nach unten zunehmende Dichte und es liegt der Fehlschluß nahe, daß auch dann die schwereren Massen unten relativ zu den leichteren oben zurückbleiben müssen. Es geschieht jedoch folgendes: die neue Druckverteilung mit den geneigten Isobarflächen breitet sich mit Schallgeschwindigkeit von der hinteren nach der vorderen Wand der Flasche aus, und diese neugebildeten Isobarflächen sind schon im Momente ihres Entstehens zugleich äquisubstantielle Flächen, so daß niemals eine Asymmetrie der Massenverteilung relativ zu der

scheinbaren Kraft $\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{v}}$ oder was auf dasselbe hinauskommt, relativ zu dem Druckgradienten $-\nabla p$ besteht: die Bewegung innerhalb der Flasche bleibt zirkulations- und wirbelfrei, und die äquisubstantiellen Flächen machen ohne jede Verzögerung die Bewegung der isobaren Flächen mit.

Der allgemeine Fall ist schließlich derjenige, daß die Flüssigkeit weder inkompressibel noch autobarotrop ist. Man erhält dann ein Resultat zwischen den beiden obigen Extremfällen: die äquisubstantiellen Flächen bewegen sich nicht so langsam wie die materiellen Flächen, mit denen sie zu einer beliebigen Zeit zusammenfallen, und stellen sich auch nicht so schnell wie die isobaren Flächen auf die neuen Bewegungsbedingungen ein, sondern haben eine zwischen diesen Grenzen liegende Bewegung.

45. Massen- und Temperaturfeld im stationären zirkularen Wirbel. Die Gleichungen **44** (1) können wir jetzt für die Untersuchung des Massenfeldes und des Temperaturfeldes im stationären zirkularen Wirbel verwenden. Für die Beschleunigung führen wir dann $\dot{\boldsymbol{v}} = -\omega^2 \boldsymbol{\varrho}$ ein, wo die Zentripetalbeschleunigung die Richtung von $-\boldsymbol{\varrho}$ hat und nur von den Variablen ϱ und z abhängt. Wir haben deshalb für die absoluten Beträge:

$$|\operatorname{curl} \dot{\boldsymbol{v}}| = \frac{\partial(\omega^2 \varrho)}{\partial z} \Big|$$

und aus den Gleichungen **44** (1) erhält man:

$$(1\,\mathrm{A}) \qquad = |\nabla s \times (-\nabla p) \qquad (1\,\mathrm{B}) \qquad \nabla q \times (-\nabla \varphi)|.$$

Die Richtung des positiven z nennen wir die Richtung nach oben oder vollständiger nach oben längs der z-Achse. Diese Ausdrucksweise ist beim Horizontalwirbel im konstanten Schwerefelde selbstverständlich, aber auch bei kosmischen Wirbeln brauchbar, wenn wir nur die *obere* oder *nördliche* Hälfte oberhalb der Äquatorebene betrachten. Die linke Seite der Gleichungen (1 A) ist dann die Zunahme der Zentrifugalkraft pro Masseneinheit, die linke Seite der Gleichung (1 B) die Zunahme der Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit, beide nach oben. Das Vorzeichen der ersten Größe wird durch den Drehsinn vom Druckgradienten $-\nabla p$ zum Volumenaszendenten ∇s und somit durch die Lage der äquisubstantiellen Flächen relativ zu den isobaren bestimmt, das Vorzeichen der zweiten Größe wird durch den Drehsinn vom Potentialgradienten $-\nabla \varphi$ zum Volumenaszendenten ∇q und somit durch die Lage der äquisubstantiellen Flächen relativ zu den Äquipotentialflächen des reinen Anziehungspotentiales bestimmt. Schließlich heben wir hervor, daß längs der Koordinate z die Gleichgewichtsbedingung gilt, wobei Stabilität nur dann besteht, wenn q nach unten oder s nach

oben zunimmt. Nimmt man hierauf Rücksicht, so erhält man die folgenden Resultate (Abb. 20), die ganz mit denjenigen übereinstimmen, die wir für eine Diskontinuitätsfläche innerhalb des zirkularen Wirbels abgeleitet haben, S. 134—135.

(A) $\frac{\partial(\omega^2\varrho)}{\partial z} < 0, \quad \frac{\partial(q\,\omega^2\varrho)}{\partial z} < 0,$

d. h. die Zentrifugalkraft, gleichviel ob auf die Einheit der Masse oder auf die Einheit des Volumens bezogen, nimmt nach oben ab: in der Gegend der Achse verlaufen die äquisubstantiellen Flächen sowohl unterhalb der Niveauflächen der äußeren Kraft wie unterhalb der Isobarflächen. D. h. im Horizontalwirbel im konstanten Schwerefelde haben die äquisubstantiellen Flächen tiefere Wirbeltrichter als die isobaren; und in den kosmischen Wirbeln zeigen die äquisubstantiellen Flächen noch mehr abgeplattete Formen als die der Isobarflächen. Dabei können auch saturnringähnliche Formen vorkommen.

(B) $\frac{\partial(\omega^2\varrho)}{\partial z} = 0,$ d. h. die Zentrifugalkraft pro Masseneinheit ändert sich nicht längs der Parallelen zur Wirbelachse. Dies ist der Fall der Barotropie, die äquisubstantiellen Flächen fallen mit den isobaren zusammen und haben deren Wirbeltrichter im konstanten Schwerefelde, und deren flachgedrückt ellipsoide Form in den kosmischen Wirbeln.

(C) $\frac{\partial(\omega^2\varrho)}{\partial z} > 0, \quad \frac{\partial(q\omega^2\varrho)}{\partial z} < 0,$

d. h. die Zentrifugalkraft pro Masseneinheit nimmt nach oben zu, die Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit nimmt nach oben

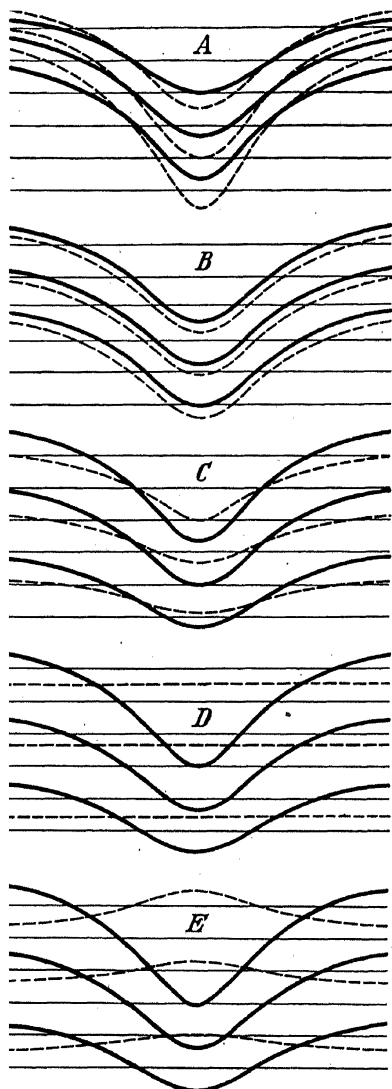



Abb. 20. Massenfeld im zirkularen Wirbel.
Isobarflächen, -·-—— Niveauflächen, ——— äquisubstantielle Flächen.

ab: im Horizontalwirbel im konstanten Schwerefelde haben die äquisubstantiellen Flächen immer noch Wirbeltrichter, aber weniger tief als die isobaren Flächen; im kosmischen Wirbel erscheinen die äquisubstantiellen Flächen immer noch an den Polen abgeplattet, aber weniger als die isobaren Flächen.

(D) $\frac{\partial (q\omega^2\varrho)}{\partial z} = 0$, d. h. die Zentrifugalkraft pro Volumeneinheit verändert sich nicht längs der Parallelen zur Wirbelachse: die äquisubstantiellen Flächen fallen mit den Äquipotentialflächen der äußeren Kraft zusammen. Im Horizontalwirbel im konstanten Schwerefelde sind also die äquisubstantiellen Flächen Horizontalebenen; im kosmischen Wirbel haben die äquisubstantiellen Flächen die Form der Äquipotentialflächen der reinen Anziehung, d. h. bei Planeten, Erde und Sonne sehr nahe die Kugelform.

(E) $\frac{\partial (\omega^2\varrho)}{\partial z} > 0$, $\frac{\partial (q\omega^2\varrho)}{\partial z} > 0$, d. h. die Zentrifugalkraft, gleichviel ob auf Massen- wie auf Volumeneinheit bezogen, nimmt nach oben zu: im Horizontalwirbel im konstanten Schwerefelde haben die äquisubstantiellen Flächen umgekehrte Wirbeltrichter, d. h. Erhöhungen anstatt Vertiefungen; und im kosmischen Wirbel sind sie in der Richtung der polaren Achse ausgezogen.

Man sieht in allen Fällen, daß der Wirbel wie eine Zentrifugalpumpe wirkt, in der Gegend der Achse je nach den Umständen nach oben oder nach unten saugend, genau wie wir es früher im Falle der Diskontinuitätsfläche sahen. Wie von der Geschwindigkeitsverteilung auf die Massenverteilung kann man auch umgekehrt von der Massenverteilung auf die Geschwindigkeitsverteilung diagnostisch schließen.

Für quantitativ diagnostische Zwecke sind die Integralsätze oft den Differentialgleichungen (1) vorzuziehen. Wir gehen dann von

(2A) $\int \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = N(s, -p)$, (2B) $\int q\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = N(q, -\varphi)$

aus. In beiden Gleichungen lassen sich auch die Größen links durch Solenoidzahlen ausdrücken. Nach **20** (6) können wir die linke Seite von (2A) in die Form $N(\omega^2, -\frac{1}{2}\varrho^2)$ schreiben; und ganz entsprechend läßt sich die linke Seite von (2B) in die Form $N(q\omega^2, -\frac{1}{2}\varrho^2)$ schreiben, wodurch sich die beiden Gleichungen ergeben:

(3A) $N(\omega^2, -\frac{1}{2}\varrho^2) = N(s, -p)$, (3B) $N(q\omega^2, -\frac{1}{2}\varrho^2) = N(q, -\varphi)$.

Es gelten also für den stationären zirkularen Wirbel die einfachen Gesetze: innerhalb einer beliebigen geschlossenen Kontur gibt es ebenso viele Solenoide der Größen ω^2 und $\frac{1}{2}\varrho^2$ als es isobar-isostere Solenoide gibt; und ebenso viele Solenoide der Größen $q\omega^2$ und $\frac{1}{2}\varrho^2$, als es äquidens-äquipotentielle Solenoide gibt.

Kurven besonders geeigneter Form für die Auswertung der Integrale sind krummlinige Vierecke, die im Falle (A) aus zwei isobaren Kurven und zwei Parallelen zur Wirbelachse bestehen und im Falle (B) aus zwei Äquipotentiallinien und zwei Parallelen zur Wirbelachse (Abb. 21, A, B). Dabei wollen wir durch $\bar{s}_{\varrho_0}$, $\bar{s}_{\varrho_1}$, ($\bar{q}_{\varrho_0}$, $\bar{q}_{\varrho_1}$) geeignete Mittelwerte des spez. Volumens (der Dichte) auf den Geraden $\varrho = \varrho_0$ bzw. $\varrho = \varrho_1$ bezeichnen und durch $\overline{\omega}^2_{p_0}$, $\overline{\omega}^2_{p_1}$, ($\overline{q\omega}^2_{\varphi_0}$, $\overline{q\omega}^2_{\varphi_1}$) Mittelwerte von ω^2 ($q\omega^2$) auf den beiden Isobarflächen (Niveauflächen). Die linken Seiten der Gleichungen (3)

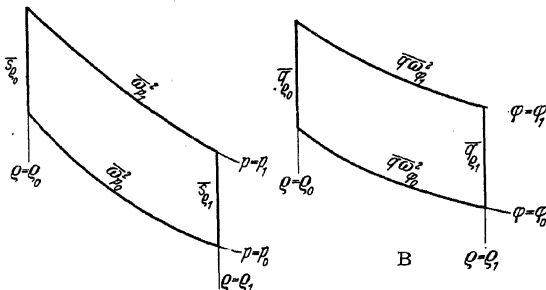



Abb. 21. Parallelogrammatische Kurven für Anwendung des Zirkulationssatzes.

sind die Linienintegrale von $\omega^2 \varrho$ bzw. $q\omega^2\varrho$ und lassen sich in ähnlicher Weise wie die Linienintegrale in **41** (2) berechnen:

$$-\int \omega^2 \varrho \, d\varrho = \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} (\omega^2_{p_1} - \omega^2_{p_0})\, \varrho \, d\varrho = \tfrac{1}{2} (\overline{\omega}^2_{p_1} - \overline{\omega}^2_{p_0}) (\varrho_1^2 - \varrho_0^2),$$

$$-\int q\omega^2 \varrho \, d\varrho = \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} (q\omega^2_{\varphi_1} - q\omega^2_{\varphi_0})\, \varrho \, d\varrho = \tfrac{1}{2} (\overline{q\omega}^2_{\varphi_1} - \overline{q\omega}^2_{\varphi_0}) (\varrho_1^2 - \varrho_0^2).$$

Da die Gleichungen **41** (2) die entsprechende Berechnung der rechten Seiten von (3) geben, findet man:

$$(\bar{s}_{\varrho_1} - \bar{s}_{\varrho_0})(p_1 - p_0) = \tfrac{1}{2} (\overline{\omega}^2_{p_1} - \overline{\omega}^2_{p_0}) (\varrho_1^2 - \varrho_0^2),$$

$$(\bar{q}_{\varrho_1} - \bar{q}_{\varrho_0})(\varphi_1 - \varphi_0) = \tfrac{1}{2} (\overline{q\omega}^2_{\varphi_1} - \overline{q\omega}^2_{\varphi_0}) (\varrho_1^2 - \varrho_0^2).$$

Hieraus findet man die nützlichen diagnostischen Formeln:

$$\text{(4A)}\quad \bar{s}_{\varrho_1} - \bar{s}_{\varrho_0} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\omega}^2_{p_1} - \overline{\omega}^2_{p_0}}{p_1 - p_0} (\varrho_1^2 - \varrho_0^2), \quad \text{(4B)}\quad \bar{q}_{\varrho_1} - \bar{q}_{\varrho_0} = \frac{1}{2} \frac{\overline{q\omega}^2_{\varphi_1} - \overline{q\omega}^2_{\varphi_0}}{\varphi_1 - \varphi_0} (\varrho_1^2 - \varrho_0^2).$$

Schreibt man die Winkelgeschwindigkeiten ω_{p_0}, ω_{p_1} in der Form:

$$\text{(5)}\qquad \omega_{p_0} = \Omega + \omega'_{p_0}, \qquad \omega_{p_1} = \Omega + \omega'_{p_1},$$

wo Ω z. B. die konstante Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeuten kann und ω'_{p_1} und ω'_{p_0} klein sind relativ zu Ω, so findet man:

$$-\int \omega^2 \varrho \, d\varrho = \int^{\varrho_1} (\omega^2_{p_1} - \omega^2_{p_0})\, \varrho \, d\varrho = 2\Omega \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} (\omega'_{p_1} - \omega'_{p_0})\, \varrho \, d\varrho = 2\Omega \frac{d\Sigma}{dt},$$

wo Σ die Bedeutung von **42** hat. Dadurch findet man die Formel:

$$\bar{s}_{\varrho_1} - \bar{s}_{\varrho_0} = \frac{2\Omega}{p_1 - p_0} \frac{d\Sigma}{dt}, \tag{6}$$

die sich auch direkt aus **41** (2) und **42** (1) ergibt und im Falle der relativen Bewegung nützlich ist.

Wir wollen noch einen nützlichen, direkt integrablen Spezialfall betrachten und gehen dazu von der Gleichung **38** (2 A) aus:

$$d\varphi + s\,dp = \omega^2 \varrho\, d\varrho. \tag{7}$$

Die Differentialgleichung der Isobarflächen

$$d\varphi = \omega^2 \varrho\, d\varrho$$

ist z. B. in dem Falle direkt integrabel, wo die Variablen separierbar sind, d. h. wenn die Zentrifugalkraft als das Produkt einer Funktion von ϱ und einer Funktion von φ darstellbar ist:

$$\omega^2 \varrho = F(\varrho)\, G(\varphi). \tag{8}$$

Die Gleichung der Isobarflächen lautet dann in endlicher Form:

$$\int \frac{d\varphi}{G(\varphi)} - \int F(\varrho)\, d\varrho = H(p),$$

wo H eine willkürliche Funktion ist. Hieraus folgt nun:

$$\frac{d\varphi}{G(\varphi)} - F(\varrho)\, d\varrho = H'(p)\, dp,$$

oder unter Berücksichtigung von (7):

$$s = G(\varphi)\, H'(p). \tag{9}$$

Der Unterschied der spez. Volumina in zwei Punkten derselben Isobarfläche $p = p_0$ mit den Potentialwerten φ_1 und φ_2 wird durch die Gleichung

$$\frac{s_1 - s_2}{s_1} = \frac{G(\varphi_1) - G(\varphi_2)}{G(\varphi_1)} \tag{10}$$

gegeben. Setzen wir die Zentrifugalkraft als eine lineare Funktion des Schwerepotentiales voraus, so vereinfacht sich die Formel auf:

$$\frac{s_1 - s_2}{s_1} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_0}. \tag{10a}$$

Wir werden später Beispiele numerischer Werte geben, wenn wir das Temperaturfeld betrachtet haben.

Hat man das Massenfeld im zirkularen Wirbel gefunden, so ergibt sich das Temperaturfeld sofort durch Anwendung der Gasgleichung: $ps = R\theta$. Indessen kann es bisweilen von Bedeutung sein, das Temperaturfeld direkt zu bestimmen, ohne das Massenfeld zu benutzen. Dazu kann man die schon in **41** (6) gefundene Gleichung

$$\operatorname{curl} \dot{\boldsymbol{v}} = -R \nabla \theta \times \nabla \log p \tag{11}$$

benutzen.

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$\frac{dC}{dt} = N\left(\omega^2, -\frac{1}{2}\varrho^2\right) = N(-\log p,\ -R\theta). \tag{12}$$

Machen wir die gewöhnliche Voraussetzung, daß die Temperatur mit der Höhe abnimmt, so zeigen $-\nabla\theta$ und ∇s nach oben, und die Drehrichtung von $-\nabla p$ zu $-\nabla\theta$ wird der Drehrichtung von ∇s zu $-\nabla p$, die wir für die isosteren Flächen fanden, entgegengesetzt. Die isothermen und die äquisubstantiellen Flächen verhalten sich deshalb im zirkularen Wirbel gewöhnlich entgegengesetzt zueinander. Im Falle Abb. 20E, wo der Wirbel die größte Intensität oben hat und schwere Massen von unten heraufgepumpt werden, senken sich die Isothermflächen in der Gegend der Achse unter die Isobarflächen, während sich die Isosterflächen über dieselben heben. Dies bedeutet, daß die aufgepumpten Massen kälter sind als die sonst unter demselben Drucke stehenden Massen: der Wirbel hat einen kalten Kern. Im Falle der Abb. 20A, wo der Wirbel seine größte Intensität unten hat, heben sich die Isothermflächen über die isobaren, während sich die Isosterflächen unter dieselben senken: der Wirbel hat einen warmen Kern.

Integriert man die Gleichung (11) längs derselben Kurve wie in (4a), so ergibt sich unter Anwendung von **41** (9):

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{2}\left(\bar\omega_{p_1}^2 - \bar\omega_{p_0}^2\right)\left(\varrho_1^2 - \varrho_0^2\right) = R\left(\bar\theta_{\varrho_1} - \bar\theta_{\varrho_0}\right)\log\frac{p_1}{p_0},$$

und hieraus:

$$\bar\theta_{\varrho_1} - \bar\theta_{\varrho_0} = \frac{1}{2}\,\frac{\bar\omega_{p_1}^2 - \bar\omega_{p_0}^2}{R(\log p_1 - \log p_0)}\left(\varrho_1^2 - \varrho_0^2\right). \tag{13}$$

Schreibt man ω_{p_0}, ω_{p_1} in der Form (5), hat man statt (13) die folgende Gleichung:

$$\bar\theta_{\varrho_1} \quad \bar\theta_{\varrho_0} = \frac{2\Omega\,\dfrac{d\Sigma}{dt}}{R(\log p_1 - \log p_0)}, \tag{14}$$

welche sich auch nach den Methoden der Abschnitte **41** und **42** direkt herleiten läßt und für Anwendungen auf der Erde bequem ist.

Als eine einfache Anwendung wollen wir die meridionale Temperaturverteilung der zonal strömenden Erdatmosphäre berechnen unter der Annahme, daß an der Isobarfläche $p = 30$ cbar (Höhe etwa 9000 m) der Westwind im Mittel 10 m/sec größer ist als an der Isobarfläche $p = 100$ cbar (Meeresniveau). Betrachten wir Partialzirkulationen von 80° bis 90° geogr. Breite, von 70° bis 80° usf., so ist angenähert:

$$2\Omega\frac{d\Sigma}{dt} = 2\bar\Omega_z L(v_1 - v_0),$$

wo L die Länge von zehn Meridiangrad ist und $\bar\Omega_z$ der Mittelwert von Ω_z auf diesem Meridianbogen. Die Gleichung (14) wird dann:

$$\bar\theta_{\varrho_1} - \bar\theta_{\varrho_0} = \frac{2\bar\Omega_z L(v_1 - v_0)}{R(\log p_1 - \log p_0)}. \tag{14'}$$

Hier hat man $v_1 - v_0 = 10$ m/sec, $L = 1111$ km, und es ergibt sich, wenn $\bar{\theta}_{\varrho_1} - \bar{\theta}_{\varrho_0} = \Delta\theta$ gesetzt wird, die folgende Tabelle:

Zirkulation	$\Delta\theta$	Zirkulation	$\Delta\theta$
von 80° bis 90°	4°,7 C	von 30° bis 40°	2°,7
„ 70° „ 80°	4 ,5 „	„ 20° „ 30°	2 ,0
„ 60° „ 70°	4 ,2 „	„ 10° „ 20°	1 ,2
„ 50° „ 60°	3 ,8 „	„ 0° „ 10°	0 ,35
„ 40° „ 50°	3 ,3 „		

Diese Einzelwerte haben keine reale Bedeutung, weil die Windzunahme mit der Höhe auf verschiedenen Breiten sehr verschieden sind. Bildet man aber die Summe, so findet man 27° als Temperaturunterschied zwischen Pol und Äquator. Hätte man $v_1 - v_0 = 15$ m/sec gesetzt, so wäre 40° herausgekommen. Der erste Wert entspricht ungefähr den sommerlichen und der zweite den winterlichen Verhältnissen, und 10 bzw. 15 m/sec sind gewisse mittlere Geschwindigkeitszuwächse mit der Höhe, die nötig sind, um einen solchen Temperaturunterschied aufrechtzuerhalten.

Führt man $s = \frac{R\theta}{p}$ in die Formel (10) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1} = \frac{G(\varphi_1) - G(\varphi_2)}{G(\varphi_1)} \tag{15}$$

Wir betrachten speziell einen horizontalen Gaswirbel im Schwerefelde und setzen voraus, daß die Zentrifugalkraft eine lineare Funktion des Schwerepotentials ist. Aus (8) folgt dann $G(\varphi) = \varphi - \varphi_0$, wo φ_0 das Niveau darstellt, in dem die Zentrifugalkraft Null ist. Der Temperaturunterschied zwischen zwei Punkten einer Isobarfläche ist dann nach (15) durch

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_1} \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_0} \tag{16}$$

gegeben:

Wir können nun annehmen, daß die Bewegung in hinlänglich großem Abstande von der Wirbelachse gegen Null konvergiert. φ_1 kann dann das Potential der Asymptotenebene der betrachteten Isobarfläche sein und φ_2 das Niveau des tiefsten Punktes des Wirbeltrichters, so daß $\varphi_1 - \varphi_2$ die Depression des Wirbeltrichters im Potentialmaß ist und $\theta_2 - \theta_1$ die entsprechende Temperaturdepression an der Wirbelachse. Für irdische Temperaturen $\theta_1 = 273°$ findet man für verschiedene Werte von $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_0}$ die folgenden Temperaturdepressionen:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_0} = \quad 0{,}001 \qquad 0{,}01 \qquad 0{,}1\,,$$

$$\theta_2 - \theta_1 = -0°{,}273 \quad -2°{,}73 \quad -27°{,}3\,.$$

Dies ist auf atmosphärische Wirbeln wie Wasserhosen oder Tromben anwendbar, die also so mäßige Dimensionen haben, daß ihre Winkel-

geschwindigkeit im Vergleich zu derjenigen der Erde groß sein kann. Beträgt dann die Depression der Wirbeltrichter der Isobarfläche ein Hundertstel der Höhe der Flächen oberhalb des Erdbodens, wo die Bewegung gleich Null vorausgesetzt wird, so findet man die Temperatur einer und derselben Isobarfläche an der Wirbelachse 2°,7 niedriger als in großem Abstande davon, und diese Temperaturdepression steigt auf 27°, wenn die Depression des Wirbeltrichters ein Zehntel der Höhe der Isobarfläche über dem Niveau beträgt, wo die Bewegung Null ist.

Für einen ähnlichen Wirbel auf der Sonne, wo man $\theta_1 = 6000°$ hat, findet man:

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_0} = 0{,}001 \quad 0{,}01 \quad 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3\,,$$

$$\theta_2 - \theta_1 = -6° \quad -60° \quad -600° \quad -1200° \quad -1800°.$$

Bei den Wirbeln auf der Sonne erreicht man deshalb leicht die Temperaturdepressionen von ein paar tausend Graden, welche die Sonnenflecken kennzeichnen; und zwar wird dies bei Geschwindigkeiten erreicht, die mäßig sind im Vergleich zu denen, die man auf der Sonne beobachten kann. Abb. 22 gibt die Temperaturverteilung in einem Sonnenflecken, wenn man $\theta_1 = 6000°$ C und $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_0} = 0{,}3$ annimmt[1].

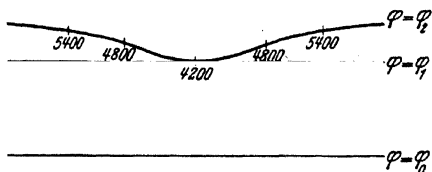



Abb. 22. Temperaturverteilung in einem Sonnenflecken.

46. Stabilität des zirkularen Wirbels. Trägheitswellen. Nach dieser Untersuchung des Bewegungs-, Druck- und Massen- bzw. Temperaturfeldes im stationären zirkularen Wirbel taucht die Frage nach der Stabilität des stationären Zustandes auf.

Um das Problem zu begrenzen, denken wir uns eine aus Parallelkreisen gebildete torusförmige Fläche solidifiiert, so daß wir es mit einer begrenzten Flüssigkeitsmasse innerhalb dieser starren Röhre zu tun haben. Wir fangen mit dem physikalisch einfachsten Falle an, daß diese Flüssigkeitsmasse homogen und inkompressibel ist.

Die Störung denken wir uns durch Momentanimpulse erzeugt, die in den Meridianebenen enthalten und in allen Meridianebenen identisch

[1] Diese Methode zur Schätzung der Temperaturdepressionen in einem Sonnenflecken ist zum ersten Male in der Abhandlung V. BJERKNES, Solar Hydrodynamics, Astrophysical Journal 1926, angegeben worden. In den ohne Beweis gegebenen Formeln hatte sich aber ein Rechenfehler eingeschlichen, wodurch in jener Abhandlung die Temperaturdepressionen doppelt so groß als die richtigen gefunden wurden.

dieselben sein sollen, so daß diese Momentanimpulse für sich allein einen zirkularen Wirbelring (21) erzeugen würden. Die Momentanwirkung der Impulse ist also die, daß sich dem zirkularen Wirbel ein zirkularer Wirbelring überlagert hat. Die Frage ist, wie die Bewegung danach weiter verlaufen wird.

Da die Flüssigkeit autobarotrop ist, wird die Bewegung eine solche sein, bei der Zirkulation und Wirbel individuell so erhalten bleiben, wie sie nach den Impulsen auf die flüssigen Individuen verteilt waren.

Die Impulse haben die Zirkulation der materiellen Parallelkreise nicht verändert. Jeder solche Kreis bewegt sich mit unveränderter Zirkulation, d. h. mit einer Peripheriegeschwindigkeit, die sich umgekehrt wie sein veränderlicher Radius verhält.

Ist nun der ursprüngliche ungestörte zirkulare Wirbel von dem Typus **20** (II), S. 73, wo alle Parallelkreise dieselbe Zirkulation haben (die Geschwindigkeit nach dem Gesetz r^{-1} mit dem Abstand von der Achse abnehmend), so wird die Störung keine Neuverteilung der Zirkulation, der Peripheriegeschwindigkeiten oder der zugehörigen Zentrifugalkräfte zur Folge haben. Die inneren Gleichgewichtsbedingungen im zirkularen Wirbel bleiben von der Störung unberührt und nichts hindert, daß die erzeugte kombinierte Bewegung stationär bleibt.

Der ungestörte Wirbel soll aber jetzt von dem Typus **20** (I) sein, wo die Zirkulation der Parallelkreise nach außen zunimmt. Die unmittelbar aus den Impulsen folgende Umlagerung der Parallelkreise hat dann zur Folge, daß man an denjenigen Stellen, wo sich von innen gekommene Kreise befinden, verkleinerte Peripheriegeschwindigkeit und verkleinerte Zentrifugalkraft findet. Vergrößerte Peripheriegeschwindigkeiten und vergrößerte Zentrifugalkraft dagegen findet man an denjenigen Stellen, wo sich von außen stammende Kreise befinden. Das frühere Gleichgewichtsverhältnis der Zentrifugalkräfte ist gestört, und die Neuverteilung der Zentrifugalkräfte wirkt der durch die Impulse erzeugten Bewegung entgegen. Je weiter die erzeugte Störungsbewegung fortschreitet, um so stärker wird die durch die Zentrifugalkräfte erzeugte Gegenbeschleunigung. Schließlich kehrt die Bewegung um und erreicht unter Beschleunigung durch die Zentrifugalkräfte wieder die Ausgangslage. Dann folgt ein Ausschlag in der entgegengesetzten Richtung unter Entwicklung neuer entgegenwirkender Zentrifugalkräfte, usf. Es erfolgen meridionale Schwingungen wie diejenigen eines Pendels.

Während dieser Schwingungen werden die Stromlinien abwechselnd Rechts- und Linksschraubenlinien, die auf den Torusflächen gelegen sind, auf denen sich die Kreise hin und her bewegen. Die Bahnen der einzelnen Teilchen sind in der Absolutbewegung Sinuslinien auf diesen

Torusflächen. In ihrer Bewegung relativ zur Grundströmung sind sie Ellipsen auf diesen Torusflächen, mit einer Hauptachse längs der Parallelkreise und einer längs der Meridionalkurven. Bei dem Umlaufe in dieser elliptischen Bahn (Abb. 23) befindet sich das Teilchen am weitesten vorn relativ zur Grundströmung, wenn es während der Bewegung nach außen seinen mittleren Abstand von der Wirbelachse passiert. Im weiteren Verlauf der Bewegung passiert das Teilchen seinen größten Abstand von der Wirbelachse mit größter relativer Rückwärtsgeschwindigkeit, den hintersten Punkt seiner Bahn mit größter Einwärtsgeschwindigkeit und den innersten Punkt seiner Bahn mit größter Vorwärtsgeschwindigkeit. Die Umlaufsrichtung in dieser relativen Bahn ist der Umlaufsrichtung im zirkularen Wirbel entgegengesetzt. Die Relativbewegung längs der Parallelen verschwindet dort, wo keine Verschiebung der Teilchen in radialer Richtung vorkommt, d. h. wo die Torusfläche eine Zylinderfläche um die Wirbelachse tangiert. Hier schrumpft die Ellipse in ein gerades Linienelement parallel der Wirbelachse zusammen und auf der zentralen ungestörten Parallele sogar in einen Punkt. Die Relativbewegung längs der Parallelen ist andererseits am größten dort, wo die Teilchen die größten Änderungen ihres Abstandes von der Wirbelachse erleiden, d. h. wo die Torusfläche eine zu der Wirbelachse normale Ebene berührt.

Abb. 23. Umlauf eines Teilchens relativ zur Strömung in der Störungsbewegung.

Auf Grund des Gesetzes der individuellen Wirbelerhaltung bestimmt die Bewegung der Teilchen die Bewegung der immer aus denselben Teilchen bestehenden Wirbellinien. Diese Linien, die vor der Störung Geraden parallel der Wirbelachse waren, beschreiben nach der Störung Kegeln um die ursprünglichen ungestörten Wirbellinien als Achsen (Abb. 24). Die Scheitelpunkte dieser Konusse liegen in der Ebene oder Fläche, wo die elliptischen Bahnen der Teilchen zu Linienelementen parallel der Wirbelachse zusammengeschrumpft sind. Wie die Wirbellinien bewegen sich auch die von den Wirbellinien erzeugten Wirbelröhren mit ihrem Masseninhalt. Die Wirkung der Störung ist also kurz gesagt so, *daß die materiellen Wirbelröhren mit ihrem Masseninhalt eine Nutationsbewegung annehmen entsprechend der Nutationsbewegung,*

Abb. 24. Nutationsbewegung der Wirbellinien im zirkularen Wirbel.

die ein im Raume frei rotierender fester Körper bei einer Störung annimmt.

Je mehr man die störenden Impulse vergrößert, um so größere geschlossene Bahnen beschreiben die Teilchen in ihrer Bewegung relativ zur Grundströmung und um so größer werden die Nutationsbewegungen. Schließlich können innerhalb des zur Verfügung der Radialbewegung stehenden Raumes nicht mehr genügende Zentrifugalkräfte entwickelt werden, um die Bewegung zur Umkehr zu bringen. Statt Kurven zu sein, die sich zu einem Punkte zusammenziehen können, ohne die Torusfläche zu verlassen, werden die Bahnen jetzt den Torus in solcher Weise umfassen, daß dies nicht mehr möglich ist. In diesen Bahnen werden die Teilchen rhythmische Umläufe ausführen, wie diejenigen eines Pendels, der einen so kräftigen Stoß erhalten hat, daß er an seiner instabilen Gleichgewichtslage vorbeikommt. Dabei beschreiben die Wirbellinien die entsprechenden Kegeln.

Ein anschauliches Bild dieser Bewegung kann man sich auch machen, indem man sie sich in einer anderen Weise erzeugt denkt. Die primär gegebene Bewegung kann dann diejenige eines zirkularen Wirbelringes sein, wo ein stationärer Umlauf längs geschlossener Kurven in den Meridianebenen stattfindet. Dann führt man durch kleine Impulse tangentiell zu den Parallelkreisen eine kleine Störung ein, die für sich allein einen schwachen zirkularen Wirbel erzeugt haben würde. Durch dynamische Betrachtungen ähnlicher Art wie die oben durchgeführten sieht man, daß dabei ein Rhythmus in die Meridionalzirkulation hineinkommt, außer in dem Spezialfall, wo der als Störungsbewegung hinzugefügte zirkulare Wirbel ein solcher mit gleicher Zirkulation aller Parallelkreise ist. In diesem Ausnahmefall bleibt die zu Anfang betrachtete Kombination von stationärem Wirbel und stationärem Wirbelring erhalten.

Der rhythmische Meridionalumlauf geht mit der größten Geschwindigkeit, wenn die Kreise mit der größten Zirkulation sich außen und die Kreise mit der kleinsten Zirkulation sich innen befinden, und mit der kleinsten Geschwindigkeit, wenn die Kreise mit der kleinsten Zirkulation außen und die mit der größten innen sind. Die erste Lage entspricht dem stabilen Zustand, wo der zirkulare Wirbel von Typus (I) ist, die zweite Lage dem instabilen Zustand, wo der zirkulare Wirbel von dem Typus (III) der in **20** gegebenen Einteilung ist.

Bei passend abgemessenen störenden Impulsen kann der Wirbel noch gerade an dieser Lage des inneren instabilen Gleichgewichtes vorbeikommen. Ist ein ungestörter Wirbel dieser instabilen Art gegeben, so wird schon der geringste Impuls genügen, um den rhythmischen Umlauf in Gang zu bringen.

Wir lassen dabei die Frage offen, ob ein solcher rhythmischer Umlauf genügende Stabilität hat, um dauernd erhalten zu bleiben oder ob er

sich nicht in Bewegungen mehr verworrener Art auflöst. Jedenfalls kann man aber mit vollem Recht den Wirbel mit nach außen zunehmender Zirkulation als instabil bezeichnen, weil selbst die geringste Störung genügt, um eine gewaltsame Bewegung auszulösen.

Um mit einem möglichst einfachen Problem anzufangen, haben wir Störungen des zirkularen Wirbels betrachtet, die in allen Meridionalebenen die gleichen waren. Wir können aber diese Störungen auch durch solche ersetzen, die sektorenweise entgegengesetztes Vorzeichen haben und beispielsweise nach einem Sinusgesetz verteilt sind. Was wir bisher für den ganzen Umfang des Wirbels entwickelt haben, wird sich dann sektorenweise wiederholen. Bei den Verschiebungen in radialer Richtung ändern sich die Geschwindigkeitskomponenten der Teilchen längs der Parallelkreise nach dem Flächensatze, d. h. umgekehrt wie der Abstand von der Achse, und daraus folgt eine Neuverteilung der Zentrifugalkraft, die jetzt sektorenweise, statt früher für den ganzen Umfang des Wirbels auftritt. Im Stabilitätsfall, wenn die Geschwindigkeit nach außen entweder zunimmt oder langsamer als nach dem Gesetze r^{-1} abnimmt, werden dann durch hinlänglich kleine Störungen Schwingungen ausgelöst, die sektorenweise entgegengesetztes Vorzeichen haben und als stehende Schwingungen oder als sich längs der Parallelen fortpflanzende Wellen auftreten können: der stabile zirkulare Wirbel verhält sich ähnlich wie ein elastischer fester Körper, in dem Torsionsschwingungen auftreten oder Wellen sich fortpflanzen. Die auf Trägheit beruhenden Wellen im zirkularen Wirbel sind aber nicht wie die elastischen Torsionswellen rein transversal, sondern gemischt transversal und longitudinal: die transversale Verschiebung längs des Radiusvektors hat longitudinale Geschwindigkeitsänderungen längs der Parallelen zur Folge und longitudinale Geschwindigkeitsänderungen haben transversale Verschiebungen zur Folge. In dieser Verknüpfung der Transversalverschiebungen mit den Longitudinalgeschwindigkeiten besteht das eigentlich Charakteristische dieser *Trägheitswellen*. Für die mathematische Theorie dieser Schwingungen und Wellen vergleiche Kap. XI.

Die abgeleiteten Resultate über Stabilität und Instabilität des zirkularen Wirbels folgten aus der Trägheit der bewegten Teilchen. Unsere Beschränkung der Betrachtungen auf eine barotrope, und zwar sogar so speziell barotrope Flüssigkeit wie die homogen-inkompressible, war deshalb keine wesentliche. Man findet ähnliche Erscheinungen als Wirkung der Trägheit auch bei Flüssigkeiten allgemeinster Art, wobei sich nur die Bedingungen, welche die Stabilitätsgrenze bestimmen, quantitativ verschieben.

47. Turbulenz und Turbulenzreibung. Die Resultate, die wir für die Stabilität und Instabilität der zirkulären Wirbelbewegung gefunden

haben, wenn die Flüssigkeit in einer starren Röhre eingeschlossen ist, können wir induktiv verallgemeinern, indem wir ein Element einer beliebigen Röhre als dem oskulierenden zirkularen Wirbel angehörig betrachten: innerhalb gekrümmter starrwändiger Röhren ist die Bewegung stabil, wenn die Bewegung nach der konvexen Seite der Röhre entweder zunimmt oder langsamer abnimmt als nach dem Gesetz r^{-1}, wo r der Krümmungsradius der Röhre ist, d. h. der Krümmungsradius einer gewissen mittleren Röhrenachse.

Denken wir uns jetzt eine beliebige Flüssigkeitsbewegung gegeben, so können wir in der verschiedensten Weise die Wände der Stromröhren solidifiieren und die Stabilität oder Instabilität der Bewegung innerhalb jeder solchen Röhre untersuchen. Findet man dann die Bewegung stabil innerhalb aller Röhren, so ist es möglich, daß die Bewegung stabil bleibt, auch wenn man die starren Wände verschwinden läßt. Sicher ist es aber nicht, denn die starren Wände tragen unbedingt zur Stabilität bei. Findet man dagegen die Bewegung innerhalb gewisser oder aller Röhren instabil, so kann man mit Sicherheit schließen, daß diese Instabilität auch nach dem Verschwinden der Wände vorhanden sein wird. Denn das Wegnehmen der Wände kann nur die Instabilität vergrößern. Man hat jeden Grund, anzunehmen, daß diese Instabilität zur Folge haben wird, daß die ursprünglich stationäre laminare Bewegung in turbulente Bewegung übergehen wird.

Damit soll nicht gesagt werden, daß die Instabilität gekrümmter Strömungen die einzige, wohl aber eine sehr allgemeine Ursache der Turbulenzentstehung ist. Dies folgt schon daraus, daß in Wirklichkeit alle Strömungen gekrümmt sind. Denn was wir hier auf der Erde gerade Strömungen nennen, sind wegen der Rotation der Erde in Wirklichkeit gekrümmte Strömungen. Geht man ins Ultramikroskopische oder nähert man sich dem molekularen Gebiet, so existiert keine geradlinige Bewegung von hinlänglich kleinen Massen mehr. Selbst die glatteste ebene Wand ist uneben, und die Stromröhren einer vorbeiströmenden Flüssigkeit sind gekrümmt. Wenn es eine Stelle gibt, wo die Bewegung Null ist, so kann dies nie an der konvexen Seite eines krummen Stromes erreicht werden, ohne daß die Geschwindigkeit schneller abnimmt als nach dem Gesetze r^{-1}. An einer solchen Stelle muß dann notwendig Turbulenz als Folge der Trägheit entstehen, sofern es sich um eine vollkommene Flüssigkeit handelt. Das einzige, was das Entstehen dieser Turbulenz hindern könnte, wäre die Reibung, die ja auch nach empirischen Untersuchungen als stabilisierender Faktor auftreten kann und sich als solcher sicher besonders im unendlich kleinen wirksam zeigen muß, während die Turbulenz großen Stiles, die man in Atmosphäre und im Meer in allen Abständen vom Boden antrifft, sicher von der Reibung ganz unbeeinflußt ist.

Eine wichtige Folge der Turbulenz ist, daß man es bei den großen Durchschnittsbewegungen, mit denen man allein bei Luft und Meeresbewegungen rechnen kann, mit einer scheinbaren Reibung, der Turbulenzreibung, zu tun hat, deren Bestimmungsgröße nicht wie diejenige der Reibung der Laminarbewegung eine einzige physikalische Reibungskonstante ist, sondern eine oder mehrere vom Turbulenzzustand abhängige Größen, die von Zeit zu Zeit und von Stelle zu Stelle im Stromfelde verschiedene sein können.

48. Einfache Beispiele des Einflusses der Reibung auf Flüssigkeitsbewegungen. Bei der Diskussion der allgemeinen Eigenschaften der hydrodynamischen Stromfelder haben wir bis jetzt die Flüssigkeit immer reibungslos vorausgesetzt. Volle Übereinstimmung mit der Wirklichkeit erreicht man aber selbstverständlich erst, wenn man auch die Reibung mit in Betracht zieht, die ja bei keinem flüssigen Medium gleich Null werden kann. Wenn man aber dies in befriedigender Weise tun will, so stellen sich dem große Schwierigkeiten entgegen. Erstens sind die hydrodynamischen Gleichungen, wenn man die Reibungsglieder mitnimmt, wesentlich schwieriger zu handhaben. Zweitens stellen diejenigen Lösungen dieser Gleichungen, die wir besitzen, immer nur Laminarbewegungen dar, während wir die wirklich auftretenden mehr oder weniger turbulenten Bewegungen nicht analytisch darstellen können. Allerdings besteht ein wirklicher Unterschied zwischen Laminarbewegung und turbulenter Bewegung wahrscheinlich nicht. Die turbulenten Bewegungen sind kaum etwas anderes als äußerst komplizierte Laminarbewegungen, die sich an Stelle der analytisch gefundenen einfachen Laminarbewegungen einstellen, wenn und wo diese nicht stabil sind. Bis auf weiteres muß man sich darauf beschränken, Durchschnittsbewegungen zu betrachten, bei denen man von den turbulenten Mikrobewegungen absieht und dafür die scheinbaren Reibungswiderstände einführt, die von der Mischung verschieden bewegter Massen durch die Mikrobewegung herrühren. Die dabei auftretenden *scheinbaren Reibungskoeffizienten* sind dann nicht Konstanten, sondern Funktionen des Turbulenzzustandes und somit gewöhnlich Funktionen sowohl des Ortes wie der Zeit.

Auf allgemeinere Probleme, die bei dem Studium dieser Turbulenzreibung auftreten, werden wir in einem späteren Kapitel zurückkommen. Vorläufig soll nur ein Resultat abgeleitet werden, von dem wir später einen qualitativen Überblick über den Einfluß der Reibung auf die großen atmosphärischen Bewegungen ableiten können. Dabei setzen wir die Reibungsglieder der hydrodynamischen Gleichungen in ihrer einfachsten Form an, mit einem konstant angenommenen Reibungskoeffizienten, der aber ganz andere Werte als der physikalische Reibungskoeffizient haben kann.

Um diese Reibungswirkungen unter möglichst einfachen Verhältnissen zu studieren, betrachten wir eine Flüssigkeitsbewegung, bei der Horizontalebenen übereinander gleiten. Man hat also die vertikale Geschwindigkeitskomponente identisch Null. Ebenfalls sind die räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeit nach den horizontalen Koordinaten x und y identisch Null, so daß die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte einer und derselben Horizontalebene zu jeder Zeit identisch dieselben sind. Also:

$$(1) \qquad v_z = 0\,, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0\,.$$

Um weiter nur die reinen Reibungswirkungen von Ebene zu Ebene zu betrachten, setzen wir den horizontalen Druckgradienten gleich Null:

$$(2) \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0\,.$$

Man findet dann aus **34** (4) für die vertikale Koordinate die reine Gleichgewichtsgleichung, und die gesamte Druckverteilung wird wie beim Gleichgewichte. Nur für die horizontalen Koordinaten findet man Bewegungsgleichungen, nämlich:

$$(3) \qquad \frac{\partial v_x}{\partial t} = s\eta\,\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\,, \qquad \frac{\partial v_y}{\partial t} = s\eta\,\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\,,$$

wo man jede Gleichung für sich integrieren kann.

Man erkennt sofort, daß

$$(4) \qquad v_x = A\,e^{\mu z}\cos(\mu z + \nu t) \qquad \text{und} \qquad v_x = A\,e^{-\mu z}\cos(\mu z - \nu t)$$

Lösungen der ersten Gleichung darstellen, wenn:

$$(5) \qquad \mu = \sqrt{\frac{\nu}{2 s\eta}} = \sqrt{\frac{\pi}{s\eta T}}\,.$$

Die erste Lösung stellt Reibungswellen dar, die sich etwa von einer Wasseroberfläche durch das Wasser abwärts fortpflanzen, wenn die Oberfläche selbst durch einen periodisch wechselnden Wind mit der Periode T in Bewegung gesetzt wird. Die zweite Lösung hat vollständig den Charakter eines Spiegelbildes der ersten. Man kann sie z. B. deuten als Wellen, die sich in der Luft aufwärts fortpflanzen, wenn die untere Luftschicht durch einen periodisch wechselnden Meeresstrom der Periode T in Bewegung gesetzt wird. Für die Reibungswellen dieser Art findet man als Wellenlänge L und Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$:

$$(6) \qquad L = 2\pi\sqrt{\frac{2 s\eta}{\nu}} = 2\sqrt{\pi s\eta T}\,, \qquad \tilde{\omega} = \frac{L}{T} = 2\sqrt{\frac{\pi s\eta}{T}}\,.$$

Für jede Wellenlänge nimmt die Wellenamplitude im Verhältnis $e^{-2\pi} = 1/535$ ab. Die Reibungswellen nehmen also äußerst schnell

während der Fortpflanzung ab. Im übrigen verhalten sich die Wellenlängen direkt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Wurzel der als gegeben angesehenen Schwingungsdauer T der Wellen.

Wenn ein wechselnder Wind von der Periode T solche Reibungswellen im darunterliegenden ruhenden Wasser erzeugt, so findet man unter Zugrundelegung der physikalischen Reibungskonstanten für Wasser $s\eta = 0{,}014053$ cgs für Perioden von einer Sekunde, einer Stunde, zwölf Stunden, einem Tag, einem Jahr und einer Million Jahren die Wellenlängen 0,42 cm, 25 cm, 87 cm, 1,23 m, 23,6 m und 23,6 km, mit entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von 0,42 cm/sec, 25 cm Stunde, 87 cm/12 Stdn. 1,23 m/Tag, 23,6 m/Jahr, und 23,6 km pro Million Jahren. Aus solchen Zahlen folgerte seinerzeit ZÖPPRITZ, daß man in den großen Meerestiefen Meeresbewegungen würde finden können, die von den Winden früherer geologischer Epochen an der Oberfläche erzeugt waren. Rechnet man aber dagegen mit den jetzt der Größenordnung nach bekannten Koeffizienten der Turbulenzreibung, der etwa das 50000fache des physikalischen Reibungskoeffizienten ausmacht, so bekommt man für die gleichen Zeiten die Wellenlängen 94 cm, 55,9 m, 194 m, 279 m, 5,22 km, 5220 km und die entsprechend vergrößerten Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Um aber jetzt das Wesen der reinen Reibungsströme weiter zu verfolgen, bemerken wir, daß die zweite Gleichung (3) ganz ähnliche Lösungen gestattet wie die erste. Wegen der Unabhängigkeit der Gleichungen voneinander kann man die beiden Lösungen superponieren. In dieser Weise können wir die beiden folgenden Lösungen bilden:

$$\text{(7A)} \quad \begin{cases} v_x = A e^{\mu z} \cos(\mu z + \nu t)\,, \\ v_y = A e^{\mu z} \sin(\mu z + \nu t)\,, \end{cases} \qquad \text{(7B)} \quad \begin{cases} v_x = A e^{-\mu z} \cos(\mu z - \nu t)\,, \\ v_y = A e^{-\mu z} \sin(\mu z - \nu t)\,. \end{cases}$$

Die erste dieser Lösungen stellt die Bewegung dar, die ein umlaufender Wind von unveränderlicher Stärke in einer darunterliegenden unendlich tiefen ruhenden Wasserschicht erzeugt; die zweite Lösung stellt die Luftbewegung dar, die ein umlaufender Wasserstrom in der darüberliegenden Luft erzeugt. Geht man zu zylindrischen Koordinaten ϱ, ψ, z über, so werden diese Bewegungen dargestellt durch eine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, die längs des Radiusvektors gerichtet ist. Ihr Betrag nimmt nach unten bzw. nach oben exponentiell ab und ihr Azimut ψ hängt von der Zeit t und von der Vertikalen z linear ab:

$$\text{(8A)} \quad \begin{aligned} v &= A e^{\mu z}\,, \\ \psi &= \mu z + \nu t\,, \end{aligned} \qquad \text{(8B)} \quad \begin{aligned} v &= A e^{-\mu z}\,, \\ \psi &= \mu z - \nu t\,. \end{aligned}$$

Zu einer gegebenen Zeit hat man also das Geschwindigkeitsbild (Abb. 25, A, B), das durch die Radienvektoren einer logarithmischen Spirale dargestellt wird, welche diese Radien unter einem Winkel von 45°

schneidet, wobei man mit jedem Umgang der Spirale um eine Wellenlänge weiter nach unten kommt. Die Raumkurve, welche die Geschwindigkeitsverteilung zu einer gegebenen Zeit in den verschiedenen Niveaus darstellt, ist also eine Kombination von Schraubenlinie und Spirale. Läßt man die Zeit variieren, so dreht sich die Schraubenspirale mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ν. Die zweite Lösung (B) stellt wieder das Spiegelbild der ersten Lösung (A) in der spiegelnden Ebene $z = 0$ dar, mit einer zweiten Schraubenspirale, die ebenfalls das Spiegelbild der ersten in der Ebene $z = 0$ ist.

Diese Bewegungen, die man als Absolutbewegung durch sich drehende Schraubenspiralen darstellt, werden uns interessieren durch ihre Analogie mit Relativbewegungen, die wir später (Kap. XII) finden werden, und die man durch Schraubenspiralen darstellt, die unbeweglich relativ zu der rotierenden Erde sind. Diese Lösungen werden uns zeigen, daß selbst permanente Winde auf der rotierenden Erde nur oberflächliche Meeresströmungen erzeugen können. Dies steht im völligen Gegensatz zu der Theorie von ZÖPPRITZ, der die Erddrehung vernachlässigt hatte.

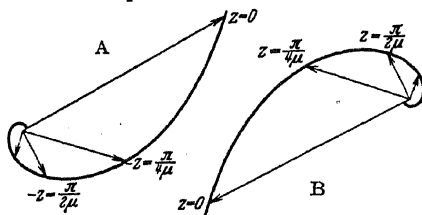



Abb. 25. Schraubenspiralen.

49. Die Energiegleichungen. — Durch die Reibung wird mechanische Energie in andere Energieformen umgesetzt. Dies führt uns zu einer allgemeinen Untersuchung der Energieumwandlungen in unserem flüssigen System. Dabei haben wir es mit zwei sich ergänzenden Energiegleichungen zu tun. Die *dynamische Energiegleichung* ist eine unmittelbare Folge der Bewegungsgleichungen. Prinzipiell Neues dagegen bringt die *thermodynamische Energiegleichung*.

Um die dynamische Energiegleichung zu bilden, gehen wir von der Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der Reibungsglieder aus **12** (12):

$$\dot{\boldsymbol{v}} + \nabla\varphi + s\nabla p - s\,\mathrm{div}\,\mathcal{P} = 0\,,$$

wo wir den Spannungstensor in der Form $-p\mathcal{E} + \mathcal{P}$ geschrieben haben Diese Form ist deshalb vorzuziehen, weil $\mathcal{P} = 0$ auf den Fall einer idealen Flüssigkeit zurückführt. Die skalare Multiplikation dieser Gleichung mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ergibt die skalare Gleichung:

$$\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\varphi + s\boldsymbol{v}\cdot\nabla p - s\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}\,\mathcal{P} = 0\,.$$

Hierin ist das erste Glied die individuelle Zeitableitung von $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2$, d. h. die kinetische Energie pro Masseneinheit. Das zweite Glied können wir als die individuelle Zeitableitung von φ nach der Zeit schreiben, weil

$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\nabla\varphi = \mathfrak{v}\cdot\nabla\varphi$, wegen der lokalen Unveränderlichkeit des Schwerepotentials. Wir erhalten dann die rein dynamische Energiegleichung:

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2 + \varphi\right\} + s\mathfrak{v}\cdot\nabla p - s\mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\Phi = 0.$$

Denkt man sich die beiden letzten Glieder auf die rechte Seite gebracht, so sagt diese Gleichung folgendes über eine bewegte Masseneinheit der Flüssigkeit aus: *die Zunahme der Summe von kinetischer und potentieller Energie pro Zeiteinheit ist gleich der Summe der Arbeit* $s\mathfrak{v}\cdot(-\nabla p)$ *des Druckgradienten und der Arbeit* $s\mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\Phi$ *der Reibungskraft.*

Wir merken uns einen wichtigen Spezialfall dieser Gleichung. Die Flüssigkeit sei reibungslos, so daß das letzte Glied wegfällt. Ist sie dann zugleich homogen und inkompressibel, also s eine Konstante, so läßt sich die Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2 + \varphi + sp\right\} - s\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

schreiben. Ist der Zustand jetzt stationär, und folglich die lokale Zeitableitung des Druckes p gleich Null, so fällt das letzte Glied fort. Dann läßt sich aber die Gleichung individuell nach der Zeit integrieren. Wir finden, daß bei der stationären Bewegung Geschwindigkeit, Druck und Potential eines Teilchens während stationärer Bewegung durch die Relation

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}^2 + \varphi + sp = \text{konst.}$$

verknüpft sind. Beim stationären Zustand gibt aber die zeitliche Reihenfolge der Zustände eines Teilchens zugleich die räumliche Reihenfolge der Zustände von Teilchen zu Teilchen längs einer Stromlinie. Lösen wir z. B. nach dem Drucke p auf, so gibt (2) die bekannte BERNOULLI*sche Gleichung* für die Druckverteilung längs einer Stromlinie bei der stationären Bewegung einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit.

In der allgemeinen Gleichung (1) sind alle Glieder auf die Masseneinheit bezogen. Um sie auf ein konkretes Massenelement dm mit dem Volumen $d\tau$ zu beziehen, multiplizieren wir die Gleichung mit $dm = q\,d\tau$. Man kann dabei die von der Zeit unabhängige Masse unter das Differentiationszeichen d/dt setzen. Wegen $sq = 1$ erhält man dann:

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{v}^2 dm + \varphi\, dm\right) + \mathfrak{v}\cdot\nabla p\, d\tau - \mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\Phi\, d\tau = 0.$$

Diese Gleichung können wir jetzt zu einer bestimmten Zeit für alle Massenelemente in der endlichen Masse integrieren. Dabei treten die beiden Größen

$$(4) \qquad T = \int \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}^2 dm, \qquad \Phi = \int \varphi\, dm$$

auf, wo T die totale kinetische und Φ die totale potentielle Energie der Masse ist. Wenn man gleichzeitig das Volumenintegral des vorletzten Gliedes der Gleichung (3) nach **6** (3) und das Volumenintegral des letzten Gliedes nach **11** (15) transformiert, so ergibt sich:

$$(5)\quad \frac{d}{dt}(T+\Phi) - \int p \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\tau + \int p \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int \boldsymbol{\Phi} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau - \int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 .$$

Nachdem wir die dynamische Energiegleichung auf diese Integralform gebracht haben, können wir sie zweckmäßig mit der thermodynamischen Energiegleichung

$$(6)\qquad \frac{dw}{dt} = \frac{de}{dt} + p\frac{ds}{dt}$$

in Verbindung bringen. Diese Gleichung bezieht sich, genau wie (1), auf die Masseneinheit des bewegten Teilchens. Wir beziehen sie auf ein konkretes Massenelement, indem wir mit $dm = q\, d\tau$ multiplizieren. Das von der Zeit unabhängige dm setzen wir wieder unter das Differentiationszeichen d/dt. Gleichzeitig kann man unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung $q\frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\frac{ds}{dt} = \operatorname{div}\boldsymbol{v}$ schreiben. Die auf das bewegte Massenelement dm bezogene thermodynamische Energiegleichung wird dann:

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}(w\, dm) = \frac{d}{dt}(e\, dm) + p \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\tau ,$$

entsprechend der Form (3) der dynamischen.

Die Gleichung (7) können wir jetzt für eine endliche Masse integrieren. Dabei treten die beiden Größen

$$(8)\qquad W = \int w\, dm, \qquad E = \int e\, dm$$

auf, wo W die der Masse zugeführte totale Wärmemenge ist und E die totale innere Energie der Masse. Die thermodynamische Energiegleichung in Integralform wird dann:

$$(9)\qquad \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt} + \int p \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\tau ,$$

entsprechend der dynamischen Gleichung (5).

Diese beiden Gleichungen haben nun ein gemeinsames Glied, das Integral von $p \operatorname{div}\boldsymbol{v}$, welches die Arbeit ausdrückt, welche die einzelnen Teilchen durch ihre Expansion gegen den Druck p ausführen. Die Elimination dieses Gliedes führt dann zu der folgenden Kombination beider Energiegleichungen in Integralform:

$$(10)\quad \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(T + \Phi + E) + \int \boldsymbol{\Phi} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau + \int p \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\Phi} \cdot d\boldsymbol{\sigma} .$$

Auf der linken Seite steht die der ganzen Masse zugeführte Wärmemenge. Auf der rechten hat man erstens die Zunahme der ganzen Masse an kinetischer, potentieller und innerer Energie, und zweitens

drei Arbeitsgrößen: die innere Reibungsarbeit der ganzen Masse, die Arbeit, welche der Druck p der Umgebung gegen die Grenzfläche leistet, und die Arbeit, welche die Reibungskraft an der Grenzfläche ausführt. Wir werden ein paar Spezialfälle betrachten.

Zunächst nehmen wir die Grenzfläche als unbeweglich an, aber gestatten ein Gleiten der Flüssigkeit längs der Fläche. Die gegen den Druck p der Umgebungen ausgeführte Arbeit verschwindet dann, und die Gleichung (10) wird:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(T + \Phi + E) + \int \mathfrak{P} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau - \int \boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{P} \cdot d\sigma. \tag{11}$$

Die zugeführte Wärme entspricht dann, außer der Vergrößerung der kinetischen, potentiellen und inneren Energie, nur noch der im Inneren und an der Grenzfläche geleisteten Reibungsarbeit.

Lassen wir die Reibungsarbeit außer Betracht, so läßt sich die Gleichung integrieren:

$$W - W_0 = (T + \Phi + E) - (T_0 + \Phi_0 + E_0). \tag{12}$$

Die gesamte zugeführte Wärmemenge entspricht der Zunahme der kinetischen, potentiellen und inneren Energie. Wenn keine Wärme zugeführt wird, hat man:

$$T + \Phi + E = \text{konst.}, \tag{13}$$

d. h. in einem mechanisch wie thermisch vollständig isolierten, reibungslosen System hat man Erhaltung der Summe von kinetischer, potentieller und innerer Energie.

Andererseits können wir annehmen, daß der Zustand des innerhalb der festen Grenzflächen enthaltenen Systems stationär ist. Für dieses System muß dann die Zeitableitung der Gesamtenergie gleich Null sein, und die Gleichung (11) wird:

$$\frac{dW}{dt} = \int \mathfrak{P} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau - \int \boldsymbol{v} \cdot \mathfrak{P} \cdot d\sigma. \tag{14}$$

Die ganze zugeführte Wärmemenge entspricht dann der Ausführung von Reibungsarbeit im Inneren und an der Grenzfläche des Systems. Macht man die sehr plausible Hypothese, daß die Flüssigkeit an der Grenzfläche vollständig haftet (**34**), so wird die Geschwindigkeit an der Grenzfläche Null, und man hat es nur mit der Reibungsarbeit im Inneren der Flüssigkeit zu tun:

$$\frac{dW}{dt} = \int \mathfrak{P} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{v}\, d\tau. \tag{15}$$

Diese Gleichungen kann man dem Studium der Reibungsverhältnisse der großen in erster Linie stationär sich bewegenden Weltmedien wie Atmosphäre und Meer zugrunde legen. Dabei kann man für die Spannungen Ausdrücke wie **34** (1) oder allgemeinere Ausdrücke mit beliebig

räumlich und zeitlich veränderlichem Koeffizienten η der Turbulenzreibung versuchsweise einführen.

Solange man die klassische Form **34** (1) der Spannungskomponenten beibehalten kann, findet man für die auf die Zeit- und Volumeneinheit bezogene durch Reibung verlorene Arbeit den bekannten Ausdruck:

$$\mathfrak{P}\cdot\nabla\cdot\mathbf{v} = -\frac{2}{3}\eta(\operatorname{div}\mathbf{v})^2 + \eta\left\{2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

Dieser Ausdruck der Dissipationsfunktion ist für konstantes wie variables η gültig, ist aber zu verallgemeinern, wenn die Symmetriebedingungen **12** (5) nicht mehr gültig sind.

50. Spezialfall eines idealen Gases. Oben sind noch keine speziellen Körpereigenschaften angenommen worden, abgesehen von dem Spezialfall der Inkompressibilität, der zur BERNOULLIschen Gleichung **49** (2) führte. Die übrigen Gleichungen sind ganz allgemein brauchbar, z. B. auch für ein Gemisch von Luft und Wasserdampf, wie man es in der Atmosphäre hat.

Jetzt werden wir aber den Spezialfall eines idealen Gases betrachten und wollen dabei in die Bezeichnung ideal die Reibungslosigkeit mit einbeziehen. Sind dann c_v und c_p die spez. Wärmen bei konstantem Volumen und bei konstantem Druck, im M.T.S.-System: $c_v = 712$, $c_p = 999$, so ist die innere Energie einer Masseneinheit des Gases:

$$e = c_v\theta, \tag{1}$$

und die Zustandsgleichung ist:

$$ps = R\theta = (c_p - c_v)\,\theta. \tag{2}$$

Wenn man mittels dieser Gleichungen die Energie e und das spez. Volumen s aus der thermodynamischen Energiegleichung **49** (6) eliminiert, so nimmt sie die folgende Form an:

$$\frac{dw}{dt} = c_p\frac{d\theta}{dt} - \frac{R\theta}{p}\frac{dp}{dt}. \tag{3}$$

Die Formel nimmt eine bemerkenswert einfache Form an, wenn wir die potentielle Temperatur **25** (8a) einführen, nämlich:

$$\frac{dw}{dt} = c_p\left(\frac{p}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\frac{d\vartheta}{dt} = c_p\,\theta\,\frac{d}{dt}\log\vartheta. \tag{3'}$$

Der erste Ausdruck zeigt, wie bei gegebenem Druck p die zugeführte Wärmemenge die potentielle Temperatur erhöht, die zweite, wie bei gegebener gewöhnlicher Temperatur θ dieselbe Wärmemenge die von $\log\vartheta$ linear abhängige *Entropie* erhöht.

Die Gleichung (3) werden wir zunächst benutzen, um die *Temperaturänderungen eines bewegten Luftteilchens* zu untersuchen. Durch Auflösung nach der individuellen Zeitableitung der Temperatur ergibt sich:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt} + \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\frac{dp}{dt} \tag{4}$$

Die Temperatur des Teilchens ändert sich also erstens durch Wärmezufuhr bzw. Wärmeverlust dw/dt und zweitens adiabatisch bei Volumenänderung als Folge der Druckänderung dp/dt.

Wenn die Temperaturänderungen rein adiabatisch verlaufen, so fällt das erste Glied rechts fort. Entwickeln wir gleichzeitig die individuelle Zeitableitung von p, so ergibt sich die folgende Gleichung, wo z die Vertikalkoordinate, x und y horizontale Koordinaten sind:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla p\right) = \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y} + v_z\frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{5}$$

Bei rein horizontaler Bewegung des Teilchens reduziert sich die adiabatische Temperaturänderung auf:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y}\right). \tag{6}$$

Der Klammerausdruck, der die Druckänderung des horizontal bewegten Teilchens angibt, hat in der Atmosphäre die Größenordnung 10^{-5} cbar pro Sekunde.

Bei rein vertikaler Bewegung des Teilchens in stationärem Druckfelde, wo $\partial p/\partial t = 0$, wird die adiabatische Temperaturänderung des Teilchens:

$$\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{\quad}{p} v_z \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{7}$$

$v_z\frac{\partial p}{\partial z}$ ist in der freien Atmosphäre von der Größenordnung 10^{-4} cbar pro sec, also im Mittel etwa 10mal größer als die individuelle Druckänderung eines horizontal bewegten Teilchens. Die schnellsten adiabatischen Temperaturänderungen kommen also durch die Vertikalbewegung des Teilchens zustande, bei allen genauen Berechnungen muß aber der ganze Klammerausdruck der Gleichung (5) benutzt werden.

Um die adiabatische Temperaturänderung pro Einheitsniveauänderung des Teilchens zu berechnen, dividieren wir die linke Seite der Gleichung (7) mit $d\varphi/dt$ und die rechte Seite mit der gleich großen Größe gv_z und erhalten:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

Wenn wir annähernd statische Verhältnisse annehmen, ist $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -q = -\frac{p}{R\theta}$, und es ergibt sich:

$$-\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{c_p} = 0{,}001001\,^\circ\mathrm{C} \text{ pro dyn. dm}. \tag{8}$$

Derselbe vertikale Temperaturgradient kennzeichnet, wie wir **28** (16), (16′) gesehen haben, das indifferente Gleichgewicht in der Atmosphäre. Ein adiabatisch aufsteigendes Teilchen würde also, wenn es zu Anfang mit der umgebenden adiabatisch geschichteten Luft gleichtemperiert war, auch ständig mit der neuen Umgebung in anderer Höhenlage gleichtemperiert bleiben.

Ist dagegen die umgebende Atmosphäre entweder überadiabatisch oder unteradiabatisch geschichtet, so werden Vertikalverschiebungen der Luftteilchen zur Folge haben, daß ihre Temperatur von der der neuen Umgebung abweicht, und zwar um so mehr, je größer die Vertikalverschiebung. Wärmeübertragung von oder zu der Umgebung setzt dann ein, und die Bedingungen des adiabatischen Aufsteigens liegen nicht mehr vor. Unter solchen Verhältnissen darf man das Gesetz nur für hinlänglich kleine und schnellverlaufende Vertikalverschiebungen benutzen.

Alle trockenadiabatischen Zustandsänderungen sind reversibel: Luftmassen, die zu ihrem Anfangsniveau zurückkehren, haben auch wieder ihre Anfangstemperatur angenommen.

Wenn die Luftmasse Wasserdampf enthält und durch genügende Abkühlung die Sättigung eintritt, so daß Wassertröpfchen sich ausscheiden, so wird die latente Kondensationswärme des Wasserdampfes freigemacht und kommt dem Gemisch von Luft, Wasserdampf und Wasser zugute. Die Kondensation und die Freimachung von Wärme dauert, solange die Luftmasse sich abkühlt. Die Temperaturänderung der Luftmasse wird in diesem Falle gemäß der Gleichung (4) verlaufen, wo die pro Zeiteinheit freigemachte Kondensationswärme in dw/dt enthalten ist. Wenn der Wärmegewinn bzw. -verlust der Luftmasse nur durch Kondensation bzw. Verdampfung verursacht ist und keine Kondensationsprodukte herunterfallen, nennt man den Vorgang eine *pseudoadiabatische* oder auch *feuchtadiabatische* Zustandsänderung, und dw/dt ist dann gleich der pro Zeiteinheit freigemachten Kondensationswärme. Wenn wir die aus der Experimentalphysik bekannten Werte in die Gleichung (4) einführen, können wir ausrechnen, wie die Temperaturabnahme $d\theta/dt$ eines gesättigten Luftteilchens von der gegebenen Druckabnahme dp/dt abhängt. Für die vollständige Theorie dieser Vorgänge müssen wir auf die Spezialarbeiten verweisen, die auch für die Praxis geeignete graphische Darstellungen der feuchtadiabatischen Temperaturänderungen als Funktion der Druckänderungen enthalten[1].

Für unsere Darstellung genügen die folgenden Hauptresultate der Theorie der feuchtadiabatischen Zustandsänderungen: Die Konden-

[1] Hertz, H.: Met. Zeitschr. Bd. I, S. 421 (1884). — Neuhoff: Abh. d. Preuß. Met. Inst. 1, Nr. 6 (1901). — Fjeldstad: Geofysiske Publikationer, Oslo, Vol. III, No 13 (1925).

sationswärme wirkt durchweg verzögernd auf die adiabatische Expansionsabkühlung, und zwar am stärksten bei hohen Temperaturen. Die Temperaturabnahme eines feuchtadiabatisch aufsteigenden Luftteilchens ist also immer langsamer als diejenige eines trockenadiabatisch aufsteigenden Teilchens. Nahe am Erdboden und bei tropischen Temperaturen ist der feuchtadiabatische Temperaturgradient etwas kleiner als die Hälfte des trockenadiabatischen Gradienten und bei polaren Temperaturen etwa $^9/_{10}$ desselben. Mit zunehmender Höhe wird der feuchtadiabatische Temperaturgradient immer größer und nähert sich asymptotisch an den in allen Höhen gleichbleibenden trockenadiabatischen Gradienten 1 ° C pro 100 dyn. m.

Die feuchtadiabatischen Zustandsänderungen sind reversibel, vorausgesetzt, daß alle Kondensationsprodukte in der Luftmasse suspendiert bleiben. Eine Kompressionserwärmung der Luftmasse bringt dann das kondensierte Wasser nach und nach zum Verdampfen, und die dadurch gebundene Verdampfungswärme verzögert die Kompressionserwärmung, quantitativ genau so wie die freiwerdende Kondensationswärme die Expansionsabkühlung verzögert. Die gesättigte Luftmasse durchläuft also in diesem Falle genau dieselbe Zustandsänderung wie bei Expansion, nur in umgekehrter Richtung. Wenn aber die Kondensationsprodukte als Niederschlag aus der Luftmasse, in der sie gebildet wurden, teilweise herausfallen, ist der Vorgang nicht mehr reversibel. Bei Kompression kehrt die Luftmasse dann eher zum Trockenstadium zurück, als wenn alle Kondensationsprodukte noch zu verdampfen wären, und sie erwärmt sich dann trockenadiabatisch. Auf den Luftdruck zurückgebracht, wo die Kondensation ursprünglich anfing, ist dann die Luftmasse wärmer als ursprünglich geworden. Eine ursprünglich ungesättigte Luftmasse, in der bei pseudoadiabatischer Zustandsänderung Niederschlag gebildet wird, hat, wenn die Wolke wieder verdampft ist, eine höhere potentielle Temperatur als im Anfangszustand.

Um die Temperaturänderungen eines bewegten Luftteilchens zu studieren, haben wir in (5) die individuelle Zeitableitung der Temperatur beibehalten und nur diejenige des Druckes p entwickelt. Um jetzt *die an Ort und Stelle verlaufenden Temperaturänderungen* zu untersuchen, entwickeln wir in (4) beide Zeitableitungen und behalten auf der linken Seite nur die lokale Zeitableitung von θ. Dies gibt:

$$(9)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt} + \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\left(\frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\nabla p - \nabla\theta\right).$$

Die lokale Temperaturänderung ist also gleich die Summe der Temperaturänderungen durch:

1. Wärmezufuhr: $\frac{1}{c_v}\frac{dw}{dt}$

2. Adiabatische Erwärmung und Abkühlung vermöge der lokalen Druckänderung: $\frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\frac{\partial p}{\partial t}$.

3. Horizontale Konvektion oder, nach meteorologischem Sprachgebrauch, *Advektion* anderstemperierter Luftteilchen, die unterwegs adiabatisch erwärmt oder abgekühlt werden:

$$\boldsymbol{v}\cdot\left\{\frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\nabla p-\nabla\theta\right\}.$$

Das Advektionsglied kann durch die Einführung der potentiellen Temperatur $\vartheta=\theta\left(\frac{100}{p}\right)^{R/c_p}$ auf eine etwas kürzere Form gebracht werden. Es ist nämlich:

$$\frac{\nabla\vartheta}{\vartheta} : \quad \frac{\nabla\theta}{\theta} \qquad \frac{R}{}\;\frac{\nabla p}{}$$

wodurch sich:

$$\boldsymbol{v}\cdot\left(\frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\nabla p-\nabla\theta\right)=-\frac{\theta}{\vartheta}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\vartheta$$

ergibt. Führt man dies in (9) ein, so erhält man:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt}+\frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\theta}{\vartheta}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\vartheta. \tag{10}$$

Man sieht hieraus, daß die Luftbewegung dort eine lokale Temperaturerhöhung erzeugt, wo sie von einer Gegend höherer potentieller Temperatur kommt, dagegen eine Temperaturerniedrigung, wo sie von einer Gegend niedrigerer potentieller Temperatur kommt. Für die rein horizontale Bewegung gilt ebenfalls mit einiger Genauigkeit die Regel, daß die Temperatur steigt, wenn der Wind aus einer warmen, und fällt, wenn der Wind aus einer kalten Gegend kommt, denn die Kompressionserwärmung bzw. Expansionsabkühlung ist bei rein horizontaler Bewegung gering.

Für den Fall reiner Vertikalbewegung unter adiabatischen Bedingungen in stationärem Druckfeld ist:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\quad\frac{\theta}{\vartheta}v_z\frac{\partial\vartheta}{\partial z}. \tag{10a}$$

In unteradiabatisch (stabil) geschichteter Atmosphäre ist $\frac{\partial\vartheta}{\partial z}>0$, und es ergibt sich deshalb,

wenn $v_z>0$: $\quad\frac{\partial\theta}{\partial t}<0$,

und wenn $v_z<0$: $\quad\frac{\partial\theta}{\partial t}>0$.

In der unteradiabatischen Atmosphäre tritt also lokale Abkühlung beim Aufsteigen und lokale Erwärmung beim Absteigen der Luft ein. In der überadiabatischen (labilen) Atmosphäre tritt dementsprechend

lokale Erwärmung beim Aufsteigen und lokale Abkühlung beim Absteigen der Luft ein.

Mit denselben Vereinfachungen, die von der Gleichung (10) zu (10a) führen, ergibt sich aus (9) der Ausdruck:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = v_z\left(\frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial z}\right). \tag{11a}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Gleichgewichtsgleichung **27** (7) für die Vertikale angenähert erfüllt ist, hat man: $\frac{\partial p}{\partial z} = -gq = -g\frac{p}{R\theta}$. Durch Einführung dieser Werte in (11a) ergibt sich:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v_z\left(\frac{g}{c_p} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\right). \tag{11b}$$

Da gemäß (8) $1/c_p$ der adiabatische vertikale Temperaturgradient im dynamischen Maß ist, wird g/c_p derselbe Gradient im geometrischen Maß. Für diese viel benutzte Hilfsgröße wollen wir die Bezeichnung δ_a und für $-\frac{\partial \theta}{\partial z}$ die entsprechende Bezeichnung δ einführen, wodurch die Formel in

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v_z(\delta_a - \delta) \tag{11c}$$

übergeht.

Für die unteradiabatische Atmosphäre ist $\delta_a - \delta > 0$ und für die überadiabatische $\delta_a - \delta < 0$, so daß natürlich dieselben Regeln wie aus der Gleichung (10a) sich ergeben.

Dieselbe Form der Gleichung läßt sich auch für den Fall pseudoadiabatischer Zustandsänderungen benutzen, indem man statt des adiabatischen Temperaturgradienten δ_a den aus den Tabellen für pseudoadiabatische Zustandsänderungen entnommenen pseudoadiabatischen Gradienten δ_{pa} einträgt:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v_z(\delta_{pa} - \delta). \tag{11d}$$

Entscheidend für das Vorzeichen der lokalen Temperaturänderung bei Auf- bzw. Absteigen ist dann die Differenz des pseudoadiabatischen Gradienten δ_{pa} und des vorhandenen vertikalen Temperaturgradienten δ.

51. Die Arbeit bei einem Kreisprozeß. Wenn ein beliebiger Körper im thermodynamischen Sinne des Wortes einen Kreisprozeß durchläuft, ist die dem Körper zugeführte Wärme gleich der von dem Körper geleisteten Arbeit. Dies gilt auch für jedes Teilchen der bewegten Flüssigkeit. Bei der Anwendung auf ein solches bewegtes Teilchen der Flüssigkeit tritt, wie J. W. Sandström zuerst bemerkt hat, und wie wir es jetzt zeigen werden, eine sehr nützliche Analogie mit dem thermodynamischen Zirkulationstheorem auf. Eben wegen der formalen Analogie der beiden

Theoreme ist es wichtig, auf die verschiedenen Voraussetzungen ihrer Verwendbarkeit zu achten. Um dieses klarzulegen, werden wir nebeneinander eine Neuableitung des Zirkulationstheorems und die parallele Ableitung des Arbeitstheorems geben.

Den Ausgangspunkt für die Ableitung des Zirkulationstheorems bildet die Bewegungsgleichung und für die Ableitung des Arbeitstheorems die thermodynamische Energiegleichung, also bzw.:

(1 A) $\dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla\varphi - s\nabla p\,,$ (1 B) $\dot{w} = \dot{e} + p\dot{s}\,.$

Wir multiplizieren die Vektorgleichung (1 A) skalar mit dem Linienelemente $\delta\boldsymbol{r}$ einer materiellen Kurve und die Skalargleichung (1 B) mit dem Zeitelemente dt. Es ergibt sich dann:

$$\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{r} = -\delta\varphi - s\,\delta p\,, \qquad dw = de + p\,ds\,.$$

Wir integrieren dann die erste Gleichung rein geometrisch zur Zeit t vom Anfangspunkt 0 bis zum Endpunkt 1 der materiellen Kurve; die zweite integrieren wir nach der Zeit für das bewegte Teilchen von t_0 bis t_1:

$$\int_0^1 \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\delta\boldsymbol{r} = -(\varphi_1 - \varphi_0) - \int_0^1 s\,\delta p\,, \qquad w_0^1 = e_1 - e_0 + \int_{t_0}^{t_1} p\,ds\,.$$

Jetzt führen wir zwei parallele, aber inhaltlich wesentlich verschiedene Voraussetzungen ein: daß die materielle Kurve, auf die sich die erste Gleichung bezieht, geschlossen ist, und daß das bewegte Teilchen, auf das sich die zweite Gleichung bezieht, im thermodynamischen Sinne einen Kreisprozeß durchgemacht und also zur Zeit t_1 wieder seinen Zustand zur Zeit t_0 angenommen hat. Man hat dann in der ersten Gleichung $\varphi_1 = \varphi_0$, in der zweiten $e_1 = e_0$. Die linke Seite der ersten Gleichung wird nach **19** (12) die Zirkulationsbeschleunigung der Kurve und die linke Seite der zweiten Gleichung wird die dem Teilchen während des Kreisprozesses zugeführte Wärme w. Die auf diese Größen bezüglichen Gleichungen reduzieren sich dann auf:

(2 A) $\dfrac{dC}{dt} = -\displaystyle\int s\,\delta p\,,$ (2 B) $w = \displaystyle\int p\,ds\,.$

Schließlich können wir das rechtsstehende Integral in der einen oder in der anderen Gleichung durch partielle Integration umformen. Dadurch ergibt sich:

(3 A) $\dfrac{dC}{dt} = \displaystyle\int p\,\delta s\,,$ (3 B) $w = -\displaystyle\int s\,dp\,.$

Die Gleichungen (2 A) oder (3 A) drücken das dynamische Zirkulationstheorem aus, die Gleichungen (2 B) oder (3 B) sind nichts anderes als das klassische thermodynamische Theorem vom Kreisprozesse, das für ein bewegtes Teilchen der Flüssigkeit ebenso gültig ist, als wenn

sich dasselbe Teilchen unter dem Kolben eines Zylinders befindet. Die formelle Übereinstimmung der beiden Theoreme ist aber eine frappante, besonders wenn wir (2A) mit (3B) oder (3A) mit (2B) zusammenstellen. Dann unterscheiden sich die linken Seiten der Gleichungen nur durch die zwei verschiedenen in Anwendung gebrachten Differentiationszeichen δ und d. Sie geben an, daß in den Gleichungen (A) die Integration eine räumliche ist, die zur festen Zeit t vorgenommen wird, und in den Gleichungen (B) eine reine Zeitintegration. Allerdings kann man diese Integration auch auf eine Kurve im Raume beziehen, nämlich auf die Bahn, die das Teilchen im Raume durchläuft. Diese Bahn steht aber gewöhnlich in keiner einfachen Beziehung zu den thermodynamischen Prozessen, auf die sich die Gleichung bezieht. Selbst wenn die Bahn geschlossen ist, gelangt das Teilchen meistens nicht wieder in seinen Anfangszustand, wenn es in seine Anfangslage zurückgekehrt ist.

Statt auf die Bahn des Teilchens können wir aber die Gleichungen (B) bildlich auf eine andere Kurve beziehen, nämlich auf diejenige Kurve, welche der vertretende Punkt im CLAPEYRONschen thermodynamischen Diagramm durchläuft, deren Gebrauch in der physikalischen Thermodynamik wir schon einleitend besprochen haben (**23**, S. 83). Dann beziehen sich die Gleichungen (2B) oder (3B) auf den Fall, in dem *die Kurve im Diagramm geschlossen* ist. Das Integral wird dann durch den von der Kurve begrenzten Flächeninhalt dargestellt mit von der Umlaufsrichtung abhängigem Vorzeichen.

Zwischen diesem Diagramm mit Geraden $p =$ konst. parallel der Abszissenachse und Geraden $s =$ konst. parallel der Ordinatenachse und den Feldern des Druckes und des spez. Volumens im Raume besteht nun eine einfache Beziehung. Jeder Geraden $p =$ konst. im Diagramm entspricht eine Fläche $p =$ konst. im Raume; und jeder Geraden $s =$ konst. im Diagramm entspricht einer Fläche $s =$ konst. im Raume. Jeder Flächeneinheit im Diagramm entspricht in dieser Weise eindeutig ein bestimmtes isobar-isosteres Solenoid im Raume. Jedesmal, wenn das bewegte Teilchen eine Isobarfläche $p =$ konst. im Raume passiert, passiert der vertretende Punkt im Diagramm die entsprechende Gerade $p =$ konst., und wenn das Teilchen eine isostere Fläche im Raume passiert, passiert der vertretende Punkt die entsprechende Linie $s =$ konst. im Diagramm. Der große Unterschied ist, daß, während diese Linien im Diagramm still liegen, die entsprechenden Flächen im Raume meistens in stetiger Bewegung sind, und aus diesem Grunde entsprechen geschlossenen Kurven im Diagramm meistens nicht geschlossene Bahnen im Raume.

Aber nichts hindert uns, das Diagramm in jeder anderen Beziehung so abzuändern, daß es ein möglichst anschauliches Durchschnittsbild des Flächensystems im Raume gibt. Wir können die isobaren Linien

horizontal wählen, aber mit nach aufwärts abnehmendem Druck, und wir können die isosteren Kurven mit einer Neigung zeichnen, die der Neigung der Isosterenflächen im Raume entspricht. Das Diagramm hat dann das Aussehen eines Schnittes durch das Solenoidsystem. Jedem Solenoid im Raume entspricht eindeutig ein elementares Parallelogramm im Diagramm, dem wieder ein ganz bestimmtes elementares Quadrat im ursprünglichen rechtwinkligen Diagramm entspricht. Wir können jetzt unsere Terminologie so wählen, daß sie sich jedem solchen Diagramm anpaßt. Die vertretende Kurve führt man eindeutig von einem Diagramm zum anderen über. Was man im rechtwinkligen Diagramm als den Flächeninhalt der Kurve bezeichnet, kann man ebensogut die Anzahl der innerhalb der Kurve befindlichen Einheitsquadrate nennen. Diese Anzahl ist aber identisch mit der Anzahl der entsprechenden Einheitsparallelogramme innerhalb der entsprechenden Kurve im beliebig schiefwinkligen und krummlinigen Diagramm. Diese Parallelogramme entsprechen wieder eindeutig den Solenoiden im Raume. Wir können deshalb ganz allgemein von Solenoiden reden, auch im Diagramm, nur mit dem Unterschied, daß wir im Diagramm immer festliegende, im Raume dagegen meistens bewegte Solenoide vor uns haben. Wir können das Integral in der Gleichung (3B) als die Anzahl von Solenoiden innerhalb der geschlossenen Kurve im Diagramm deuten, ganz wie wir im dynamischen Zirkulationssatz das ähnliche Integral als die Anzahl von Solenoiden im Raume deuteten, welche die materielle Kurve zu einer bestimmten Zeit umfaßt. Zuletzt ist nur noch das Vorzeichen der Zahl zu untersuchen, die das Integral ausdrückt. Die Arbeit des Teilchens ist positiv, wenn es sich unter hohem Druck ausdehnt und unter niedrigem Druck zusammenzieht. Die dadurch gegebene Umlaufsrichtung im Diagramm ist aber die Umlaufsrichtung vom Volumenaszendenten zum Druckgradienten. Die Vorzeichenregel ist deshalb dieselbe wie beim dynamischen Zirkulationssatz.

Wir können deshalb die Gleichungen (2) oder (3) schließlich in der folgenden Form schreiben, bei der die Analogie voll hervortritt:

(4A) $\frac{dC}{dt} = N(s, -p)$, (4B) $w = N(s, -p)$.

Der fundamentale Unterschied ist aber nicht zu vergessen. In Gleichung (4A), die das dynamische Zirkulationstheorem **40** (7A) ausdrückt, stellt $N(s, -p)$ die Zahl der Solenoide dar, welche die materielle Kurve in der Flüssigkeit umschließt, im Arbeitstheorem (4B) dagegen die Zahl der Solenoide, welche der vertretende Punkt im CLAPEYRONschen Diagramm umkreist hat. Also:

(I) *Für jeden vollen Umlauf des vertretenden Punktes im thermodynamischen Diagramm ist pro Masseneinheit des bewegten Teilchens im*

Raume eine Wärmemenge in Arbeit umgesetzt worden, die gleich der Anzahl $N(s, -p)$ der im Diagramm umkreisten isobar-isosteren Solenoide mit positivem oder negativem Vorzeichen ist, je nachdem, ob die Solenoide in der positiven Richtung, vom Volumenaszendenten zum Druckgradienten oder in der entgegengesetzten Richtung umkreist worden sind.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die Umsetzung von Wärme in Arbeit bei den Flüssigkeitsbewegungen verfolgen, indem man neben der wirklichen Bewegung des Teilchens im Raume die Bewegung der zugeordneten Punkte im thermodynamischen Diagramm verfolgt.

In einem Falle tritt aber eine außerordentliche Vereinfachung ein, nämlich wenn sich das Solenoidsystem im Raume in Ruhe befindet. Das bewegte Teilchen im Raume umkreist dann genau dieselbe Solenoidzahl wie der vertretende Punkt im Diagramm, und man erhält:

(II) *Wenn das Solenoidsystem räumlich unveränderlich ist, werden bei einem vollen Umlauf einer Masseneinheit, ebenso viele Wärmeeinheiten in Arbeit umgesetzt, als die geschlossene Bahn Solenoiden umschließt.*

In dieser Form ist der Satz spezieller als der entsprechende dynamische Zirkulationssatz, der nichts über festliegende Solenoidsysteme voraussetzt. Dennoch ist aber auch dieser thermodynamische Satz sehr brauchbar, weil die Solenoidsysteme der großen planetarischen Zirkulationen annähernd festliegend sind. In noch bequemere Form läßt er sich bringen, wenn man annimmt, daß nicht nur die Solenoide, sondern auch die Stromlinien unveränderlich und geschlossen sind, so daß man eine Strömung in einem festliegenden geschlossenen Röhrensystem hat. Wir betrachten in diesem Stromfelde eine geschlossene Röhre von elementarem Querschnitt, die M Masseneinheiten enthält. Wenn in einer solchen Röhre eine Masseneinheit einen vollen Umlauf vollführt hat, haben sämtliche Masseneinheiten den vollen Umlauf vollführt, mit dem Erfolg, daß MN Wärmeeinheiten in Arbeit umgesetzt worden sind, vorausgesetzt, daß die Röhre N isobar-isostere Solenoide umschließt. Man braucht aber dann nicht mehr mit vollen Umläufen zu rechnen, sondern hat sogleich:

(III) *Bei der Strömung in einer festliegenden geschlossenen Stromröhre, die $N(s, -p)$ isobar-isostere Solenoide im unveränderlichen Solenoidfelde umschließt, werden für jede Masseneinheit, die einen Querschnitt der Röhre passiert, $N(s, -p)$ Wärmeeinheiten in Arbeit umgesetzt.*

Der Satz ist sehr bequem für das Studium der Wärmeumsetzung bei den großen annähernd stationären atmosphärischen Bewegungen.

Diese Sätze, durch die man die Arbeitsleistung bei den atmosphärischen Zirkulationsbewegungen mit Hilfe der räumlichen Solenoidsysteme bestimmt, haben eine wichtige Folge, auf die ebenfalls J. W. SAND-

STRÖM aufmerksam gemacht hat. Eine thermodynamische Maschine leistet nur dann Arbeit, wenn die Wärmezufuhr bei höherem Druck als die Wärmeabgabe stattfindet. Verbindet man dies mit der allgemeinen Abnahme des Druckes nach oben in der Atmosphäre, so schließt man:

Zur Unterhaltung einer stationären Zirkulationsbewegung in der Atmosphäre muß die Kältequelle höher als die Wärmequelle liegen.

Die Richtigkeit dieses Schlusses, den SANDSTRÖM anfänglich gegen heftige Angriffe seitens der Meteorologen verteidigen mußte, wird im folgenden völlig evident.

52. Arbeitsweise und Leistung einer einfachen thermodynamischen Zirkulationsmaschine. Die Bewegung in der eben betrachteten Röhre wird nicht im geringsten verändert, wenn wir uns die Wand der Röhre als solidifiiert denken. Wir können uns dann, wenn es für die Vorstellung bequem ist, die umgebende Flüssigkeit entfernt denken, so daß wir es nur mit einer einzigen Röhre als einer isolierten Zirkulationsmaschine zu tun haben. Wir werden die thermischen Bedingungen für die Arbeit dieser Maschine etwas genauer analysieren.

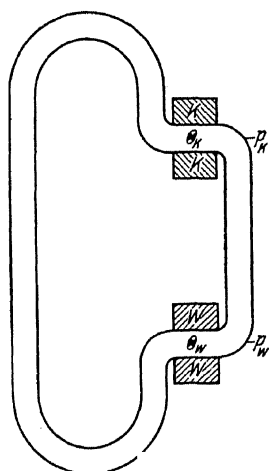



Abb. 26. Einfache thermodynamische Zirkulationsmaschine.

Wir denken uns die Röhrenwand für Wärme vollkommen undurchdringlich, außer an zwei Stellen, wo eine Wärmequelle W bzw. eine Kältequelle K sich befinden. Diese Quellen sind an horizontalen Röhrenstücken angebracht (Abb. 26), damit die Wärmezufuhr bzw. Wärmeentziehung bei konstantem Druck p_W bzw. p_K stattfinde. Die Flüssigkeit im Röhrensystem ist zu Anfang im adiabatischen (indifferenten) Gleichgewicht, und bei eventuellen Bewegungen werden die individuellen Teilchen auch adiabatische Zustandsänderungen durchlaufen, d. h. konstante potentielle Temperatur haben, außer im Moment, wo sie entweder die Wärme- oder die Kältequelle passieren. Ferner setzen wir voraus, daß die Flüssigkeit beim Passieren der Wärmequelle nur eine sehr kleine Temperaturerhöhung $\Delta\theta_W$ und beim Passieren der Kältequelle eine entsprechend kleine Temperaturerniedrigung $\Delta\theta_K$ erfährt. Damit das Temperaturfeld stationär bleibe, darf nach einem vollen Umlauf die Temperatur eines Teilchens sich nicht verändert haben, d. h. seine potentielle Temperatur muß bei der Wärmequelle um denselben Betrag erhöht, wie bei der Kältequelle erniedrigt werden.

Wir betrachten zunächst den Fall, wo Wärme- und Kältequelle sich in demselben Röhrenast befinden. Je nachdem, ob die Wärmequelle bei höherem oder bei niedrigerem Druck liegt als die Kältequelle, und je nachdem, ob die Flüssigkeit von der Wärmequelle direkt zur Kältequelle oder von der Kältequelle direkt zur Wärmequelle zirkuliert, hat man vier Fälle zu unterscheiden, die durch die vier schematischen Abb. 27 illustriert sind.

Abb. 27. Zirkulationsmaschinen: Wärme- und Kältequelle in demselben Ast.

Um eine möglichst einfache Bewegung zu erzielen, nehmen wir an, daß anfangs die Kältequelle die Temperatur der Flüssigkeit hat, wenn die Bewegung von der Wärmequelle zur Kältequelle geht, und die Wärmequelle anfangs die Temperatur der Flüssigkeit hat, wenn die Bewegung von der Kältequelle zur Wärmequelle geht.

Es genügt, den Fall Abb. 27 *IA* zu betrachten. Gibt man durch einen äußeren Impuls der Flüssigkeit die angegebene Zirkulation (von der Wärme- direkt zur Kältequelle), so entwickelt sich oberhalb der Wärmequelle eine erwärmte Flüssigkeitssäule, die von Null anwächst und den ganzen Raum zwischen Wärme- und Kältequelle erfüllt. Wegen dieser erwärmten Säule ist die mittlere potentielle Temperatur im rechten Ast größer als im linken, und es stellt sich schließlich eine stationäre Temperaturverteilung ein, wo im Mittel die potentielle Temperatur im rechten Ast höher ist als im linken. D. h. an der gleichen Isobarfläche ist im rechten Ast die Temperatur und folglich auch das spez. Volumen größer als im linken. Im entsprechenden Solenoidsystem ist folglich der Volumenaszendent relativ zum Druckgradienten wie in *IA* geneigt. Dies hat eine Zirkulationsbeschleunigung zur Folge, deren

Richtung durch den gekrümmten Pfeil angegeben ist. Dieses Solenoidfeld braucht kein reelles zu sein, sein Zweck ist ja hier nur ein anschauliches Bild von dem Wert des entsprechenden Linienintegrales längs der Röhre zu geben.

Hätte man die Anfangsbedingungen anders gewählt, würde man im Mittel dasselbe Resultat erhalten, mit dem einzigen Unterschied, daß ein gewisser Rhythmus in die immer gleichgerichtete Beschleunigung hineinkommt.

Die Fälle *IB*, *IIA*, *IIB* kann man in ganz entsprechender Weise behandeln. Es ergibt sich dann das folgende Resultat:

IA und IB. Liegt die Wärmequelle unter höherem Druck als die Kältequelle, so werden die Solenoide bei beiden Umlaufsrichtungen der arbeitenden Substanz in der Röhre positiv umkreist: Wärme wird stetig in Arbeit verwandelt, und die vorliegende Zirkulation wird immer weiter beschleunigt.

IIA und IIB. Liegt die Wärmequelle unter niedrigerem Druck als die Kältequelle, so werden die Solenoide bei beiden Umlaufsrichtungen der arbeitenden Substanz in der Röhre in negativer Richtung umkreist. Arbeit wird in Wärme umgesetzt, und die vorliegende Anfangszirkulation wird verzögert, bis alle in dieser Zirkulation vorhandene kinetische Energie verbraucht ist.

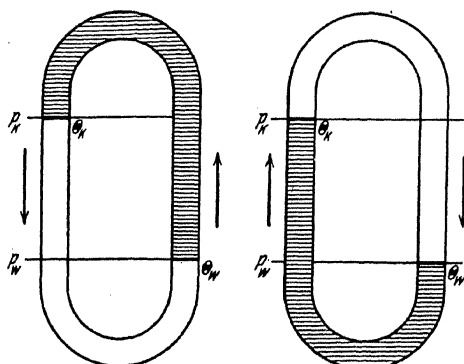



Abb. 28. Zirkulationsmaschinen: Wärme- und Kältequellen in verschiedenen Ästen.

Die Unabhängigkeit des Energieumsatzes von der Umlaufsrichtung ist bemerkenswert. Trotzdem ist diese doch nicht in jeder Beziehung belanglos. Man erkennt dies sofort, wenn sich die beiden Quellen nicht mehr in demselben Röhrenast befinden, sondern die Wärmequelle in dem einen und die Kältequelle in dem anderen (Abb. 28). Es besteht dann immer eine bevorzugte Umlaufsrichtung. Von dem Gleichgewicht aus setzt die Bewegung aufwärts durch die Wärmequelle und abwärts durch die Kältequelle von selbst ein, unabhängig davon, welche Quelle sich unter hohem und welche sich unter tiefem Druck befindet. Wenn die Kältequelle sich unter dem tieferen Druck befindet, bildet sich ein Dauerzustand aus, bei dem die eingeleitete Bewegung unter stetigem Umsatz von Wärme in Bewegungsenergie immer mehr beschleunigt wird. Wenn die Wärmequelle unter dem tieferen Druck liegt, ergeben sich Schwingungen um einen Gleichgewichtszustand, nämlich den Zustand,

wobei die Röhre oberhalb der Isobarfläche p_W mit erwärmter und die Röhre unterhalb der Isobarfläche p_K mit abgekühlter Substanz gefüllt ist.

An Stelle der von selbst einsetzenden Bewegung aufwärts durch die Wärmequelle und abwärts durch die Kältequelle können wir aber künstlich durch einen Impuls die entgegengesetzte Bewegung erzeugen. Liegt dabei die Kältequelle am niedrigsten, so wird diesem Rückwärtslauf ebenso entgegengewirkt wie dem Vorwärtslauf, und der Endzustand wird in Schwingungen um eine Gleichgewichtslage genau wie im vorigen Fall bestehen.

Besonders interessant ist aber der Rücklauf der Maschine, wenn die Kältequelle oben liegt und dadurch die einmal eingeleitete Bewegung unter Umsatz von Wärme in kinetische Energie immer weiter beschleunigt wird. Der Unterschied zwischen dem arbeitleistenden Vorwärts- und Rückwärtslauf zeigt sich dann darin, daß sich beim Vorwärtslauf die erwärmten Massen oberhalb und die abgekühlten unterhalb der beiden Quellen befinden, während es beim Rückwärtslauf umgekehrt ist. Dies gibt dem Vorwärtslauf in bezug auf Stabilität einen Vorzug vor dem Rückwärtslauf. Solange die Röhre hinlänglich eng ist und solidifiierte Wände hat, macht sich die Instabilität des Rücklaufes nicht bemerkbar; sehr lästige retrograde Umläufe der Luft in den Kanälen eines Ventilationssystems sind in der Tat wohl bekannt. Ist die Röhre aber eine der unendlich biegsamen Stromröhren in der Flüssigkeit, so können sich die potentiell wärmeren Massen nicht dauernd unterhalb der potentiell kälteren und schwereren halten. Die biegsame Stromröhre kann sich nicht unverändert erhalten. Eine Rückwärtszirkulation in der freien Flüssigkeit ist deshalb nicht als ein Dauerzustand denkbar.

Da jedes Teilchen einen reversiblen Kreisprozeß zwischen den Temperaturen θ_W und θ_K durchläuft, wird der thermodynamische Wirkungsgrad der Maschine:

$$\eta = \frac{\theta_W - \theta_K}{\theta_W}, \tag{1}$$

d. h. der Bruchteil η der zugeführten Wärme wird in mechanische Arbeit verwandelt. Statt durch die Temperaturen der Quellen können wir diesen Wirkungsgrad durch die Drucke p_W und p_K ausdrücken, die in den Niveaus der Quellen herrschen, oder schließlich durch die dynamischen Höhen φ_W und φ_K der Quellen. Zunächst hat man:

$$\theta_W = \vartheta\left(\frac{p_W}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \qquad \theta_K = \vartheta\left(\frac{p_K}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Ferner ergibt sich nach **28** (5) und (12):

$$\theta = \theta_0 - \frac{\varkappa - 1}{R\varkappa}\varphi = \frac{\varkappa - 1}{R\varkappa}(\varphi_A - \varphi) = \frac{1}{c_p}(\varphi_A - \varphi),$$

wo φ_A die dynamische Höhe der adiabatischen Atmosphäre ist. Durch Anwendung dieser Gleichungen findet man:

(2) $$\eta = 1 - \big(\text{[illegible]}$$

und:

(3) $$\eta = \frac{\varphi_K - \varphi_W}{\varphi_A - \varphi_W}$$

Diese Formeln geben die miteinander übereinstimmenden Resultate, daß der Wirkungsgrad zunimmt mit abnehmender Temperatur θ_K, mit abnehmendem Druck p_K und mit zunehmender dynamischer Höhe φ_K der Kältequelle. Und zwar wird der Wirkungsgrad 1 erreicht, wenn die Kältequelle an der Grenze der adiabatischen Atmosphäre angebracht wird, wo $\theta_K = 0$, $p_K = 0$, $\varphi_K = \varphi_A$. Eine Maschine mit der Kältequelle an der Grenze der adiabatischen Atmosphäre setzt also alle unten aufgenommene Wärme in kinetische Zirkulationsenergie um und gibt keine Wärme an die Kältequelle ab.

Außer der Verhältniszahl η, nach der die Maschine die ihr zugeführte Wärmemenge in einen mechanischen und einen thermisch bleibenden Teil zerlegt, haben wir noch die absoluten Wärmemengen zu betrachten, welche die Maschine von der Wärmequelle aufnimmt, welche sie an die Kältequelle abgibt, und ihre Differenz, welche die gelieferte Arbeitsmenge darstellt.

Betrachten wir die Sache erst ganz allgemein, so sehen wir folgendes. Nach dem dynamischen Zirkulationssatz nimmt die Zirkulation einer beliebigen geschlossenen Kurve pro Zeiteinheit um die Zahl $N(s, -p)$ zu, welche die Anzahl der von der Kurve umfaßten Solenoide darstellt. Verläuft dann die Zirkulation längs geschlossener Kurven und wird das Solenoidfeld unverändert aufrechterhalten, so nimmt die Zirkulation mit der Zeit linear zu und wird also nach unendlich langer Zeit unendliche Geschwindigkeiten geben. Betrachten wir dann die Umläufe der einzelnen Teilchen, so wird die Zeit eines Umlaufes gegen Null konvergieren. Nach dem thermischen Umlaufstheorem (51) wird aber für jeden Umlauf dieselbe konstante Wärmemenge in kinetische Energie umgesetzt. Das heißt aber, daß die Wärmemenge, welche die Wärmequelle pro Zeiteinheit zu liefern hat, gegen unendlich konvergiert.

Um uns den Bedingungen der konkreten Wirklichkeit anzupassen, müssen wir vor allem mit Wärmequellen begrenzter Ergiebigkeit rechnen. Damit dies möglich ist, führen wir die Wärmemengen ΔW_W ein, die die Wärmequelle pro Sekunde an die zirkulierende Substanz abgibt, und die Wärmemenge ΔW_K, welche die zirkulierende Substanz pro Sekunde an die Kältequelle abgibt. Der Massentransport pro Zeiteinheit $\overline{V}$ durch einen beliebigen Querschnitt der Röhre ist das über

einen Querschnitt der Röhre berechnete Integral der spez. Bewegungsgröße $\bar{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v}$:

$$\bar{V} = \int q\boldsymbol{v} \cdot d\sigma . \tag{4}$$

Zu einer beliebigen Zeit ist dieser Massentransport durch jeden Querschnitt der Röhre der gleiche, wie verschieden auch diese Querschnitte sein mögen. An den beiden Quellen findet die Zufuhr oder die Abgabe der Wärme unter konstantem Druck statt, und deshalb gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Wärmemengen ΔW_W und ΔW_K und der Temperaturerhöhung $\Delta\theta_W$, welche die Substanz an der Wärmequelle erhält, und der Temperaturerniedrigung $\Delta\theta_K$, welche sie bei der Kältequelle erleidet:

$$\Delta W_W = \bar{V} c_p \Delta\theta_W , \qquad \Delta W_K = \bar{V} c_p \Delta\theta_K . \tag{5}$$

Die Temperaturerhöhung $\Delta\theta_W$ und die Temperaturerniedrigung $\Delta\theta_K$ sind es, die das Solenoidfeld aufrechterhalten. Verlangt man, daß diese Größen konstant bleiben sollen, so hat man den Fall, wo der Massentransport $\bar{V}$ in der Röhre linear mit der Zeit zunimmt und die pro Zeiteinheit aufgenommenen und abgegebenen Wärmemengen ΔW_W und ΔW_K entsprechend unbegrenzt anwachsen müssen. Verlangt man dagegen, daß diese Wärmemengen konstant sein sollen, so werden bei dem immer anwachsenden Massentransport $\bar{V}$ in der Röhre die Temperaturerhöhung $\Delta\theta_W$ an der Wärmequelle und die Temperaturerniedrigung $\Delta\theta_K$ an der Kältequelle gegen Null konvergieren, d. h. die Intensität des Solenoidfeldes konvergiert gegen Null. Dabei wird aber fortfahrend der konstante Wärmebetrag $\Delta W_W - \Delta W_K$ pro Zeiteinheit in kinetische Energie übergeführt. Diese kinetische Energie nimmt jetzt linear mit der Zeit zu, wobei die Umlaufsgeschwindigkeit über alle Grenzen wächst, allerdings schwächer, als wenn das Solenoidfeld unverändert aufrechterhalten würde.

Im reibungslosen Medium kann eine stationäre Zirkulation nur unter der Bedingung bestehen, daß Wärmezufuhr an der Wärmequelle und Wärmeabgabe an der Kältequelle gleich sind:

$$\Delta W_W = \Delta W_K , \tag{6}$$

was nach dem Gesetz über die Leistung nur dann eintreten kann, wenn die beiden Quellen in dem gleichen Niveau liegen. Die Maschine läuft dann wie ein reibungsloses Rad mit der ihr anfänglich an erteilten Zirkulationsgeschwindigkeit und führt dabei alle von der Wärmequelle aufgenommene Wärme an die Kältequelle über. Sobald man aber die Kältequelle höher als die Wärmequelle anbringt, erhält man bei der betrachteten einfachen Zirkulationsmaschine eine immer wachsende Zirkulationsgeschwindigkeit. Natürlich wird die Reibung, wenn man sie einführt, dieser Zirkulationsgeschwindigkeit eine Grenze setzen.

Wir halten aber an der Reibungslosigkeit fest, um bei Maschinen, die den Maschinen der Natur ähnlich sind, eine von der Reibung unabhängige *thermische Regulierung* in voller Reinheit kennenzulernen.

53. Thermisch gebundene Zirkulation. Wir haben oben die einfachsten Bedingungen für die Überführung von Wärme in kinetische Energie einer Zirkulationsbewegung untersucht, indem wir eine elementare Wärmequelle und eine elementare Kältequelle einführten und sonst nur adiabatische Vorgänge voraussetzten. Wir werden jetzt die Wirkung beliebig längs der ganzen Röhre verteilter elementarer Wärme- und Kältequellen untersuchen und geben damit auch die Bedingung der indifferenten Schichtung der zirkulierenden Luft auf.

Wir beginnen mit dem Fall, wo die Luftmasse in der Röhre in stabilem Gleichgewicht ist. Bei einer kleinen Störung des Gleichgewichtes ist dann die unmittelbare Wirkung die, daß sich die aufsteigende Luft adiabatisch abkühlt und die absteigende adiabatisch erwärmt, die aufsteigende Kolonne wird schwerer und die absteigende leichter, und die Bewegung kehrt schließlich um. Jetzt werden wir aber längs der ganzen Röhre ein System von Wärme- oder Kältequellen verteilen, die das im Gleichgewicht bestehende Temperaturfeld aufrechterhalten sollen. Wo die Luft aufsteigt, wirken also diese Quellen als Wärmequellen, wo sie absteigt, als Kältequellen (Abb. 29).

Abb. 29. Thermisch gebundene Zirkulation ohne Arbeitsleistung.

Die Massenverteilung bleibt während der Bewegung unverändert erhalten, und die durch den störenden Impuls erzeugte Zirkulation setzt unverändert fort. Hat der störende Impuls die entgegengesetzte Richtung, so verwandeln sich die früheren Wärmequellen von selbst in Kältequellen und umgekehrt. Die Zirkulation verläuft also ebenso leicht in der einen wie in der anderen Richtung.

Es bilden sich in diesem Falle keine Solenoide, welche die Zirkulation beschleunigen oder retardieren oder deren Umkreisung mit Arbeitsleistung verbunden ist. Es wird keine Wärme in kinetische Energie umgesetzt, und die ganze von den Wärmequellen aufgenommene Wärmemenge wird zu den Kältequellen transportiert und dort abgegeben. Diese „stabilisierenden Wärme- und Kältequellen" treten nur längs der vertikalen Teile der Röhre in Wirksamkeit, wo sich die Luftmassen gegen abnehmenden oder gegen zunehmenden Druck bewegen. Die vertikalen Röhrenteile können durch beliebig lange, horizontal oder richtiger isobar verlaufende Röhren verbunden sein, längs deren die

Bewegung adiabatisch, d. h. in diesem Falle auch isotherm, vor sich geht. Die Differenz der Wärmetransporte in der oberen und der unteren isobaren Röhre muß gleich der am System der Wärmequellen pro Zeiteinheit empfangenen Wärmemenge ΔW_W und ebenfalls gleich der pro Zeiteinheit an das System von Kältequellen abgegebene Wärmemenge ΔW_K sein.

Wir werden diesen Wärmetransport quantitativ untersuchen. Eine Masseneinheit der Luft strömt mit der wirklichen Temperatur θ_0 und der potentiellen Temperatur ϑ_0 unten ins System der Wärmequellen hinein und mit der wirklichen Temperatur θ_1 und der potentiellen ϑ_1 oben heraus. Um zu sehen wieviel Wärme sie dabei aufgenommen hat, brauchen wir nur diese Masseneinheit adiabatisch nach dem Ausgangsniveau zurückgebracht zu denken. Dort käme sie mit der unveränderten potentiellen Temperatur ϑ_1 und einer noch unbekannten wirklichen Temperatur θ' an. Nach der Definition der potentiellen Temperatur hätten wir dann:

$$\vartheta_0 = \theta_0 \left(\frac{100}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}, \qquad \vartheta_1 = \theta' \left(\frac{100}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Man würde hieraus als Temperaturanstieg der in der Wärmequelle erwärmten und zur Anfangslage zurückgeführten Masseneinheit

$$\theta' - \theta_0 = \left(\frac{p_0}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} (\vartheta_1 - \vartheta_0)$$

finden. Folglich würde sie zu ihrem thermischen Anfangszustand zurückkommen, wenn wir ihr jetzt noch bei konstantem Druck die Wärmemenge $c_p(\theta' - \theta_0)$ entzögen. Diese Wärmemenge hat also die Masseneinheit im System der Wärmequellen tatsächlich aufgenommen. Die $\overline{V}$ Masseneinheiten, die in der Zeiteinheit durchströmen, nehmen folglich $\overline{V} c_p(\theta' - \theta_0)$ Wärmeeinheiten auf. Und wenn wir hier wieder die potentiellen Temperaturen einführen, erhalten wir für den Wärmetransport pro Zeiteinheit vom System der Wärmequellen zum System der Kältequellen:

$$(1) \qquad \Delta W_W = \Delta W_K = \overline{V} c_p \left(\frac{p_0}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} (\vartheta_1 - \vartheta_0).$$

Der Wärmetransport $\Delta W_W = \Delta W_K$ ist also durch den Massentransport $\overline{V}$ gegeben und umgekehrt der Massentransport durch den Wärmetransport:

$$(2) \qquad \overline{V} = \left(\frac{100}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{\Delta W_W}{c_p(\vartheta_1 - \vartheta_0)} = \left(\frac{100}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \frac{\Delta W_K}{c_p(\vartheta_1 - \vartheta_0)}$$

Der Massentransport in der Röhre ist also der zu überführenden Wärmemenge direkt proportional und umgekehrt proportional der Differenz der potentiellen Temperatur $\vartheta_1 - \vartheta_0$, die, wenn sie positiv ist, die innere statische Stabilität der Schichtung sichert. *Diese keine Arbeit verrichtende, bei unveränderlichem Temperaturfeld $\partial\theta/\partial t = 0$ laufende Maschine hat deshalb bei gegebener Wärmezufuhr bzw. Wärmeentziehung um so langsamere Umlaufsgeschwindigkeit, je stabiler die zirkulierende Substanz geschichtet ist.*

Dies Resultat ist um so wichtiger, als diese thermisch bestimmte Umlaufsgeschwindigkeit stabil ist. Denn läuft die Maschine schneller, als es der Formel (2) entspricht, wird in der aufsteigenden Luftsäule $\frac{\partial\theta}{\partial t} < 0$ und in der absteigenden Luftsäule $\frac{\partial\theta}{\partial t} > 0$, und es bildet sich ein Solenoidfeld, das die Bewegung retardiert. Läuft dagegen die Maschine langsamer als nach der Formel (2), wird in der aufsteigenden Luftsäule $\frac{\partial\theta}{\partial t} > 0$ und in der absteigenden $\frac{\partial\theta}{\partial t} < 0$, und es bildet sich ein Sole-

A

B

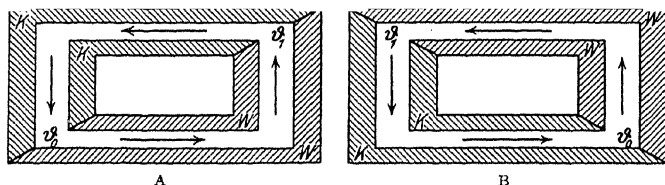



Abb. 30. Thermisch gebundene Zirkulationen: A arbeitsleistend, B arbeitsverbrauchend.

noidfeld, das den Umlauf beschleunigt. Störungen der durch (2) gegebenen Umlaufsgeschwindigkeit führen also zu Schwingungen um den stabilen Wert der Umlaufsgeschwindigkeit.

Die Betrachtung der entsprechenden instabil geschichteten Maschine hat nur theoretisches Interesse. Man findet auch deren Umlaufsgeschwindigkeit in ähnlicher Weise thermisch gebunden. Solche Umläufe der instabil geschichteten Maschine lassen sich aber nur in hinlänglich engen festwandigen Röhren verwirklichen, und können in der freien Atmosphäre nur zu Turbulenz führen. Die früher betrachtete Maschine mit statisch indifferenter innerer Schichtung bildet das Übergangsglied zwischen diesen stabil und instabil geschichteten Maschinen.

Die Umlaufsmaschinen ohne Arbeitsleistung sind durch volle Symmetrie des Systems von Wärme- und Kältequellen gekennzeichnet, wodurch die Bildung eines Solenoidsystems ausgeschlossen ist. Ergänzen wir aber dieselbe Maschine mit einer Fortsetzung der Kältequelle längs der oberen Röhre bis zum oberen Ende der Wärmequelle und einer Fortsetzung der Wärmequelle längs der unteren Röhre bis zur Basis der Kältequelle (Abb. 30A), so bekommen wir eine arbeitsleistende

Umlaufsmaschine. Verlängern wir dagegen die Wärmequelle längs der oberen und die Kältequelle längs der unteren Röhre (Abb. 30B), so bekommen wir eine arbeitsverbrauchende Maschine. Die „stabilisierenden" Teile der Wärme- und Kältequellen längs der vertikalen Röhrenteile leisten nämlich zusammen keine Arbeit, und es bleiben also die nur horizontalen Stücke der beiden Quellen übrig, die im Falle A eine hochliegende Kältequelle und tiefliegende Wärmequelle mit positiver Arbeitsleistung und im Falle B eine hochliegende Wärmequelle und eine tiefliegende Kältequelle mit negativer Arbeitsleistung darstellen.

Wenn die Wärmetransportformel (1) auf diese Maschinen angewandt werden soll, muß natürlich ΔW_W die Wärmeabgabe der gesamten Wärmequelle und ΔW_K die Wärmeaufnahme der gesamten Kältequelle bedeuten. Ebenso muß unter ϑ_1 bzw. ϑ_0 die potentielle Temperatur am oberen bzw. unteren Berührungspunkt der gesamten Wärmequelle und der gesamten Kältequelle verstanden werden. Die arbeitsleistende Maschine A transportiert eine Wärmemenge, die kleiner als die pro Zeiteinheit aufgenommene, aber größer als die pro Zeiteinheit abgegebene ist:

$$(3) \qquad \Delta W_W > \overline{V} c_p \left(\frac{p_0}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} (\vartheta_1 - \vartheta_0) > \Delta W_K\,,$$

so daß der aufgenommene Wärmeüberschuß über die ganze Substanz verteilt und in kinetische Energie verwandelt wird. Die Zirkulationsgeschwindigkeit nimmt also zu, aber unendliche Geschwindigkeit wird nicht erreicht, ohne daß $\Delta W_W = \infty$, d. h. ohne daß unendlich viel Wärme pro Zeiteinheit zugeführt wird.

Die arbeitsverbrauchende Maschine B transportiert entsprechend nach der Formel:

$$(4) \qquad \Delta W_W < \overline{V} c_p \left(\frac{p_0}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} (\vartheta_1 - \vartheta_0) < \Delta W_K\,.$$

Ihre Zirkulationsgeschwindigkeit nimmt ab, aber sie wird nicht Null, ohne daß ΔW_W auch Null wird.

Die „Wärmequellen" der Atmosphäre sind identisch mit den räumlichen Gebieten, wo $\frac{dW}{dt} > 0$, die „Kältequellen" mit den räumlichen Gebieten, wo $\frac{dW}{dt} < 0$. Nur an den Grenzflächen dieser Gebiete sind rein adiabatische Zustandsänderungen möglich. Vollständige Analogie mit der Atmosphäre bekommt man deshalb nur mit der zuletzt besprochenen Zirkulationsmaschine, bei der Wärme- und Kältequellen aneinandergrenzen und keine endliche Strecken der Röhre für adiabatische Zustandsänderungen freilassen.

Für den Betrieb der Zirkulationsmaschine ist es gleichgültig, in welcher Form die Wärmezufuhr bzw. die Wärmeentziehung vor sich

geht. Die Wärmezufuhr kann außer dem Netto von zugestrahlter und zugeleiteter Wärme auch Kondensationswärme sein, und die Wärmeentziehung kann außer dem Netto von ausgestrahlter und weggeleiteter Wärme auch Verdampfungswärme sein. Eine Betrachtung des Kreislaufes des Wassers in der stationär laufenden Zirkulationsmaschine feuchter Luft zeigt, wo die Kondensationswärme bzw. die Verdampfungswärme wirksam sind. Wenn wir mit f_s die spezifische Feuchtigkeit, d. h. die Anzahl der Masseneinheiten Wasserdampf pro Masseneinheit feuchter Luft, bezeichnen, ist voraussetzungsgemäß überall $\partial f_s/\partial t = 0$. In Luftmassen, wo Wasserdampf aufgenommen wird, ist $\frac{d f_s}{d t} > 0$, in solchen, die Wasserdampf ausscheiden, $\frac{d f_s}{d t} < 0$. Die Aufnahme der Menge $\Delta_1 f_s$ von Wasserdampf in der Masseneinheit Luft längs des Erdbodens geht ohne Einbuße von atmosphärischer Wärme vor sich. Denn die Verdampfungswärme wird von einem Reservoir flüssigen Wassers (Meer oder nasser Erdboden) gespendet, und die Weiterverteilung des Wassers innerhalb der Luft durch Diffusion oder turbulente Mischung fordert keinen Wärmeaufwand. Das Ausscheiden der Menge $\Delta_2 f_s$ von Wasserdampf durch Kondensation in der aufsteigenden Luftsäule geht unter Gewinn kalorischer Wärme vor sich, indem die vom Erdboden seinerzeit gespendete Verdampfungswärme als Kondensationswärme zum Vorschein kommt. In der Zwischenzeit hat das Luftteilchen diese Wärme in Form von latenter Wärme des Wasserdampfes mittransportiert. Innerhalb der absteigenden Luftsäule geschieht ein Verdampfen der Menge $\Delta_3 f_s$ mitgetragener Wassertröpfchen, die zu klein waren, um herauszufallen, und dies entzieht dem Gemisch von Luft und Wasser kalorische Wärme.

Da nach einem vollen Umlauf des Luftteilchens seine spez. Feuchtigkeit wieder auf den Anfangswert zurückgekommen sein soll, haben wir:

$$\Delta_1 f_s - \Delta_2 f_s + \Delta_3 f_s = 0 . \tag{5}$$

Wenn W_V die Verdampfungswärme einer Masseneinheit Wasser bedeutet, so wird der Masseneinheit feuchter Luft pro Umlauf die Wärmemenge

$$(\Delta_2 f_s - \Delta_3 f_s) W_V$$

zugeführt, die natürlich der Wärmemenge $\Delta_1 f_s W_V$ gleich ist, die der Erdboden oder das Meer durch Verdampfung von Wasser verloren hat. Die Wirkung des Wasserkreislaufes in der atmosphärischen Maschine ist also eine große zusätzliche Wärmezufuhr vom Betrage $\Delta_2 f_s W_V$ von der „Wärmequelle“, während die kleine zusätzliche Wärmeentziehung der „Kältequelle“ den Betrag $\Delta_3 f_s W_V$ hat.

Um die Formeln (1) und (2) für die stationär laufende Maschine feuchter Luft verwendbar zu machen, muß man im Wärmetransport

auch den Transport der latenten Wärme des Wasserdampfes mitrechnen. Also:

$$(6) \qquad \Delta W_W = \Delta W_K = \bar{V}\left[c_p\left(\frac{p_0}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}(\vartheta_1-\vartheta_0)+W_V(f_{s1}-f_{s0})\right],$$

wo f_{s1} und f_{s0} die spez. Feuchtigkeiten bedeuten, bzw. oben beim Übertritt aus dem Gebiet der Wärme- in das der Kältequellen und unten beim Übertritt aus dem Gebiet der Kälte- in das der Wärmequellen. Der Massentransport in der nichtarbeitenden stationär laufenden Maschine feuchter Luft wird entsprechend:

$$(7) \qquad \bar{V} = \frac{\Delta W_W}{\left(\frac{p_0}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}(\vartheta_1-\vartheta_0)+W_V(f_{s1}-f_{s0})}$$

Die Formeln (1), (2) und die verallgemeinerten (6), (7) werden sich als nützlich erweisen, wenn wir im empirischen Teil des Buches zu der Diskussion der atmosphärischen Zirkulationsbewegungen, wie See- und Landbrise, Monsunsysteme, Berg- und Talwind, und der allgemeinen Meridionalzirkulation der Atmosphäre kommen.

Fünftes Kapitel.

Hydroelektrische und hydromagnetische Erscheinungen, erste Reihe.

Nichtstationäre Bewegung.

54. Analogien des hydrodynamischen Stromfeldes mit dem elektrostatischen oder magnetischen Kraftfelde. Zu den interessantesten Eigentümlichkeiten des hydrodynamischen Stromfeldes gehören gewisse weitgehende Analogien mit dem elektrostatischen oder magnetischen Kraftfelde. Durch den auf die spez. Bewegungsgröße bezogenen Zirkulationssatz haben wir schon einige hierher gehörige Erscheinungen abgeleitet (vgl. Abb. 15, 16, S. 142). Jetzt werden wir diese *hydroelektrischen* oder *hydromagnetischen* Erscheinungen in voller Allgemeinheit ableiten. Dabei werden zwei wesentlich verschiedene Analogien auftreten. Die erste, die wir in diesem Kapitel behandeln werden, bezieht sich auf ganz allgemeine, *nichtstationäre* Bewegungen der Flüssigkeit, während die zweite, die uns im nächsten Kapitel beschäftigen wird, ausdrücklich die *stationäre* Bewegungsform voraussetzt.

Auf die mögliche physikalische oder naturphilosophische Bedeutung dieser Analogien werden wir nicht eingehen. Wir nehmen sie lediglich als objektive Tatsachen hin, die als solche nicht ohne praktische Bedeutung sind. Denn sie gestatten uns Resultate, Methoden und Anschauungsformen, die in einem Gebiete der Physik entwickelt worden sind, in ganz anderen Gebieten zur Anwendung zu bringen.

55. Das elektrostatische und das magnetische Feld. Unser Wissen über die elektrischen und magnetischen Felder ist in den MAXWELLschen Gleichungen niedergelegt. Wenn statische Verhältnisse vorliegen, läßt sich das MAXWELLsche Gleichungssystem in zwei getrennte Gleichungssysteme zerlegen, eins für elektrostatische Felder und ein ganz ähnlich gebautes für magnetostatische Felder. Mit den üblichen Bezeichnungen können diese folgendermaßen geschrieben werden:

(1A) $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + \boldsymbol{D}^*$, (1B) $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} + \boldsymbol{B}^*$,

(2A) $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = e$, (2B) $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = m$,

(3A) $\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = 0$, (3B) $\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = 0$.

Ersetzt man die Null der Gleichung (3A) durch die negative Zeitableitung von $\boldsymbol{B}$ und die Null der Gleichung (3B) durch die positive Zeitableitung von $\boldsymbol{D}$, so hat man das vollständige MAXWELLsche Gleichungssystem für ein beliebiges Dielektricum, in dem leitende Körper nicht vorkommen.

Wir werden in jedem der beiden Systeme die Gleichung (1) als die Verbindungsgleichung, (2) als die Divergenzgleichung und (3) als die Wirbelgleichung bezeichnen. Wenn man (1A) mit ε^{-1} und (1B) mit μ^{-1} multipliziert, so nehmen die Verbindungsgleichungen die Form

(1′A) $\varepsilon^{-1} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + \varepsilon^{-1} \boldsymbol{D}^*$, (1′B) $\mu^{-1} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + \mu^{-1} \boldsymbol{B}^*$

an. In (1A) ist jedes Glied eine *elektrische Verschiebung*, in (1′A) eine *elektrische Feldstärke*, in (1B) ist jedes Glied eine *magnetische Induktion*, in (1′B) eine *magnetische Feldstärke*. Die Namen sämtlicher in den Gleichungen auftretenden Vektoren und Skalaren ersieht man aus dem folgenden Schema:

	Totale	Freie	Erzwungene
Elektrische Verschiebung	$\boldsymbol{D}$	$\varepsilon \boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{D}^*$
Magnetische Induktion	$\boldsymbol{B}$	$\mu \boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{B}^*$
Elektrische Feldstärke	$\varepsilon^{-1} \boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{E}$	$\varepsilon^{-1} \boldsymbol{D}^*$
Magnetische Feldstärke	$\mu^{-1} \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{H}$	$\mu^{-1} \boldsymbol{B}^*$
Dielektrizitätskonstante		ε	
Magnetische Permeabilität		μ	
Wahre elektrische Dichte		e	
Wahre magnetische Dichte		m	

Nach diesem Schema stehen im ganzen sechs elektrische Vektoren zur Verfügung, eine totale und zwei partielle Verschiebungen und eine totale und zwei partielle Feldstärken. Ganz ähnlich hat man sechs magnetische Vektoren, eine totale und zwei partielle Induktionen und eine totale und zwei partielle Feldstärken. Von diesen Vektoren zeichnen sich die totale Verschiebung bzw. Induktion und die freie elektrische

bzw. magnetische Feldstärke durch einfache Feldeigenschaften aus und werden deshalb in den Feldgleichungen verwertet. Die Divergenz der totalen Feldstärke definiert die elektrische Ladung pro Volumeneinheit oder — in der HERTZschen Terminologie, der wir folgen[1] — die *wahre elektrische Dichte e*. Die Divergenz der totalen magnetischen Induktion definiert die entsprechende *wahre magnetische Dichte m*, eine Größe, die in der Tat immer Null ist, aber dennoch aus Symmetriegründen zweckmäßigerweise in den Gleichungen beibehalten wird. Eine Sonderstellung nehmen die erzwungene Verschiebung $\boldsymbol{D}^*$ und die erzwungene Induktion $\boldsymbol{B}^*$ ein. Die letztere vertritt den Zustand der inneren Polarisation, den man dem Stahl durch einen Magnetisierungsprozeß aufzwingen kann, ein Prozeß, über dessen Wesen die MAXWELLschen Feldgleichungen keine Auskunft geben. $\boldsymbol{D}^*$ vertritt den entsprechenden inneren Polarisationszustand, der z. B. in den pyroelektrischen Krystallen vorliegt, die, wie man glaubt, elektrostatische Analoga zu den permanenten Magneten sind.

Ihre Verbindung mit der physikalischen Wirklichkeit bekommen die Feldgleichungen durch die ergänzende Aussage, daß die Ausdrücke

$$(4\text{A})\quad w_e = \tfrac{1}{2}\varepsilon \boldsymbol{E}^2, \qquad (4\text{B})\quad w_m = \tfrac{1}{2}\mu \boldsymbol{H}^2$$

die elektrische bzw. die magnetische Energie pro Volumeneinheit des freien Feldes darstellen. Die expliziten Folgen dieser Aussage kann man in der folgenden Weise ziehen. Man erteilt den Volumenelementen des ganzen Systems kleine Verschiebungen, berechnet die entsprechende Energievariation und setzt den elementaren Energieverlust gleich der von den Kräften des Systems ausgeführten elementaren Arbeit. Dadurch findet man die von dem elektrischen bzw. magnetischen System ausgeübte Feldkraft $\boldsymbol{f}_e$ bzw. $\boldsymbol{f}_m$:

$$(5\text{A})\quad \boldsymbol{f}_e = e\boldsymbol{E} - \nabla\boldsymbol{D}^*\cdot\boldsymbol{E} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\nabla\varepsilon, \qquad (5\text{B})\quad \boldsymbol{f}_m = m\boldsymbol{H} - \nabla\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{H} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{H}^2\nabla\mu.$$

Es treten in beiden Fällen drei Kräfte auf, die sämtlich auf die Volumeneinheit des Körpers bezogen sind.

$e\boldsymbol{E}$ ist die Kraft, die an einem elektrisch geladenen Körper angreift, $m\boldsymbol{H}$ ist die Kraft, die an einem magnetisch geladenen angreift, wenn man eine solche Vorstellung nicht ausschließt.

$-\nabla\boldsymbol{D}^*\cdot\boldsymbol{E}$ bzw. $-\nabla\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{H}$ ist die Kraft, die an einem Körper mit erzwungener innerer Polarisation angreift, also z. B. an einem pyroelektrischen Krystall oder einem permanenten Magneten.

$-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\nabla\varepsilon$ bzw. $-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{H}^2\nabla\mu$ ist eine auf Heterogenität beruhende Kraft, die im elektrischen und magnetischen Felde an Körper angreift, die

[1] HERTZ, H.: Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. Göttinger Nachr. 1890; Ann. Physik Bd. 40 (1890); Gesammelte Werke Bd. 2 (1895).

eine andere Dielektrizitätskonstante bzw. eine andere magnetische Permeabilität besitzen als das umgebende Medium. Sie gibt im Magnetfelde die Kraftwirkungen des Para- und des Diamagnetismus und die entsprechenden Kraftwirkungen im elektrischen Felde.

Diese Kräfte würden die Körper des elektrischen oder des magnetischen Systems in Bewegung setzen, wenn nicht gleich große und entgegengesetzte äußere Kräfte die Bewegung verhinderten. Diese äußeren Kräfte sind folglich:

$$(6\text{A})\ f'_e = -e\boldsymbol{E} + \nabla \boldsymbol{D}^* \cdot \boldsymbol{E} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 \nabla \varepsilon, \qquad (6\text{B})\ f'_m = -m\boldsymbol{H} + \nabla \boldsymbol{B}^* \cdot \boldsymbol{H} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{H}^2 \nabla \mu.$$

Durch geeignete Anordnungen kann man diese Kräfte messen. Sonst werden sie automatisch geleistet von den Spannungen in den festen Körpern, die das System tragen und es in Ruhe halten.

In einer Hinsicht unterscheiden sich die von uns aufgeschriebenen Formeln von den gewöhnlich benutzten. Denn die Verbindungsgleichungen schreibt man gewöhnlich: $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{D}^*$, $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{B}^*$, die Divergenzgleichungen: $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi e$, $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 4\pi m$ und die Energieausdrücke: $w_e = \frac{\varepsilon}{8\pi}\boldsymbol{E}^2$, $w_m = \frac{\varepsilon}{8\pi}\boldsymbol{H}^2$. Das Auftreten des numerischen Faktors 4π an Stellen, wo er aus geometrischen Gründen keine Berechtigung hat, ist aber nur die Folge einer unzweckmäßigen Wahl der Einheiten. Wenn man sämtliche Größen in den *rationellen* HEAVISIDE*schen Einheiten* ausdrückt[1], fällt der Zahlenfaktor 4π aus den Grundgleichungen fort und tritt nur in Formeln auf, in denen er aus geometrischen Gründen berechtigt ist, nämlich in Spezialformeln, wo Potenzen des Radiusvektors r vorkommen und die Vorstellung von einer kugelförmigen Wirkung von einem Zentrum aus zugrunde liegt.

Mit der Frage nach den Einheiten ist die nach den Dimensionen der elektrischen oder magnetischen Größen nahe verwandt. Es ist wichtig, zu betonen, daß wir über die Dimensionen der elektrischen oder magnetischen Feldgrößen *nichts* wissen. Zur Darstellung der elektromagnetischen Felderscheinungen sind unter den einfachsten Verhältnissen vier Größen unentbehrlich, sagen wir ε, $\boldsymbol{E}$, μ, $\boldsymbol{H}$. Wir kennen aber nur drei Relationen, die diese physikalisch und dimensionsmäßig unbekannten Größen mit Größen bekannter Natur verbinden: die beiden Relationen (4A) und (4B), welche die Energie pro Volumeneinheit definieren und die bekannte Relation $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, wo c eine Geschwindigkeit, die Lichtgeschwindigkeit, darstellt. Diese drei Aussagen sind die Umformungen, durch welche die Feldtheorie die drei primären Erfahrungstatsachen über die elektrischen und magnetischen Fernwirkungen ersetzt hat, nämlich die beiden COULOMBschen Gesetze und das OERSTEDsche Gesetz.

[1] HEAVISIDE, O.: Electromagnetic Theory I. London 1893.

Sollte später noch ein viertes Naturgesetz gefunden werden, welches die elektromagnetischen Feldgrößen mit Größen bekannter Natur verbindet, ohne gleichzeitig physikalisch neue Unbekannte einzuführen, so würden sich die mechanischen Definitionen und damit die Dimensionen sämtlicher Größen des elektromagnetischen Feldes ergeben. Bis auf weiteres müssen wir aber die Frage nach den Dimensionen der elektromagnetischen Größen, ja selbst die Frage nach dem Sinne einer solchen Frage, offen lassen.

56. Hydrodynamische Feldgleichungen, erste Reihe. Aus Dimensionsbetrachtungen läßt sich nach dem Vorhergehenden nichts Bestimmtes darüber aussagen, wie die Größen des hydrodynamischen Feldes mit denen des elektrischen oder des magnetischen Feldes gegebenenfalls zusammenzustellen wären. In allen drei Feldern arbeitet man mit paarweise zusammengehörigen Vektoren, die sich dimensionsmäßig um einen Faktor unterscheiden, der eine stoffliche Eigenschaft des materiellen Trägers des Feldes darstellt: elektrische Verschiebung und Feldstärke, die um einen Faktor ε, magnetische Induktion und Feldstärke, die um einen Faktor μ, Geschwindigkeit und spez. Bewegungsgröße, die um einen Faktor q oder s verschieden sind. Dabei ergeben sich zwei Möglichkeiten der Zusammenstellung. Wir wählen als erste *diejenige, wo wir der Geschwindigkeit die elektrische Verschiebung oder die magnetische Induktion und der spez. Bewegungsgröße die elektrische oder die magnetische Feldstärke zuordnen.* Auf die zweite Möglichkeit, wo Geschwindigkeit und spez. Bewegungsgröße ihre Rollen vertauschen, werden wir im nächsten Kapitel kommen.

Nichts hindert uns, nachdem diese Wahl getroffen ist, die totale Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ der Verbindungsgleichung **55** (1A) oder (1B) entsprechend zu zerlegen:

$$\boldsymbol{v} = s\overline{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}^* \tag{1}$$

und entsprechend $\boldsymbol{v}$ als *totale*, $s\overline{\boldsymbol{v}}$ als *freie* und $\boldsymbol{v}^*$ als *erzwungene* Geschwindigkeit zu bezeichnen. Die letztere Bezeichnung wird später dadurch ihre Berechtigung finden, daß wir $\boldsymbol{v}^*$ dynamisch als eine von außen her durch fremde Kräfte regulierte Geschwindigkeit definieren werden. Denken wir uns die Gleichung (1) mit der Dichte q multipliziert, also:

$$q\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}} + q\boldsymbol{v}^*, \tag{1'}$$

so wird $q\boldsymbol{v}$ die totale, $\overline{\boldsymbol{v}}$ die freie und $q\boldsymbol{v}^*$ die erzwungene spez. Bewegungsgröße sein. Die totale Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und die freie spez. Bewegungsgröße $\overline{\boldsymbol{v}}$ betrachten wir als die typischen Feldgrößen, für die wir Feldgleichungen zu suchen haben.

Die Kontinuitätsgleichung in der Form **17** (9′) gibt unmittelbar die Divergenzeigenschaften der totalen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{1}{s} \frac{ds}{dt} . \tag{2}$$

Den Gleichungen **55** (2A) und (2B) entsprechend können wir diese Gleichung in der Form

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = e \tag{2'}$$

schreiben, wo e die Ausdehnungsgeschwindigkeit pro Volumeneinheit des bewegten Teilchens ist oder die *spezifische Ausdehnungsgeschwindigkeit*, wie wir sie kurz nennen werden.

Diese Größe e entspricht also der wahren elektrischen bzw. magnetischen Dichte, und wie in einer evtl. sich ergebenden Analogie die hydrodynamischen Größen denen des elektrischen oder magnetischen Feldes zuzuordnen sind, ist damit gegeben. Man findet es in dem beigefügten Schema zusammengestellt.

Hydrodynamische, elektrische und magnetische Größen nach der ersten Analogie.

	Totale	Erzwungene	Freie
(1) Geschwindigkeit . . . . (2) Elektrische Verschiebung . . . (3) Magnetische Induktion	$\boldsymbol{v}$	$\boldsymbol{v}^*$	$s\bar{\boldsymbol{v}}$
(1) Spez. Bewegungsgröße . . . . (2) Elektrische Feldstärke . . . . (3) Magnetische Feldstärke . . .	$\frac{1}{s}\boldsymbol{v}$	$\frac{1}{s}\boldsymbol{v}^*$	$\bar{\boldsymbol{v}}$
(1) Spez. Volumen . . . . (2) Dielektrizitätskonstante . . . (3) Magnetische Permeabilität . .		s	
(1) Spez. Ausdehnungsgeschwindigkeit . . . . (2) Wahre elektrische Dichte . . (3) Wahre magnetische Dichte . .		e	

Soll nun diese Analogie weiter ausgebaut werden, so muß man verlangen, daß die Feldgleichung

$$\operatorname{curl} \bar{\boldsymbol{v}} = 0 \tag{3}$$

erfüllt ist. Solange wir nun frei über die äußeren Kräfte verfügen, die an dem flüssigen System angreifen, hindert uns nichts, diese Kräfte so zu bestimmen, daß diese Gleichung erfüllt wird. Daraus folgt aber nur dann eine tiefere Analogie, wenn die verfügbare äußere Kraft, die zu (3) führt, gleichzeitig Identität oder wenigstens Verwandtschaft mit der

Kraft **55** (6A) oder (6B) zeigt, die an dem elektrischen oder magnetischen Feld von außen angreifen muß, um dessen statische Natur zu sichern.

Statt nach den Kräften zu fragen, die von außen her an dem elektrostatischen, dem magnetostatischen oder dem hydrodynamischen System angreifen, können wir auch umgekehrt nach den Kräften fragen, welche die Felder nach außen ausüben. Das elektrische bzw. das magnetische Feld übt die Kraft **55** (5A) bzw. (5B) aus, und es erhebt sich die Frage, ob oder unter welchen Verhältnissen das hydrodynamische Feld verwandte Kräfte ausüben kann. Die Kräfte, die ein bewegtes flüssiges System nach außen ausübt, können nur Trägheitskräfte sein. Sie müssen im Trägheitsgliede der hydrodynamischen Bewegungsgleichung ihren Ursprung haben. Dadurch eröffnet sich ein bequemer Weg zur Durchführung der Untersuchung. Denn aus dem Trägheitsgliede der hydrodynamischen Bewegungsgleichung lassen sich zwanglos Glieder ausscheiden, die genau so gebaut sind wie die elektrischen oder magnetischen Feldkräfte. Diese *Trägheitsglieder* lassen sich, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen, als *Trägheitskräfte* ausscheiden und stellen *die hydrodynamischen Feldkräfte* dar. Diese hydrodynamischen Feldkräfte erweisen sich *bis auf das Vorzeichen, welches entgegengesetzt ist,* mit den elektrischen oder magnetischen Feldkräften identisch. Man hat also keine Identität, wohl aber eine Verwandtschaft auffälligster Natur, entsprechend der Verwandtschaft zwischen einem Gegenstand und seinem Spiegelbild. Nachdem diese Feldkraft gefunden ist, kann man sich ihrer bedienen, um die beiden Partialfelder, das durch $\bar{\boldsymbol{v}}$ gekennzeichnete freie Feld und das durch $\boldsymbol{v}^*$ gekennzeichnete erzwungene Feld, dynamisch zu definieren. Wie wir sehen werden, kann man die Definitionen derart wählen, daß die Gleichung (3) zwanglos folgt: die Analogie ist dann vorhanden, und zwar eine direkte Analogie in bezug auf die Geometrie der Felder und eine inverse in bezug auf die ausgeübten Feldkräfte.

In der hydrodynamischen Bewegungsgleichung müssen wir mit Rücksicht auf diese Untersuchung die äußere Kraft auf die Einheit des Volumens beziehen. Während nun eine auf die Masseneinheit bezogene konservative Kraft als Gradient eines Potentiales darstellbar ist, gilt das für die auf die Volumeneinheit bezogene Kraft nicht mehr, sofern das Medium heterogen ist. Wir können aber immer aus der nichtpotentiellen Kraft einen potentiellen Anteil ausscheiden und die Gesamtkraft in der Form

$$-\nabla\chi + \boldsymbol{f}'$$

darstellen. Den nichtpotentiellen Anteil $\boldsymbol{f}'$ denken wir uns hier als eine ganz beliebige Kraft, über die wir volles Verfügungsrecht haben.

Wir schreiben somit die Bewegungsgleichung:

$$q\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f}' - \nabla\chi - \nabla p\,. \tag{4}$$

Wenn man hier (1) einsetzt und sich $qs = 1$ erinnert, ergibt sich:

$$q\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt} + \frac{d\bar{\boldsymbol{v}}}{dt} + \bar{\boldsymbol{v}}\frac{1}{s}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{f}' - \nabla\chi - \nabla p\,.$$

Oder unter Anwendung der Kontinuitätsgleichung (2′), indem wir gleichzeitig die individuelle Zeitableitung im zweiten Gliede entwickeln:

$$q\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt} + \frac{\partial\bar{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{v}} + e\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}' - \nabla\chi - \nabla p\,.$$

Hier ist schon ein Trägheitsglied der erwünschten Form ausgeschieden, nämlich $e\bar{\boldsymbol{v}}$, welches, auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht, die Trägheitskraft $-e\bar{\boldsymbol{v}}$ darstellen würde und — bis auf das Vorzeichen — der elektrischen Feldkraft $e\boldsymbol{E}$ oder der magnetischen Feldkraft $m\boldsymbol{H}$ entspricht.

Soll man weitere ähnliche Glieder ausscheiden, so muß dies aus dem Gliede $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\bar{\boldsymbol{v}}$ geschehen. Dies läßt sich zunächst nach der Formel **11** (4) in der Form $\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + (\mathrm{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}})\times\boldsymbol{v}$ schreiben, wo das letzte Glied gegebenenfalls künftig nach (3) wegfallen wird. Wir behalten es aber vorläufig bei und schreiben die obige Gleichung:

$$q\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt} + \frac{\partial\bar{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \nabla\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} + (\mathrm{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}})\times\boldsymbol{v} + e\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}' - \nabla\chi - \nabla p\,.$$

Dann können wir das Glied $\nabla\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}$ nach (1) zerlegen und durch einfache Umformungen zwei weitere Glieder der erwünschten Form ausscheiden:

$$\begin{aligned}\nabla\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} &= \nabla\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}^* + \nabla\bar{\boldsymbol{v}}\cdot s\bar{\boldsymbol{v}} = \nabla\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}^* + s\nabla(\tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^2)\\ &= \nabla(\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}^* + \tfrac{1}{2}s\bar{\boldsymbol{v}}^2) - \nabla\boldsymbol{v}^*\cdot\bar{\boldsymbol{v}} - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^2\nabla s\,.\end{aligned}$$

Dies können wir jetzt einsetzen, wodurch sich die folgende entwickelte Form der Bewegungsgleichung (4) ergibt:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{\boldsymbol{v}}}{\partial t} + \nabla(\chi + p + \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}^* + \tfrac{1}{2}s\bar{\boldsymbol{v}}^2)\\ &\quad + q\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt} + e\bar{\boldsymbol{v}} - \nabla\boldsymbol{v}^*\cdot\bar{\boldsymbol{v}} - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^2\nabla s + (\mathrm{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}})\times\boldsymbol{v} - \boldsymbol{f}' = 0\,.\end{aligned}\right. \tag{4′}$$

Hier kommen alle die drei erwünschten Trägheitsglieder vor, alle eigentümlicherweise mit solchen Vorzeichen, daß die vom flüssigen System ausgeübte Trägheitskraft nicht gleich, sondern entgegengesetzt gleich der von dem elektrischen oder von dem magnetischen Felde ausgeübten Kraft wird. Außerdem kommt noch ein viertes Trägheitsglied $(\mathrm{curl}\,\bar{\boldsymbol{v}})\times\boldsymbol{v}$ vor, das verschwinden wird, wenn die Feldgleichung (3) erfüllt wird, aber welches durch seine Form an die gegen den elektrischen oder magnetischen Strom ausgeübte Feldkraft erinnert und somit auf weitere Fortsetzungen der Analogie hindeutet.

Die Gleichung (4') hat immer noch die volle Allgemeinheit der ursprünglichen Bewegungsgleichung (4), hat aber jetzt die entwickelte Form, aus der wir gleichzeitig Schlüsse über die Feldeigenschaften des Vektors $\bar{v}$ und über die ausgeübte Trägheitskraft ziehen können. Die Allgemeinheit der betrachteten Bewegung wird nicht im geringsten beschränkt, wenn wir für die eine der beiden Partialbewegungen, die nach (1) die Gesamtbewegung darstellen, eine beschränkende Bedingung einführen. Wir verlangen deshalb, daß $\bar{v}$ die Gleichung erfüllen soll:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\nabla(\chi + p + \bar{v} \cdot v^* + \tfrac{1}{2} s \bar{v}^2 \tag{5}$$

die jetzt die Feldeigenschaften des Vektors $\bar{v}$, d. h. des freien Feldes enthält. Gleichzeitig muß die erzwungene Partialgeschwindigkeit v^* der Gleichung

$$q \frac{d v^*}{d t} = f' - e \bar{v} + \nabla v^* \cdot \bar{v} + \tfrac{1}{2} \bar{v}^2 \nabla s - (\mathrm{curl}\, \bar{v}) \times v \tag{6}$$

genügen. Auf der rechten Seite dieser Gleichung kommt jetzt die besonders ausgeschiedene Trägheitskraft vor, die das bewegte System neben der Trägheitskraft $-q \frac{d v^*}{d t}$ nach außen ausübt. Wir haben die Eigenschaften der beiden Partialbewegungen (5) und (6) zu untersuchen.

Durch Wirbelableitung der Gleichung (5) und darauf folgende Zeitintegration ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{curl}\, \bar{v} = 0\,, \qquad \text{d. h.} \qquad \mathrm{curl}\, \bar{v} = \bar{c}\,, \tag{7}$$

wo c ein von den Koordinaten abhängiger, aber von der Zeit unabhängiger Vektor ist. Im Felde der freien spez. Bewegungsgröße wird also nach (5) *das Wirbeln* $\mathrm{curl}\, \bar{v}$ *lokal erhalten.* Wir können deshalb mit Hilfe von Anfangsbedingungen zwanglos erreichen, daß die Feldgleichung (3) befriedigt wird. Wir führen dazu die folgende Anfangsbedingung ein, die einzige Bedingung, die in irgendwelcher Weise die Allgemeinheit der betrachteten Flüssigkeitsbewegung beschränkt:

(I) *Zur Anfangszeit* $t = 0$ *sollen sowohl die totale Geschwindigkeit* v *wie die beiden Partialgeschwindigkeiten* $s\bar{v}$ *und* v^* *gleich Null sein.*

In der zweiten Gleichung (7) ist dann zur Anfangszeit und damit zu jeder Zeit Null. D. h. die freie spez. Bewegungsgröße muß die verlangte Gleichung (3) befriedigen.

Gleichzeitig vereinfacht sich die Gleichung (6) zu:

$$q \frac{d v^*}{d t} = f' - e \bar{v} + \nabla v^* \cdot \bar{v} + \tfrac{1}{2} \bar{v}^2 \nabla s\,, \tag{8}$$

wo die drei letzten Glieder rechts die besonders ausgeschiedene nach außen ausgeübte Trägheitskraft oder die *hydrodynamische Feldkraft* darstellen. Wenn wir diese mit $\boldsymbol{f}$ bezeichnen, haben wir:

(9) $$q\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt} = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{f},$$

wo

(10) $$\boldsymbol{f} = -e\bar{\boldsymbol{v}} + \Gamma\boldsymbol{v}^*\cdot\bar{\boldsymbol{v}} + \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^2\Gamma s$$

die hydrodynamische Feldkraft darstellt und bis auf das Vorzeichen mit der vom elektrostatischen oder vom magnetischen Felde ausgeübten Feldkraft identisch ist.

Macht man jetzt die spezielle Voraussetzung, daß im betrachteten Zeitpunkt die erzwungene Partialbewegung unbeschleunigt verläuft, so verschwindet die linke Seite der Gleichung (9), man bekommt $\boldsymbol{f}' = -\boldsymbol{f}$, und die äußere Kraft, welche der von der bewegten Flüssigkeit ausgeübten Trägheitskraft entgegenwirkt, wird:

(11) $$\boldsymbol{f}' = e\bar{\boldsymbol{v}} - \Gamma\boldsymbol{v}^*\cdot\bar{\boldsymbol{v}} - \tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^2\Gamma s,$$

also entgegengesetzt gleich der äußeren Kraft, die an dem elektrischen oder magnetischen Feld angreift. Alle sonst im flüssigen System auftretenden Trägheitskräfte gehören der Bildung des freien Feldes nach der Gleichung (5) an und machen sich nach außen nicht geltend: in einem solchen Moment ist die Analogie so vollständig wie überhaupt zwischen einem bewegten und einem unbewegten System möglich.

Mehr als dieses momentane Auftauchen der Analogie interessiert uns aber das dahinterliegende dynamische Prinzip, das in der vollständigen Gleichung (9) enthalten ist. Wenn hier $\boldsymbol{f}'$ und $\boldsymbol{f}$ eine von Null verschiedene Resultierende haben, die das Teilchen in seiner erzwungenen Partialbewegung beschleunigt, so hat man noch mit dem von Null verschiedenen Trägheitsgliede $q\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt}$ zu tun oder außer mit der Trägheitskraft $\boldsymbol{f}$ noch mit der Trägheitskraft $-q\frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt}$. Indem wir auf die Anfangsbedingung (I) Rücksicht nehmen, erhalten wir dann die folgende eindeutige Definition der erzwungenen Partialgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}^*$:

(12) $$\boldsymbol{v}^* = \int_0^t s\boldsymbol{f}'\,dt + \int_0^t s\boldsymbol{f}\,dt,$$

wo $s\boldsymbol{f}'$ und $s\boldsymbol{f}$ die Beträge der äußeren verfügbaren Kraft und der hydrodynamischen Feldkraft sind, wenn man sie auf die Masseneinheit des bewegten Teilchens bezieht. Oder in Worten:

(II) *Die erzwungene Partialgeschwindigkeit eines Teilchens ist die Geschwindigkeit, die das Teilchen angenommen haben würde, wenn es*

sich im leeren Raume unter dem Einfluß der Summe der verfügbaren äußeren Kraft f' *und der hydrodynamischen Feldkraft* f *bewegt hätte.*

Es ist völlig berechtigt, diese Partialgeschwindigkeit als eine erzwungene zu bezeichnen, weil wir sie durch die verfügbare äußere Kraft f' vollkommen regulieren können. Mit Hinblick auf die gegebene Definition können wir diese erzwungene Geschwindigkeit auch die *Leerraumgeschwindigkeit* des Teilchens nennen.

Wenn man diese Definition der erzwungenen Geschwindigkeit zugrunde legt, kann man die Analogie während einer beliebigen Bewegung im Sinne des folgenden Satzes als immer bestehend betrachten:

(III) *Wenn man eine beliebige Bewegung eines beliebigen flüssigen Systems von deren Beginn aus der Ruhe heraus verfolgt, so läßt sich das Bewegungsfeld zu jeder Zeit eindeutig in ein „freies" und ein „erzwungenes" Partialfeld zerlegen, für welche Feldgleichungen* (1), (2'), (3) *entsprechend denen des elektrostatischen oder magnetischen Feldes gelten. Während dieser Bewegung übt das flüssige System nach außen eine aus zwei Teilen bestehende Trägheitskraft aus: der erste Teil ist die Trägheitskraft* $-q\frac{dv^*}{dt}$, *die bei Intensitätsänderung des eingeprägten Feldes auftritt, der zweite Teil ist eine Trägheitskraft* (10) *entgegengesetzt gleich der vom entsprechenden elektrischen oder magnetischen Felde ausgeübten Feldkraft.*

Wie aus diesem Satze in Spezialfällen eine sehr anschauliche und experimentell verifizierbare Analogie hervorgeht, werden wir später sehen. Das Interessanteste an diesem Satze ist aber dessen große Allgemeinheit. Er ist anwendbar auf jede beliebige Flüssigkeitsbewegung, unter der Bedingung, daß wir die Gelegenheit gehabt haben, sie von dem Anfangszustand der Ruhe aus zu verfolgen und dadurch die erzwungene Partialbewegung eindeutig zu definieren. *Eine einzige* Bewegungsform scheidet aber dabei aus, die *stationäre,* die keinen Anfang hat, so daß man keine Gelegenheit hat, sie in der verlangten Weise in Partialbewegungen zu zerlegen. Die Bedeutung der dadurch bleibenden Lücke wird im nächsten Kapitel hervortreten.

Die Tatsache, daß man die Fundamentalformeln der Elektrostatik oder des Magnetismus als der Hydrodynamik organisch angehörig wiederfindet, kann zu vielerlei Betrachtungen Anlaß geben. Die große Lücke der MAXWELLschen Theorie — von MAXWELL selbst stark hervorgehoben[1] — ist, daß man nicht weiß, wie ein Feld eine Kraft erzeugen kann. Um diese Lücke auszufüllen, hat MAXWELL seine bekannte Spannungstheorie ersonnen, die er aber ausdrücklich nur als *einen ersten Schritt* bezeichnet. Es gelang ihm nicht und es ist später auch niemand gelungen,

[1] MAXWELL: Electricity and Magnetism, I, art. 110, p. 153—154 (1881).

den *nächsten Schritt* zu tun, nämlich die Spannungen organisch mit den Feldgleichungen zu verbinden. Diese *ad hoc* ersonnenen recht komplizierten Spannungen leisten nur das eine, für welches sie ersonnen sind, nämlich rein formal die Feldkräfte auf Spannungen zurückzuführen, ohne uns sonst irgendwelchen tieferen Einblick in die innere Dynamik der Felder zu geben. Es ist nicht ohne Interesse, zu sehen, mit welcher Einfachheit die Natur, wenn nicht dieselbe, so doch eine nahe verwandte Aufgabe zu lösen versteht: im hydrodynamischen Felde erzeugt der einfache isotrope Flüssigkeitsdruck sowohl das Feld wie die Kräfte des Feldes. Diesen Druck können wir explizite bestimmen. Da $\bar{\boldsymbol{v}}$ wirbelfrei ist, können wir diesen Vektor durch ein Potential darstellen:

$$\bar{\boldsymbol{v}} = -\nabla\bar{\varphi}\,. \tag{13}$$

Setzt man dies in (5) ein, so wird die Gleichung integrabel, und nach Integration und darauf folgender Auflösung nach dem Druck p ergibt sich:

$$p = p_0 + \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} - \chi - \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}^* - \tfrac{1}{2}s\,\bar{\boldsymbol{v}}^2 \tag{14}$$

Wenn wir die beiden Feldvektoren $\bar{\boldsymbol{v}}$ und $\boldsymbol{v}^*$ kennen, ist also dieser Druck bekannt, der gleichzeitig das Feld bildet und die Feldkraft erzeugt.

Wenn man deshalb die hydrodynamische Feldtheorie mit der elektromagnetischen vergleicht, so liegt eine Vermutung nahe. Hinter den hydrodynamischen Feldgleichungen (1), (2′), (3), (10) steckt ein tieferes Gleichungssystem, die Kontinuitätsgleichung (2) und die Bewegungsgleichung (4), das in vollständigster Form alles enthält. Ist es nicht berechtigt, nach Analogie zu schließen, daß auch hinter den MAXWELLschen Feldgleichungen ein tieferes, und zwar nicht lineares Gleichungssystem stecken könnte, in dem die Feldgeometrie und die Felddynamik völlig miteinander verschmolzen sind?

Eine Vermutung dieser Art verliert nicht im geringsten an Wahrscheinlichkeit durch den Umstand, daß die Feldkräfte des elektrischen oder des magnetischen Systems das Vorzeichen der *Trägheitsglieder*, nicht der *Trägheitskräfte* des hydrodynamischen Systems haben. Ein solcher Gegensatz braucht nicht ein wesentlicher Unterschied zu sein. Denn wo eine Kraft $\boldsymbol{f}$ wirkt, tritt auch eine Gegenkraft $-\boldsymbol{f}$ auf, und in einem zusammengesetzten System treten bei jeder Koppelung beide Kräfte auf, und es hängt von dem Bau des Systems ab, welche Kraft als die nach außen wirkende auftritt. Die Umkehrung von Kräften ist deshalb auch eine alltägliche Erscheinung, man erzielt sie in elementaren Konstruktionen durch Hebel, Flaschenzüge oder Zahnräder, und durch das Archimedische Prinzip entsteht eine Auftriebskraft, die der Schwerkraft entgegengesetzt gerichtet ist usf.

Es ist jedoch nicht hier unser Ziel, die Konsequenzen solcher Analogien für die Theorie des Elektromagnetismus zu verfolgen. Aber nachdem die Analogie einmal erkannt ist, werden wir untersuchen, was uns der Formelapparat und die Methoden der Elektrostatik und des Magnetismus über die Bewegung flüssiger Systeme aussagen können. Da hierbei alles auf der Zerlegung des Feldes in das freie und das eingeprägte Partialfeld beruht, werden wir noch auf einige wichtige Punkte im Zusammenhang mit dieser Zerlegung aufmerksam machen.

Diese zwei Partialbewegungen, die wir vollkommen eindeutig voneinander trennen können, wenn wir die Geschichte des Systems vom Beginn der Bewegung aus der Ruhe heraus kennen, rühren beide teils von der äußeren Kraft, teils von dem Drucke her. In einem Grenzfall tritt aber eine scharfe Trennung ein, nämlich wenn die Bewegung impulsiv, d. h. in unendlich kurzer Zeit durch unendlich große Kräfte erzeugt wird. In diesem Falle bleibt die durch immer endliche Geschwindigkeiten definierte hydrodynamische Feldkraft endlich. Das zweite Integral in (12) verschwindet und diese Gleichung wird:

$$= \int^{t} s\mathbf{f}'\,dt. \tag{15}$$

Ähnlich bleiben in der Gleichung (14) alle Glieder auf der rechten Seite außer der Zeitableitung des Potentiales $\overline{\varphi}$ endlich. Diese Gleichung gibt deshalb nach lokaler Zeitintegration und Auflösung nach $\overline{\varphi}$:

$$\overline{\varphi} = \int_{0} p\,dt. \tag{16}$$

Wir schließen also:

(IV) *Bei der impulsiv aus der Ruhe heraus erzeugten Bewegung ist das erzwungene Feld das durch den Impuls der äußeren Kraft* $\mathbf{f}'$ *und das freie Feld das durch den Impuls des Druckes erzeugte Partialfeld.*

Diese große Vereinfachung macht es oft bequem, zur Veranschaulichung oder mit Rücksicht auf elementar-induktive Ableitungen auf die impulsive Bewegung zurückzugreifen.

Aus der allgemeinen Definition (12) der erzwungenen Geschwindigkeit folgt unmittelbar, daß ausschließlich solche Teilchen diese Partialgeschwindigkeit besitzen können, auf die entweder die verfügbare äußere Kraft $\mathbf{f}'$ oder die hydrodynamische Feldkraft $\mathbf{f}$ eingewirkt hat. Nun kann aber eine hydrodynamische Feldkraft (10) nur dort auftreten, wo entweder eine Volumenänderung div $\mathbf{v}$ vor sich geht oder eine Heterogenität ∇s vorliegt, oder an Teilchen, die schon eine er-

zwungene Geschwindigkeit $\mathfrak{v}^*$ besitzen, d. h. auf die früher schon die Feldkraft $\mathfrak{f}$ oder die verfügbare äußere Kraft $\mathfrak{f}'$ eingewirkt hat. Hieraus folgt unmittelbar:

(V) *Homogene inkompressible Flüssigkeitsmassen, an denen nie die verfügbare äußere Kraft angegriffen hat, besitzen keine erzwungene Geschwindigkeit* $\mathfrak{v}^*$.

57. Ein System von flüssigen Körpern in einer homogenen und inkompressiblen Flüssigkeit. Der letztere Satz gestattet uns jetzt, ein hydrodynamisches System zu definieren, dessen Bewegung wir bequem nach den Methoden und unter Anwendung des Formelapparates der Elektrizitätslehre diskutieren können. Das flüssige System soll bestehen aus einer nach außen unbegrenzten homogenen inkompressiblen Flüssigkeit des spez. Volumens s_0, in der eine Anzahl begrenzter flüssiger Körper von beliebigem variablen spez. Volumen s und mit beliebigen Flüssigkeitseigenschaften schwimmen. Die verfügbare äußere Kraft darf nur an den Teilchen der flüssigen Körper, nicht aber an den Teilchen der Grundflüssigkeit angreifen. Es folgt hieraus, daß nur die Teilchen der flüssigen Körper und nicht die der Grundflüssigkeit eine erzwungene Partialgeschwindigkeit haben können, und daß die hydrodynamische Feldkraft nur an den Teilchen der Körper, nicht an der Grundflüssigkeit angreift.

Da die äußere Kraft, welche an den Körpern angreift, ganz beliebig gewählt werden kann, hat das betrachtete System eine große Allgemeinheit. Bestimmt man diese Kräfte so, daß sich die Körper ohne Formänderung bewegen, so hat man das klassische Problem der Bewegung fester Körper in einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit. Andererseits bildet die Atmosphäre mit ihren Wolken ein System von flüssigen Körpern, die sich in einer Flüssigkeit mit einfacheren Eigenschaften bewegen, wenn auch nicht mit so einfachen Eigenschaften wie Homogenität und Inkompressibilität. Die Diskussion unseres Problems kann deshalb als Vorbereitung dienen für die Behandlung der großen meteorologischen Probleme von der Bewegung von Luftmassen verschiedener Eigenschaften durcheinander.

Für das definierte System können wir gleich das System von Feldgleichungen aufschreiben, das die Bewegung des Systems eindeutig bestimmt, wenn die Größen s, e, $\mathfrak{v}^*$ gegeben sind. Für die Grundflüssigkeit, wo $\mathfrak{v}^* = 0$, $e = 0$, $s = s_0$, haben wir nach **56** (1), (2'), (3):

(1) $$\mathfrak{v} = s_0 \bar{\bar{\mathfrak{v}}}\,,$$

(2) $$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0\,,$$

(3) $$\operatorname{curl} \bar{\bar{\mathfrak{v}}} = 0\,.$$

für das Innere der Körper werden diese Gleichungen:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* + s\,\overline{\boldsymbol{v}}\,, \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = e\,, \tag{5}$$

$$\operatorname{curl}\overline{\boldsymbol{v}} = 0\,. \tag{6}$$

Und schließlich greift in diesem System nach **56** (10) eine hydrodynamische Feldkraft

$$\boldsymbol{f} = -e\,\overline{\boldsymbol{v}} + \nabla\boldsymbol{v}^* \cdot \overline{\boldsymbol{v}} + \tfrac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{v}}^2\,\nabla s \tag{7}$$

an den Teilchen der Körper an.

Das Ziel der weiteren Entwicklungen dieses Kapitels ist, zu sehen, was wir mit Hilfe dieser Gleichungen über die Bewegung des definierten Systems aussagen können, indem wir die Methoden und die Formeln der Elektrizitätslehre in Anwendung bringen.

Zur Vereinfachung der Diskussion werden wir dabei ausdrücklich annehmen, daß in den betrachteten Systemen *keine Diskontinuitäten vorkommen*. Dies besagt im hydrodynamischen Fall, daß man keinen plötzlichen Übergang zwischen Körper und Grundflüssigkeit hat. In einer dünnen Grenzschicht sollen die Körpereigenschaften stetig, aber beliebig schnell in die Eigenschaften der Grundflüssigkeit übergehen. In dieser Grenzschicht konvergiert s gegen s_0 und $\boldsymbol{v}^*$ gegen Null. Diese Grenzschicht wird zu dem Körper gerechnet, und an der Grenzfläche des Körpers haben deshalb alle Parameter die Grenzwerte erreicht, die der Grundflüssigkeit eigen sind. Die in dieser Weise formulierte Stetigkeitseigenschaft hat zur Folge, daß einerseits die Differentialformeln überall ihre Gültigkeit behalten, und daß andererseits bei Integraltransformationen die Oberflächenintegrale fortfallen.

58. Divergenz- und Wirbeleigenschaften des Bewegungsfeldes. Wenn man Divergenz und Wirbel eines Vektors kennt, so kann man sich, wie wir in **6** gesehen haben, ein anschauliches Bild des Vektorfeldes machen. Das Feld ist gekennzeichnet durch ausgehenden Vektorfluß von den Stellen positiver Divergenz, durch eingehenden Vektorfluß zu den Stellen negativer Divergenz und durch zirkulierenden Vektorfluß um die Wirbelröhren. Im unbegrenzten Felde kann man durch Quadraturen ein skalares Potential für das divergierende und ein Vektorpotential für das zirkulierende Partialfeld berechnen.

Nach den Grundgleichungen kennen wir jetzt die Divergenz des einen und das Wirbeln des anderen von den beiden linear verbundenen Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\overline{\boldsymbol{v}}$, nämlich $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ und $\operatorname{curl}\overline{\boldsymbol{v}}$, welch letzteres immer Null ist. Wir untersuchen jetzt die noch unbekannten Größen $\operatorname{div}\overline{\boldsymbol{v}}$ und $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$.

Die Divergenz der freien Feldstärke, $\operatorname{div}\mathbf{v}$ (freie elektrische oder magnetische Dichte), entspricht hydrodynamisch dem spez. Massenausfluß vom ruhenden Volumenelemente im freien Partialfelde. Als dem Partialfelde angehörig ist dieser „freie Massenausfluß" wohl von dem wirklichen Massenausfluß ($\operatorname{div} q\mathbf{v} = -\partial q/\partial t$) im Gesamtfelde zu unterscheiden. Wo der totale Massenausfluß Null ist, können das eingeprägte und das freie Partialfeld mit von Null verschiedenem entgegengesetztem Massenausfluß auftreten.

Das Wirbeln $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ (der freie elektrische Strom im Magnetfelde) stellt hydrodynamisch das Wirbeln im eigentlichen Sinne dieses Wortes, nämlich die doppelte Winkelgeschwindigkeit der kleinsten Teile der Flüssigkeit, dar.

Um zunächst den freien Massenausfluß zu studieren, bilden wir die Divergenz der Verbindungsgleichung **57** (4):

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}^* + s\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}\cdot\nabla s. \tag{1}$$

Oder durch Auflösung nach $\operatorname{div}\mathbf{v}$:

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{s}\operatorname{div}\mathbf{v} - \frac{1}{s}\operatorname{div}\mathbf{v}^* - \frac{1}{s}\bar{\mathbf{v}}\cdot\nabla s. \tag{2}$$

Nach der rechten Seite dieser Gleichung hat der freie Massenausfluß einen dreifachen Ursprung.

(I) Vereinfachen wir erst durch die Annahme $\mathbf{v}^* = 0$. Das totale Feld und das freie Feld sind dann unter sich identisch. Weiter setzen wir $\nabla s = 0$, d. h. das elektrische oder magnetische System ist dauernd homogen und das hydrodynamische ist homogen im betrachteten Moment. Die Gleichung (2) reduziert sich dann auf:

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{s}\operatorname{div}\mathbf{v}, \tag{3}$$

welche aussagt, daß man in diesem einfachen Fall Proportionalität hat, einerseits zwischen freier und wahrer elektrischer Dichte und andererseits zwischen dem spez. Massenausfluß aus einem unbewegten geometrischen Volumenelemente und der spez. Expansionsgeschwindigkeit der bewegten Substanz, die im betrachteten Zeitpunkt dieses Volumenelement füllt.

(II) Vereinfachen wir jetzt durch die Annahme $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$. Die Flüssigkeit ist dann inkompressibel, und es existiert keine wahre elektrische oder magnetische Dichte im elektrischen oder magnetischen System. Da diese Bedingung immer im Falle des Magnetismus erfüllt ist, können wir das flüssige System mit einem magnetischen vergleichen. Weiter nehmen wir vollkommene Homogenität der beiden Systeme an, $\nabla s = 0$, und setzen das spez. Volumen bzw. die magnetische

Permeabilität beide gleich Eins, $s = s_0 = 1$. Die Gleichung (2) reduziert sich dann auf:

$$\text{div}\,\bar{\boldsymbol{v}} = -\text{div}\,\boldsymbol{v}^* . \tag{4}$$

Die Interpretation dieser magnetischen Formel ist wohl bekannt. Die primäre Ursache des magnetischen Feldes ist die permanente Magnetisierungsintensität $\boldsymbol{v}^*$, die in der Nähe der Oberfläche des Magnets eine Schicht von freiem Magnetismus $\text{div}\,\bar{\boldsymbol{v}}$ definiert, die gleich der negativen Divergenz der Magnetisierungsintensität, $-\text{div}\,\boldsymbol{v}^*$, ist. Wenn diese Schicht ganz dünn ist, wird die negative Divergenz von $\boldsymbol{v}^*$ identisch mit der Normalkomponente von $\boldsymbol{v}^*$ an der Oberfläche. Die Kraftlinien des freien Feldes gehen vom positiven zum negativen Teil der freien Schicht, teils direkt rückwärts durch den Magneten, teils durch den umgebenden Raum, wo man ihren Verlauf durch den Versuch mit Eisenfeilspänen sichtbar macht. Im äußeren Raume ist dieses freie Feld gleichzeitig das totale Feld. Im inneren Raume dagegen hat man zwei Partialfelder, das freie Feld $\bar{\boldsymbol{v}}$ und das erzwungene oder eingeprägte Feld, das durch die Magnetisierungsintensität $\boldsymbol{v}^*$ gegeben ist. Indem man sie addiert, erhält man die magnetische Induktion $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}^*$ (oder in den irrationellen Einheiten $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}} + 4\pi\boldsymbol{v}^*$) im Inneren des Magneten. Im äußeren Raume hat man infolge der Voraussetzung $s_0 = 1$ Identität der Feldstärke und der Induktion $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}$, und die Induktion ist ein im ganzen Raume solenoidaler Vektor.

Wir gehen zu der parallelen hydrodynamischen Interpretation der Formel (4) über. Die Bewegung der homogenen und inkompressiblen Flüssigkeit rührt von den Impulsen pro Masseneinheit $\boldsymbol{v}^*$ her, die einem begrenzten Teil der Flüssigkeit, dem flüssigen Körper oder dem „Hydromagnet", erteilt werden. Jedes Element, betrachtet als freies Teilchen im leeren Raume, würde dann die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^*$ erhalten haben. Das ist die partielle erzwungene oder eingeprägte Geschwindigkeit des Teilchens des flüssigen Körpers. Diese erzwungene Geschwindigkeit entspricht der permanenten Magnetisierungsintensität. Man kann deshalb sagen: die „hydromagnetische Magnetisierungsintensität" $\boldsymbol{v}^*$ definiert, besonders in der Nähe der Oberfläche des Hydromagneten, eine Schicht von „freiem Hydromagnetismus" $\text{div}\,\bar{\boldsymbol{v}}$, gleich der negativen Divergenz der „Hydro-Magnetisierungsintensität" $-\text{div}\,\boldsymbol{v}^*$ und gleich der Normalkomponente von $\boldsymbol{v}^*$ im Falle einer Diskontinuität an der Oberfläche. Die Kraftlinien des hydromagnetischen Feldes gehen vom positiven zum negativen Teil der Schicht, teils von vorn rückwärts direkt durch den Hydromagneten, teils längs der krummen Kraftlinien im umgebenden Medium. Man kann in analoger Weise wie oben im magnetischen Falle fortsetzen und bekommt eine vollständige Beschreibung des hydrodynamischen Feldes in der Sprache des Magnetismus,

was eine unmittelbare Folge davon ist, daß die Gleichungen **57** (1) bis (7) sowohl die Gleichungen des einen Feldes wie die des anderen sind.

Besonders interessiert uns aber die dynamische Bedeutung der Begriffe, die man von der Lehre von Elektrizität und Magnetismus in die Hydrodynamik überführt, und zwar im vorliegenden Fall besonders die Vorstellung von der freien hydromagnetischen Schicht (4). Wir kehren dann zu dem flüssigen Körper zurück, deren Teilchen die Leerraumgeschwindigkeit $\mathfrak{v}^*$ haben. Diese Bewegung, für sich allein betrachtet, hat zur Folge, daß während einer unendlich kurzen Zeit ein unendlich kleiner Raum an der Vorderseite des Körpers von Masse gefüllt wird, während sich gleichzeitig ein entsprechender Raum auf der Hinterseite entleert (Abb. 31A). Wir stellen uns vor, daß der Körper nicht durch eine Unstetigkeitsfläche begrenzt ist, sondern durch eine Übergangsschicht, in der der Vektor $\mathfrak{v}^*$ schnell, aber stetig gegen Null konvergiert. Dann wird die Divergenz der Leerraumgeschwindigkeit den Massenzufluß zu den geometrisch unbewegten Volumenelementen auf der Vorderseite und den Massenausfluß aus den unbewegten geometrischen Volumenelementen auf der Hinterseite geben. Hieraus folgt aber im freien Partialfelde ein Massenausfluß von der Vorderseite des Körpers, wo die Leerraumbewegung des Körpers Massenanfüllung gab, und Massenzufluß zu der Hinterseite des Körpers, wo die Leerraumbewegung des Körpers Massenentleerung gab. Der allgemeine Massenfluß im freien Partialfelde geht deshalb von den Quellstellen mit positivem div $\bar{\mathfrak{v}}$ auf der Vorderseite zu den Senkstellen mit negativem div $\bar{\mathfrak{v}}$ auf der Hinterseite des Körpers, und zwar teils längs der krummen Feldlinien in der umgebenden Flüssigkeit, teils direkt rückwärts durch den Körper selbst (Abb. 31B). Überlagert man nun die beiden Partialfelder, das Leerraumfeld des Körpers und das im ganzen Raume bestehende freie Feld, so entsteht ein resultierendes Feld (Abb. 31C), welches solenoidal ist, weil die Massenausflüsse und die Massenzuflüsse der beiden Partialfelder sich aufheben. Dabei hat man in der umgebenden Flüssigkeit nur mit dem freien Felde zu tun. Das resultierende innere Feld ist dagegen doppelten

Abb. 31. Der permanente Hydromagnet.

Ursprunges: es setzt sich zusammen aus der Leerraumgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}^*$, die identisch ist mit dem Impulse pro Masseneinheit, der die ganze Bewegung erzeugt hat, und der Rückwärtsgeschwindigkeit $\overline{\boldsymbol{v}}$, die die Rückwirkung der umgebenden Flüssigkeit auf die Bewegung des Körpers vertritt. Dieses Feld der Rückwärtsgeschwindigkeit gibt die bekannte *scheinbare Trägheitsvergrößerung*, die man bei der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit beobachtet.

(III) Schließlich vereinfachen wir durch die Annahmen $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ und $\boldsymbol{v}^* = 0$, während wir gleichzeitig voraussetzen, daß ein Körper vorhanden ist, dessen spez. Volumen bzw. magnetische Permeabilität s von dem Wert s_0 derselben Größe im umgebenden Medium verschieden ist. In der Übergangsschicht ist dann der Vektor ∇s von Null verschieden, und in dieser Übergangsschicht reduziert sich die Gleichung (2) auf:

$$\operatorname{div}\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{s}\,\overline{\boldsymbol{v}}\cdot(-\nabla s)\,. \tag{5}$$

Entsprechend dieser Formel bildet sich im magnetischen Fall eine freie magnetische Schicht, die auf dem induzierten Magnetismus beruht, und im hydrodynamischen Fall eine entsprechende hydromagnetische Schicht, die von dem induzierten Hydromagnetismus herrührt. Ist das spez. Volumen oder die magnetische Permeabilität des Körpers größer als im umgebenden Medium, $s > s_0$, so hat man den Fall des Paramagnetismus. Die Schicht ist negativ dort, wo die Feldlinien von außen her in den Körper eindringen, positiv dort, wo sie den Körper verlassen. Hinter dem paramagnetischen oder dem leichten Körper sammeln sich die Feldlinien, um ihn in größerer Zahl zu durchsetzen (Abb. 32A). Wenn der Körper kleineres spez. Volumen oder kleinere magnetische Permeabilität als das umgebende Medium hat, $s < s_0$, so hat man den Fall des Diamagnetismus. Die von dem induzierten Magnetismus oder Hydromagnetismus herrührende Schicht hat ihr Zeichen gewechselt. Sie ist positiv, wo die Feldlinien in den Körper eintreten, und negativ, wo sie aus dem Körper heraustreten. Daraus folgt, daß die von hinten kommenden Feldlinien auseinanderweichen und in verkleinerter Anzahl durch den diamagnetischen oder schweren Körper hindurchgehen (Abb. 32B).

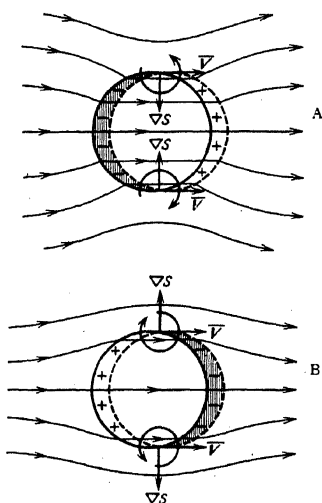



Abb. 32. Hydroparamagnetismus (A) und Hydrodiamagnetismus (B).

Man erkennt unmittelbar die Ursache dieser Erscheinungen im hydrodynamischen Fall: sie rühren von dem Trägheitsunterschied des Körpers und der Flüssigkeit her, der den leichteren Körper mehr beweglich und den schwereren weniger beweglich als die Flüssigkeit macht. Darauf beruht der Ursprung der freien hydromagnetischen Schicht auf der Oberfläche des leichten oder des schweren Körpers. Wenn der leichte Körper sich vorwärtsbewegt, verliert ein kleiner Raum auf der Vorderseite des Körpers Masse, während ein entsprechender Raum auf der Hinterseite Masse gewinnt. Wenn der schwere Körper sich vorwärtsbewegt, befindet sich der Raum, der Masse gewinnt, vorn, und der Raum, der Masse verliert, hinten.

Ehe wir die Divergenzen verlassen, betrachten wir noch die über einen ganzen Körper ausgedehnten Volumenintegrale der Expansionsgeschwindigkeiten $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ und der freien Massenausflüsse $\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{v}}$. Das erste Integral gibt, wie wir wissen, **5** (5), die kubische Expansionsgeschwindigkeit E des ganzen Körpers (wahre hydroelektrische Ladung). Das zweite gibt den gesamten Massenausfluß $\bar{E}$ aus dem Körper (freie hydroelektrische Ladung):

$$\int \operatorname{div}\boldsymbol{v}\, d\tau = E\,, \tag{6}$$

$$\int \operatorname{div}\bar{\boldsymbol{v}}\, d\tau = q_0 E = \frac{1}{s_0} E = \bar{E}\,. \tag{7}$$

Man verifiziert die letzte Formel leicht, indem man nach der Gaussschen Identität das Volumenintegral in ein Flächenintegral des Vektors $\bar{\boldsymbol{v}}$ transformiert, für den an der Grenzfläche $\bar{\boldsymbol{v}} = q_0 \boldsymbol{v}$ gilt.

Wir haben zuletzt den freien elektrischen Strom im Magnetfelde und das ihm entsprechende Wirbeln $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$ im hydrodynamischen Felde zu betrachten. Durch Wirbelableitung der Verbindungsgleichung **57** (4) ergibt sich:

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v} = \operatorname{curl}\boldsymbol{v}^* + \nabla s \times \bar{\boldsymbol{v}}\,. \tag{8}$$

Während die Gleichung (2) drei Ursachen für den freien Massenausfluß angab, gibt diese Gleichung nur zwei Ursachen für das Wirbeln, nämlich eingeprägte Geschwindigkeit und Heterogenität.

(I) Wir setzen das System homogen voraus: $\nabla s = 0$. Die Gleichung (8) reduziert sich dann auf:

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v} = \operatorname{curl}\boldsymbol{v}^* \tag{9}$$

Sie definiert eine freie hydroelektrische Stromverteilung, die der gegebenen Verteilung hydromagnetischer Magnetisierungsintensität äquivalent ist. Wenn man im magnetischen Fall die freien Ströme durch wahre Ströme ersetzt, kommt man zu der Ampèreschen Theorie des

Magnetismus. Die Wirbelröhren, die den freien elektrischen Strömen entsprechen, befinden sich an der Oberfläche des bewegten Körpers und umkreisen den Körper äquatorial mit der größten Intensität dort, wo das Gleiten des Körpers relativ zu der umgebenden Flüssigkeit am stärksten ist. Die wirkliche Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ der Flüssigkeitsteilchen bildet ein zirkulierendes Feld um diese Wirbelröhren.

(II) Wir setzen die erzwungene Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^* = 0$. Die Gleichung (8) reduziert sich dann auf:

$$\text{curl}\,\boldsymbol{v} = \nabla s \times \bar{\boldsymbol{v}}. \tag{10}$$

Diese Gleichung definiert die freien elektrischen Ströme, durch die man die Erscheinungen des induzierten Magnetismus beschreiben kann, und die entsprechende Wirbelbildung in der an der Flüssigkeit grenzenden Schicht leichter oder schwerer Körper. Die Wirbelbildung setzt in der Richtung von dem Volumenaszendenten ∇s zu der spez. Bewegungsgröße $\bar{\boldsymbol{v}}$ oder der entsprechenden Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ ein. Dies entspricht dem Vorwärtsgleiten (Abb. 32A) des leichteren Körpers durch die Flüssigkeit und dem Rückwärtsgleiten (Abb. 32B) des schwereren Körpers relativ zur Flüssigkeit.

59. Die Einführung eines homogenen Vergleichssystems. Wenn das System homogen ist, d. h. wenn $s = s_0$ und $\nabla s = 0$, verschwinden die von der Heterogenität herrührenden Glieder in den Gleichungen **58** (2) und (8). Dies ist eine wesentliche Vereinfachung. Denn die in diesen Gleichungen zurückbleibenden Glieder kann man dann direkt mit Hilfe der gegebenen Fundamentalgrößen $e = \text{div}\,\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}^*$ berechnen; man kennt die Divergenz und das Wirbeln eines jeden Feldvektors, und das Feld ist vollständig bekannt.

Gehen wir dagegen zu den allgemeinen heterogenen Systemen über, so komplizieren die von der Heterogenität herrührenden Glieder die Aufgabe, weil der gesuchte Feldvektor $\bar{\boldsymbol{v}}$ selbst in der Definition dieser Glieder vorkommt. Um so wichtiger ist es aber, daß wir die Eigenschaften des heterogenen Systems wenigstens diskutieren können, indem wir sie auf diejenigen eines gewissen homogenen Systems zurückführen.

Um dieses homogene Vergleichssystem zu definieren, behalten wir sämtliche Feldgleichungen **57** (1) bis (6) bei mit Ausnahme der Verbindungsgleichung (4), die wir durch die neue

$$\boldsymbol{v} = s_0 \bar{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}^{**} \tag{1}$$

ersetzen. Das heißt, in beiden Systemen haben wir identisch dasselbe Feld des Vektors $\boldsymbol{v}$ (Geschwindigkeit, elektrische Verschiebung, magnetische Induktion) und identisch dasselbe Feld des Vektors $\bar{\boldsymbol{v}}$ (freie spez. Bewegungsgröße, freie elektrische oder magnetische Feldstärke). Der

Unterschied reduziert sich darauf, daß die Körper im homogenen System die stoffliche Konstante s_0 statt s und den eingeprägten Vektor $\boldsymbol{v}^{**}$ statt $\boldsymbol{v}^*$ erhalten.

Bildet man die Divergenz der Gleichung (1), so ergibt sich:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = s_0 \operatorname{div}\bar{\boldsymbol{v}} + \operatorname{div}\boldsymbol{v}^{**}, \tag{2}$$

oder durch Auflösung nach $\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{v}}$:

$$\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{s_0}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \frac{1}{s_0}(-\operatorname{div}\boldsymbol{v}^{**}), \tag{3}$$

eine Gleichung, die wir auch abgekürzt

$$\bar{e} = \frac{e}{s_0} + \frac{e^*}{s_0} \tag{3'}$$

schreiben werden. Ähnlich findet man durch Wirbelableitung:

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{v} = \operatorname{curl}\boldsymbol{v}^{**}. \tag{4}$$

Für das homogene System treten also diese einfacheren Gleichungen an Stelle der früheren allgemeinen **58** (1), (2) und (8).

Will man aber jetzt diese einfacheren Formeln auf das heterogene System anwenden, so muß man die Relation benutzen, die zufolge der beiden Verbindungsgleichungen (1) und **57** (4) zwischen den Vektoren $\boldsymbol{v}^{**}$ und $\boldsymbol{v}^*$ besteht, nämlich:

$$\boldsymbol{v}^{**} = \boldsymbol{v}^* + (s - s_0)\bar{\boldsymbol{v}}. \tag{5}$$

Im magnetischen Falle nennt man diesen Vektor $\boldsymbol{v}^{**}$ die *Magnetisierungsintensität*, die im heterogenen System eine von der erzwungenen oder eingeprägten Induktion $\boldsymbol{v}^*$ völlig verschiedene Größe ist. Nur im homogenen System hat man die Identität $\boldsymbol{v}^{**} = \boldsymbol{v}^*$ zwischen Magnetisierungsintensität und erzwungener Induktion. Im hydrodynamischen System wollen wir $\boldsymbol{v}^{**}$ die *Aktionsgeschwindigkeit* nennen. Das Volumenintegral dieses Vektors über einen ganzen Körper

$$V^{**} = \int \boldsymbol{v}^{**}\, d\tau \tag{6}$$

heißt das *magnetische Moment* bzw. das *Aktionsmoment* des Körpers.

Die Aktionsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}^{**}$ besteht nach (5) aus einem eingeprägten Anteil, der eingeprägten Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^*$, und einem induzierten Anteil, der *induzierten Aktionsgeschwindigkeit:*

$$\ldots - s_0)\,\boldsymbol{v} = \frac{s - s_0}{s}(s\bar{\boldsymbol{v}}). \tag{7}$$

Der Faktor $(s - s_0)/s$ heißt in der Theorie des Magnetismus die *Magnetisierungszahl* oder die *magnetische Suszeptibilität*, und $\boldsymbol{v}_i^{**}$ ist die induzierte Magnetisierungsintensität. Je nachdem, ob $s \gtrless s_0$, d. h. ob der Körper leichter bzw. schwerer beweglich als die umgebende Flüssigkeit ist, ist die induzierte Aktionsgeschwindigkeit der induzierenden

freien Feldstärke v gleich oder entgegengesetzt gerichtet: der leicht bewegliche Körper verhält sich wie das Eisen mit seiner direkten Polarität, der schwere Körper wie das Wismut mit seiner inversen Polarität.

Wir kehren von der spezielleren Formel (7) zu der allgemeinen (5) zurück. Kommt dann nur der eine betrachtete Körper vor, so ist $\bar{v}$ die freie spez. Bewegungsgröße des eigenen Feldes des Körpers, und man hat die Erscheinung der *Selbstinduktion* im statisch magnetischen Sinne dieses Wortes. Das freie Feld $\bar{v}$ im Inneren des Körpers ist, wie schon früher entwickelt, der eingeprägten Geschwindigkeit v^* entgegengesetzt gerichtet. Das auf der Selbstinduktion beruhende Zusatzglied, das in (5) auftritt, ist also beim schwereren Körper ($s < s_0$) der eingeprägten Geschwindigkeit gleichgerichtet und beim leichteren Körper ($s > s_0$) der eingeprägten Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet.

Die reine Selbstinduktion tritt nur dann auf, wenn ein einziger Körper in der Flüssigkeit vorhanden ist. Sind mehrere Körper vorhanden, so hat man es gewöhnlich mit gleichzeitiger Selbst- und Fremdinduktion zu tun. Das induzierend wirkende Feld $\bar{v}$ läßt sich in zwei Teile zerlegen:

$$\bar{v} = \bar{v}_s + \bar{v}_f, \tag{8}$$

wo $\bar{v}_s$ von dem betrachteten Körper selbst, $\bar{v}_f$ von den fremden Körpern herrührt. Die Aktionsgeschwindigkeit zerlegt sich entsprechend:

$$\begin{aligned} v^{**} &= [v^* + (s - s_0)\,\bar{v}_s] + (s - s_0)\,\bar{v}_f \\ &= v_p^{**} + v_t^{**} \end{aligned} \tag{9}$$

Wenn wir die Terminologie des Magnetismus übernehmen, können wir

$$v_p^{**} = v^* + (s - s_0)\,\bar{v}_s \tag{10}$$

die *permanente* und

$$v_t^{**} = (s - s_0)\,\bar{v}_f \tag{11}$$

die *temporäre* Aktionsgeschwindigkeit nennen. Die permanente Aktionsgeschwindigkeit gehört dem Körper ebenso untrennbar an wie die eingeprägte Geschwindigkeit, während die temporäre nur vorübergehend auftritt, wenn sich fremde Körper in der Nähe befinden. Die Zerlegung ist im hydrodynamischen wie im magnetischen Fall wichtig, wenn wir zu den Kräften kommen, welche die Körper aufeinander ausüben.

60. Integraldarstellungen des Feldes. Nachdem wir die Divergenz und das Wirbeln der beiden Feldvektoren v und $\bar{v}$ kennengelernt haben, können wir die in Abschnitt **6** gegebenen Integraldarstellungen der Felder zur Anwendung bringen.

Der immer wirbelfreie Vektor $\bar{v}$ läßt sich als Funktion seiner Divergenz $\operatorname{div}\bar{v} = \bar{e}$ durch ein skalares Potential $\bar{\varphi}$ darstellen:

$$\bar{v} = -\nabla\bar{\varphi}, \qquad \text{wo} \qquad \bar{\varphi} = \int \frac{\bar{e}\, d\tau'}{4\pi r}. \tag{1}$$

Hier ist $\bar{e}$ als Funktion der Integrationsvariablen x', y', z' gegeben, während sich die Operation ∇' auf die Koordinaten x, y, z bezieht. Die Integration ist über alle Volumenelemente zu erstrecken, bei denen freie Massenausflüsse (freie Elektrizität, freier Magnetismus) $\bar{e}$ vorkommen. r ist der Abstand des Punktes x', y', z', wo das gegebene $\bar{e}$ auftritt, vom Punkte x, y, z, wo man den Wert von $\bar{\varphi}$ sucht. (1) gibt das anschauliche Bild des freien Feldes: es ist durch Zusammensetzung der elementaren Radialströme von allen Divergenzstellen entstanden.

Führen wir in das Integral (1) den Ausdruck **59** (3') der Divergenz $\bar{e}$ ein, so zerfällt das Potential in die Summe:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2, \tag{2}$$

wo die einzelnen Glieder durch die Integrale

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{s_0}\int \frac{e\,d\tau'}{4\pi r}, \qquad \bar{\varphi}_2 = \frac{1}{s_0}\int \frac{e^{**}\,d\tau'}{4\pi r} \tag{3}$$

dargestellt werden. Das erste hängt von der als gegeben angesehenen Größe e ab (Expansionsgeschwindigkeit, wahre Elektrizität oder Magnetismus) und kann ohne weiteres berechnet werden. Im zweiten Integral können wir $e^{**} = -\operatorname{div}\mathbf{v}^{**}$ einführen und die Transformationsformel **6** (3') benutzen. Wir finden es dann durch die Hilfsgröße $\mathbf{v}^{**}$ (Aktionsgeschwindigkeit, Magnetisierungsintensität) ausgedrückt:

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{1}{s_0}\int \mathbf{v}^{**}\cdot\nabla'\frac{1}{4\pi r}\,d\tau' = \frac{1}{s_0}\int \frac{\mathbf{v}^{**}\cdot\mathbf{r}}{4\pi r^3}\,d\tau'. \tag{4}$$

Im Falle der Homogenität ist die Hilfsgröße $\mathbf{v}^{**}$ mit der Fundamentalgröße $\mathbf{v}^{*}$ identisch, und das Integral läßt sich ermitteln. Im allgemeinen Falle behält aber die Größe $\mathbf{v}^{**}$ ihre zusammengesetzte Natur und ist weiter in seinen eingeprägten und induzierten oder in seinen permanenten und temporären Teil zerlegbar. Das von der Heterogenität Abhängige bleibt aber dabei unbekannt. Da aber das Integral dieselbe Form behält wie im Falle der Homogenität, bleiben uns die dargestellten Felderscheinungen implizite bekannt.

Der Vektor $\mathbf{v}$ hat sowohl Divergenzen als Wirbel und wird in der Form

$$\mathbf{v} = -\nabla\varphi + \operatorname{curl}\boldsymbol{\psi} \tag{5}$$

durch ein skalares und ein vektorielles Potential dargestellt. Hier läßt sich das skalare Potential φ als Funktion der Fundamentalgröße $\operatorname{div}\mathbf{v}$ berechnen. Da dies Integral sich nur um den konstanten Faktor s_0 von dem ersten Integral (3) unterscheidet, brauchen wir uns nicht weiter mit demselben zu befassen. Wir denken uns dieses divergierende, von den Volumenänderungen abhängige Partialfeld $\mathbf{v}_1 = -\nabla\varphi$ abgeschieden oder nicht existierend und betrachten nur das solenoidale Partialfeld:

$$\mathbf{v} = \operatorname{curl}\boldsymbol{\psi}, \quad \text{wo} \quad \boldsymbol{\psi} = \int \frac{\mathbf{c}\,d\tau'}{4\pi r}, \tag{6}$$

und wo $\mathfrak{c} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}$ hydrodynamisch das Wirbeln in der ursprünglichen kinematischen Bedeutung dieses Wortes ist und magnetisch die freie elektrische Stromdichte darstellt. Gleichung (6) gibt, wie in Abschnitt **6** entwickelt, die Darstellung des Geschwindigkeitsfeldes als Resultat der zirkulierenden Bewegungen um alle elementaren Wirbelröhren des Feldes und das Feld der magnetischen Induktion als Resultat der Elementarfelder, die den elementaren freien elektrischen Strömen angehören. Denkt man sich diese freien Ströme durch die entsprechenden wahren ersetzt, so hat man ein magnetisches System nach der AMPÈREschen Theorie.

Die im Integral (6) enthaltene Größe $\mathfrak{c} = \operatorname{curl}\mathfrak{v}$ läßt sich aber nach **58** (8) nur im Homogenitätsfall durch die gegebene Fundamentalgröße $\mathfrak{v}^*$ darstellen, so daß man das Integral auswerten kann. Weil aber das Integral im Heterogenitätsfall dieselbe Form behält, kann es zur qualitativen Diskussion dienen. Es ist deshalb in diesem wie in dem vorhergehenden Fall notwendig, zu unterscheiden zwischen dem Fall der Heterogenität, wo wir zwar die Integraldarstellungen des Feldes aufschreiben und diskutieren, nicht aber die fraglichen Integrale explizite berechnen können, und dem Fall der Homogenität, wo auch die explizite Berechnung gelingt.

Um schließlich auf die hydrodynamischen Probleme hinzuweisen, die durch unsere Formeln unmittelbar lösbar sind, sehen wir von dem Fall der nur momentanen Homogenität ab, der während einer mit Volumenänderung verbundenen Bewegung als vorübergehender Momentanzustand auftreten kann, und beschränken uns auf die dauernde Homogenität, die mit Inkompressibilität

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 \tag{7}$$

verbunden ist. Auf diesen Fall bezieht sich dann das Integral (4), wo wir jetzt den konstanten Faktor s_0 fortmultiplizieren und von dem Potential der spez. Bewegungsgröße $\bar{\varphi}$ zu dem der Geschwindigkeit $\varphi = s_0\bar{\varphi}$ übergehen können. Dieses Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \int \mathfrak{v}^* \cdot \nabla' \frac{1}{4\pi r}\, d\tau' \tag{8}$$

gibt dann die Lösung des folgenden Problems: *Die Geschwindigkeitsverteilung zu bestimmen, die in einer homogenen und inkompressiblen Flüssigkeit entsteht, wenn man den Teilchen beliebig begrenzter Massen der Flüssigkeit die beliebigen Momentanimpulse $\mathfrak{v}^*$ pro Masseneinheit erteilt.* Die Lösung findet man, indem man mit Hilfe des gegebenen Vektors $\mathfrak{v}^*$ das Potential (8) berechnet. Der Potentialgradient $\mathfrak{v} = -\nabla\varphi$ gibt dar[illegible]ie Geschwindigkeit außerhalb der begrenzten Massen, die die Im[illegible] erhalten haben, und $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}^* - \nabla\varphi$ gibt die Geschwindigkeit

innerhalb dieser Massen. Das Feld ist identisch mit dem Felde der magnetischen Induktion, das in einem magnetisch homogenen System durch die Magnetisierungsintensitäten (erzwungenen Magnetisierungen) $\boldsymbol{v}^*$ erzeugt wird. Das gelöste Problem hat große Allgemeinheit, weil die Anzahl, die Form und die Verteilung der begrenzten Massen ebenso wie die Verteilung der Impulse $\boldsymbol{v}^*$ auf diese Massen ganz beliebig sind. Wie aber die Bewegung nach dem Ablauf der Impulsperiode weiter verläuft, ist eine Aufgabe für sich, die wir nur in speziellen Fällen lösen können.

Eine andere Lösung desselben Problems gibt das Integral (6). Denn im Homogenitätsfall hat man $\boldsymbol{c} = \operatorname{curl} \boldsymbol{v}^*$. Wenn die Impulse pro Masseneinheit $\boldsymbol{v}^*$ gegeben sind, ist also die Größe unter dem Integralzeichen (6) bekannt und das Integral läßt sich berechnen, wonach $\boldsymbol{v} = \operatorname{curl} \boldsymbol{\psi}$ die erzeugte Geschwindigkeit gibt, sowohl in der umgebenden Flüssigkeit wie innerhalb der flüssigen Körper, deren Teilchen die Impulse erhalten haben.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo man dem flüssigen Körper die Form einer dünnen Schicht der Dicke dn gibt und diese Schicht in Bewegung setzt durch Impulse $\boldsymbol{v}^*$, die längs der Normalen der Schicht gerichtet und deren Dicke umgekehrt proportional sind. Der Körper entspricht dann einer magnetischen Lamelle oder Doppelschicht der Stärke $i = \boldsymbol{v}^* \cdot dn$ und das Volumenintegral (8) läßt sich als ein Flächenintegral schreiben:

$$\varphi = i \int \frac{\boldsymbol{r} \cdot d\sigma}{4\pi r^3} = i \int \frac{\cos\theta \, d\sigma}{4\pi r^2} = i \frac{\Omega}{4\pi}. \tag{9}$$

Im zweiten Ausdruck bedeutet θ den Winkel, den der Radiusvektor von x, y, z mit der Normalen der Doppelschicht bildet, und Ω den Raumwinkel, unter dem man vom Punkte x, y, z aus die Kontur der Schicht sieht. Dieser Raumwinkel hängt nur von der Randkurve ab und ist von dem übrigen Verlaufe der Schicht unabhängig. Im doppelt zusammenhängenden Raum, der diese Randkurve umgibt, ist dieser Raumwinkel ein mehrdeutiger Skalar mit der zyklischen Konstanten 4π. Das Linienintegral des Vektors $\boldsymbol{v}$ längs einer Kurve in der Grundflüssigkeit von der positiven zur negativen Seite der Schicht genommen, ergibt den Wert i der Intensität der Schicht:

$$\int \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = i. \tag{10}$$

Der Wert dieses Integrales ändert sich nicht, wenn die Dicke der Schicht verschwindet, so daß die Schicht in eine Fläche der Flüssigkeit übergeht, die Momentanimpulse des Betrages i pro Flächeneinheit erhalten hat. (9) stellt dann das mehrdeutige skalare Potential des zirkulierenden Ge-

schwindigkeitsfeldes um die am Rande der Fläche gebildete infinitesimale Wirbelröhre der Wirbelstärke i dar.

Von der Vektorpotentialdarstellung (6) des Feldes ausgehend kann man denselben Übergang zu einem schichtförmigen Körper vornehmen und schließlich die Dicke der Schicht verschwinden lassen. Man gelangt dann zu dem Vektorpotential:

$$\psi = i \int \frac{d\boldsymbol{r}}{4\pi r}, \tag{11}$$

wo i die Wirbelstärke einer elementaren Wirbelröhre ist, welche der Randkurve der Fläche folgt, und $d\boldsymbol{r}$ das Vektorlinienelement dieser Randkurve. Hat man der Fläche den Impuls pro Flächeneinheit i gegeben, so stellt $\boldsymbol{v} = \operatorname{curl} \psi$ das erzeugte zirkulierende Geschwindigkeitsfeld um die am Rande der Fläche gebildete elementare Wirbelröhre dar:

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{curl} \psi = i \int d\boldsymbol{r} \times \nabla \frac{1}{4\pi r}. \tag{12}$$

(11) ist gleichzeitig das Vektorpotential und (12) das magnetische Feld, das einen linearen elektrischen Strom der Stromstärke i umgibt.

Das oben Entwickelte gibt — mit einigem Vorbehalt — die Theorie eines bekannten einfachen Versuches: man steckt das Blatt eines Löffels zur Hälfte in die Flüssigkeit, macht einen Ruck und zieht den Löffel heraus, wonach man an der Oberfläche zwei wandernde Vertiefungen sieht, die Wirbeltrichter, die sich dort bilden, wo der am Rande des Löffels gebildete Halbwirbel an der Oberfläche endet.

61. Die Felder im großen Abstand von den wirkenden Körpern. Es ist von Wichtigkeit, daß die Integrale, welche die Potentiale darstellen, in hinlänglich großen Abständen von den Körpern ausgeführt werden können. Wenn der Abstand des Punktes x, y, z vom Körper groß ist im Vergleich zu den Dimensionen des Körpers, so ist nämlich der Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ während der Integration nach x', y', z' eine schwach veränderliche Größe, von der ein Mittelwert vor das Integralzeichen treten kann. Das Integral **60** (1) wird dann unter Berücksichtigung von **58** (7):

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{1}{s_0} \frac{E}{4\pi r}. \tag{1}$$

Hier ist E im elektrischen Falle die totale Ladung des ganzen Körpers oder des gesamten Systems von Körpern und hydrodynamisch die totale Volumenänderungsgeschwindigkeit des Körpers oder des Systems von Körpern. In genügend großem Abstande geht folglich das Feld in ein reines umgekehrt quadratisch abnehmendes Radialfeld über, sofern überhaupt eine Ladung oder eine Volumenänderungsgeschwindigkeit des Gesamtsystems vorhanden ist.

Ähnlich findet man von dem Integral **60** (4) aus, unter Beachtung von **59** (6):

$$(2) \qquad \bar{\varphi}_2 = \frac{1}{4\pi s_0} \boldsymbol{V}^{**} \cdot \nabla' \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi s_0} \frac{\boldsymbol{V}^{**} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Das Feld in genügend großem Abstand hängt hier nur vom Aktionsmoment bzw. vom magnetischen Moment des Körpers oder des Systems von Körpern ab. Da dieses Potential schneller mit dem Abstande abnimmt als das von der Volumenänderung oder der Ladung abhängige, muß es gegenüber dem letzteren in hinlänglich großem Abstande verschwinden, wenn überhaupt eine Ladung oder eine Volumenänderung vorliegt.

Die auf der Volumenänderung beruhenden Radialfelder erweisen sich also als besonders wichtig, und zwar um so mehr, als wir auch die auf Aktionsmomenten beruhenden Felder auf elementare Radialfelder zurückführen können. Mathematisch geschieht es durch die Transformation des Integrales **60** (4) in das zweite Integral **60** (3). Die physikalische Bedeutung dieser Transformation erkennt man folgendermaßen: Es seien nur zwei Körper 1 und 2 vorhanden, von denen der erste sich ebenso schnell ausdehnt, wie sich der zweite zusammenzieht. Das Feld hat dann den Charakter eines allgemeinen Überströmens von dem expandierenden zu dem kontrahierenden Körper, und zwar längs Kurven, die man durch den bekannten Versuch mit Eisenfeilspänen zwischen einem positiven und einem negativen Magnetpol sichtbar machen kann. Das Potential dieses Feldes ist:

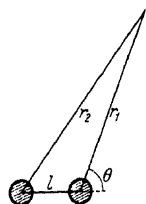



Abb. 33. Hydromagnetischer Dipol.

$$(3) \qquad \bar{\varphi}_2 = \frac{E}{4\pi s_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Sind nun die Abstände r_1 und r_2 groß im Verhältnis zu dem gegenseitigen Abstand $l = r_{12}$ der Körper und ist θ der Winkel, den die angenähert parallelen Geraden r_1 oder r_2 mit l bilden (Abb. 33), so hat man, wenn man nur Größen erster Ordnung berücksichtigt, $r_2 = r_1 + l\cos\theta$. Dies setzt man in (3) ein, entwickelt und vernachlässigt Größen höherer Ordnung. Führt man dann die Bezeichnung

$$(4) \qquad V^{**} = El$$

ein, so nimmt das Potential (3) die Form

$$(5) \qquad \bar{\varphi}_2 = \frac{1}{4\pi s_0} \frac{V^{**}}{r^2} \cos\theta$$

an. Ist $\boldsymbol{V}^{**}$ ein Vektor vom Zahlenwert (4) und mit der Richtung vom kontrahierenden zum expandierenden Körper, so können wir (5) auch in der Form

$$(6) \qquad \bar{\varphi}_2 = \frac{1}{4\pi s_0} \frac{\boldsymbol{V}^{**} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi s_0} \boldsymbol{V}^{**} \cdot \nabla' \frac{1}{r} = -\frac{1}{4\pi s_0} \boldsymbol{V}^{**} \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

schreiben. In bezug auf das erzeugte äußere Feld besteht also volle Äquivalenz zwischen einem hydrodynamischen Dipol, bestehend aus einem expandierenden und einem kontrahierenden Körper und einem Körper, der sein Volumen nicht ändert, sondern dafür ein Aktionsmoment besitzt. Die Ausdrücke (6) haben genau die Form des Integranden in **60** (4).

Wir können aber noch einen Schritt weiter gehen, um den vollständigen Zusammenhang zwischen Aktionsmomentvorstellung und Dipolvorstellung zu erkennen. Wir geben dazu den beiden volumenändernden Körpern die Form unendlich dünner paralleler Scheiben (Abb. 34), welche die Endflächen eines flachzylindrischen Volumenelementes von der Grundfläche G und der Höhe L bilden. Die Dicke der einen Endscheibe nimmt mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^{**}$ zu, die Dicke der anderen nimmt mit derselben Geschwindigkeit ab. Die vordere Scheibe hat dann die Expansionsgeschwindigkeit $E = Gv^{**}$, die hintere hat die gleiche Kontraktionsgeschwindigkeit. Das Aktionsmoment dieses Dipolsystems wird dann entsprechend der Definition (4):

$$V^{**} = GL\boldsymbol{v}^{**}. \tag{7}$$

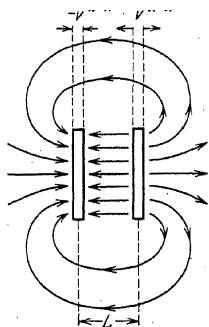



Abb. 34. Dynamik der Dipolsbildung.

Die Verbindung dieser Definition des Aktionsmomentes mit der früheren Impulsdefinition läßt sich leicht herstellen. Wir können das ganze Volumenelement zwischen den beiden Scheiben als einen Körper auffassen, und zwar vom Volumen GL, indem wir die Volumina der beiden Scheiben als verschwindend vernachlässigen. Die Gesamtmasse des Volumenelementes hat relativ zur Vorderfläche der vorderen Scheibe und der Hinterfläche der hinteren Scheibe die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^{**}$. Nehmen wir aber jetzt die Volumenänderungsgeschwindigkeiten der beiden Scheiben als verschwindend an und geben wir dafür der Masse des Volumenelementes einen Vorwärtsimpuls vom Betrage $\boldsymbol{v}^{**}$ pro Masseneinheit, so ist $\boldsymbol{v}^{**}$ die Aktionsgeschwindigkeit und (7) das Aktionsmoment nach der alten Impulsdefinition. Die Bedeutung des inneren rückwärts gerichteten freien Feldes — hier ursprünglich durch Volumenänderung erzeugt — tritt gleichzeitig klar zutage.

An die hier gegebenen Entwicklungen knüpft sich ein spezielles Interesse insofern an, als sie einen Weg zeigen, die Theorie hydrodynamischer Felder durch elementare Überlegungen aufzubauen, ähnlich denen, durch die man die Theorie der elektrostatischen oder magnetischen Felder entwickelt. Dies ist sehr bemerkenswert, wenn man sich der großen Schwierigkeit der Lösung der hydrodynamischen Gleichungen erinnert.

62. Die Feldkraft. In den hydrodynamischen Feldern wirkt pro Volumeneinheit die Feldkraft **57** (7):

$$(1) \qquad \mathfrak{f} = -\bar{\mathfrak{v}} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \nabla \mathfrak{v}^* \cdot \bar{\mathfrak{v}} + \tfrac{1}{2} \bar{\mathfrak{v}}^2 \nabla s .$$

Durch Integration dieses Ausdruckes über das ganze Volumen eines Körpers ergibt sich die resultierende Kraft auf den ganzen Körper. Die Integrale kann man in verschiedener Weise transformieren. In den transformierten Integralen stellt dann die Größe unter dem Integralzeichen eine Elementarkraft dar, die, was die resultierende Wirkung betrifft, mit der Elementarkraft (1) äquivalent ist. In dieser Weise kann man unendlich viele verschiedene Verteilungen der Kräfte auf die Volumenelemente geben, welche in ihrer Wirkung auf den ganzen Körper dieselbe Resultierende ergeben. Wir werden die wichtigsten dieser *äquivalenten* Systeme von Elementarkräften entwickeln.

Zunächst können wir das letzte Glied (1) auch in der Form $\frac{1}{2}\bar{\mathfrak{v}}^2 \nabla(s - s_0)$ schreiben, und aus diesem Glied und dem vorletzten können wir dann ein potentielles Glied ausscheiden, so daß die beiden letzten Glieder (1) die Form

$$\nabla(\mathfrak{v}^* \cdot \bar{\mathfrak{v}} + \tfrac{1}{2}(s - s_0)\bar{\mathfrak{v}}^2) - \nabla \bar{\mathfrak{v}} \cdot \mathfrak{v}^* - \nabla \bar{\mathfrak{v}} \cdot \bar{\mathfrak{v}}(s - s_0)$$

annehmen. Das potentielle Glied hat aber an der Oberfläche des Körpers den konstanten Wert Null, weil hier $\mathfrak{v}^* = 0$ und $s - s_0 = 0$. Das Integral dieses potentiellen Vektors wird deshalb nach **6** (5′) für die resultierende Kraft belanglos. Die beiden nichtpotentiellen Glieder lassen sich nach der Definition **59** (5) der Aktionsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}^{**}$ zu dem einen Gliede $-\nabla \bar{\mathfrak{v}} \cdot \mathfrak{v}^{**}$ zusammenziehen, und man findet

$$(2) \qquad \mathfrak{f} = -\bar{\mathfrak{v}} \operatorname{div} \mathfrak{v} - \nabla \bar{\mathfrak{v}} \cdot \mathfrak{v}^{**}$$

als eine neue Elementarkraft, die, über das ganze Volumen des Körpers integriert, dieselbe Resultierende wie (1) liefert und die jetzt durch dieselben beiden Größen $\operatorname{div} \mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}^{**}$ dargestellt ist, die wir oben zur Darstellung des von einem Körper erzeugten Feldes benutzt haben.

Wegen der potentiellen Natur von $\bar{\mathfrak{v}}$ läßt sich nach **11** (5) das letzte Glied von (2) auch $-\mathfrak{v}^{**} \cdot \nabla \bar{\mathfrak{v}}$ schreiben, und da hier $\mathfrak{v}^{**}$ ein Vektor ist, der an der Grenzfläche verschwindet, können wir nach **11** (19) das Integral von $-\mathfrak{v}^{**} \cdot \nabla \bar{\mathfrak{v}}$ durch das Integral von $\bar{\mathfrak{v}} \operatorname{div} \mathfrak{v}^{**}$ ersetzen. Es ist folglich

$$(3) \qquad \mathfrak{f} = -\bar{\mathfrak{v}} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{v}} \operatorname{div} \mathfrak{v}^{**}$$

ein weiterer äquivalenter Ausdruck für die Elementarkraft.

Aus der Gleichung **59** (1) folgt aber $\operatorname{div} \mathfrak{v}^{**} = \operatorname{div} \mathfrak{v} - s_0 \operatorname{div} \bar{\mathfrak{v}}$. Dies gibt, in (3) eingeführt, die einfache Form:

$$(4) \qquad \mathfrak{f} = -s_0 \bar{\mathfrak{v}} \operatorname{div} \bar{\mathfrak{v}} = -s_0 \bar{\mathfrak{v}} \bar{e},$$

wo die Elementarkraft einheitlich durch die Größe $\operatorname{div} \bar{\mathfrak{v}} = \bar{e}$ ausgedrückt ist, durch die wir auch das Feld darstellen können.

Im Anschluß an (2) läßt sich noch eine interessante Form ableiten. Aus dem letzten Gliede $-\nabla\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}^{**}$ können wir den potentiellen Anteil $-\nabla(\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}^{**})$ als belanglos fortlassen, weil an der Grenzfläche $\boldsymbol{v}^{**}$ gleich Null ist. Im übrigbleibenden Glied $\nabla\boldsymbol{v}^{**}\cdot\bar{\boldsymbol{v}}$ können wir $\bar{\boldsymbol{v}} = q_0\boldsymbol{v} - q_0\boldsymbol{v}^{**}$ einführen, wodurch wir die zwei Glieder $q_0\nabla\boldsymbol{v}^{**}\cdot\boldsymbol{v} - q_0\nabla\boldsymbol{v}^{**}\cdot\boldsymbol{v}^{**}$ erhalten. Das letztere dieser beiden Glieder ist jedoch potentiell mit dem Potential Null an der Oberfläche und kann fortgelassen werden, so daß man (2) durch die äquivalente Elementarkraft

$$\boldsymbol{f} = -\bar{\boldsymbol{v}}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + q_0\nabla\boldsymbol{v}^{**}\cdot\boldsymbol{v}$$

ersetzen kann. Das Integral des letzten Gliedes können wir aber nach dem Integralsatz **11** (20) durch das Integral von $-q_0\boldsymbol{v}^{**}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + q_0\boldsymbol{v}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{v}^{**}$ ersetzen, so daß sich

$$\boldsymbol{f} = -(\bar{\boldsymbol{v}} + q_0\boldsymbol{v}^{**})\operatorname{div}\boldsymbol{v} + q_0\boldsymbol{v}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{v}^{**}$$

ergibt oder durch Anwendung von **59** (1) und (4):

$$(5)\qquad \boldsymbol{f} = -q_0\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v} + q_0\boldsymbol{v}\times\operatorname{curl}\boldsymbol{v},$$

wo die äquivalente Elementarkraft durch dieselben Größen $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ und $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$ ausgedrückt ist, mit denen wir in **60** (5) und (6) das Feld dargestellt haben.

Der Vergleich dieser letzten Formel mit irgendeiner der vorhergehenden zeigt deutlich, wie verschieden die Elementarkräfte sein können, welche in ihrer Wirkung auf einen ganzen Körper dieselbe Resultierende ergeben. Im Inneren eines Körpers ist die Kraft auf ein volumenänderndes Teilchen nach (5) $-q_0\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{v}$, und nach (1) $-\bar{\boldsymbol{v}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}$, welches Kräfte entgegengesetzter Richtung sind in dem gewöhnlich vorliegenden Falle, wo $\boldsymbol{v}$ und $\bar{\boldsymbol{v}}$ im Inneren des Körpers entgegengesetzte Richtungen haben. Dennoch ergibt sich aber bei der Integration über den ganzen Körper dieselbe Resultierende.

63. Scheinbare Fernkräfte. Gegenwirkungsprinzip. Die Tatsache, daß man die resultierenden Kräfte durch dieselben charakteristischen Größen ausdrücken kann, durch die man auch die Felder darstellt, hat eine wichtige Folge. Nach **62** (4) drückt sich z. B. die Resultierende auf einen ganzen Körper durch das Integral

$$(1)\qquad \boldsymbol{f} = -s_0\int\bar{\boldsymbol{v}}\,\bar{e}\,d\tau$$

aus, wo die Integration nach den Variablen x, y, z über alle Elemente des Körpers zu erstrecken ist, von denen ein Massenausfluß $\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{e}$ stattfindet. Für $\bar{\boldsymbol{v}}$ haben wir aber nach **60** (1):

$$\bar{\boldsymbol{v}} = -\nabla\bar{\varphi} = -\int\bar{e}'\nabla\frac{1}{4\pi r}\,d\tau',$$

wo die Integration auf alle Stellen des Massenausflusses im ganzen Felde $\bar{e}'(x', y', z')$ auszudehnen ist, wobei jetzt die Koordinaten x', y', z' die Integrationsvariablen sind. Durch Einsetzen in (1) ergibt sich:

$$(2) \qquad \mathfrak{f} = s_0 \int \bar{e}\,\bar{e}'\,\nabla \frac{1}{4\pi r}\,d\tau\,d\tau',$$

wo die Integration nach den Koordinaten x', y', z' über alle Stellen des Feldes zu erstrecken ist, wo felderzeugende Massenausflüsse $\bar{e}'$ vorkommen und die Integration nach den Koordinaten x, y, z über alle Teilchen desjenigen Körpers, auf den die Kraft wirkt.

Ist jetzt nur ein einziger Körper vorhanden, so stellt (2) die resultierende Kraft dar, welche der Körper auf sich selbst ausübt. Dabei tritt jedes Element des Körpers einmal als $d\tau$ und einmal als $d\tau'$ auf. Die Formel (2) ist nun, wie man sieht, vollständig symmetrisch in bezug auf die felderzeugenden und die der Feldkraft unterworfenen Massenausflüsse. Vertauscht man $\bar{e}$ und $\bar{e}'$ miteinander, so ist der einzige Unterschied der, daß man gleichzeitig ∇ mit ∇' zu vertauschen hat. Dies gibt aber nach **6** (14) nur eine Änderung des Vorzeichens der Kraft. Die Resultierende des Körpers auf sich selbst läßt sich mit anderen Worten durch ein System von scheinbaren Fernwirkungen unter den Elementen der Körper darstellen, für die das Gegenwirkungsprinzip gültig ist. Die resultierende Kraft eines Körpers auf sich selbst ist also Null.

Sodann können wir das System als aus mehreren getrennten Körpern bestehend ansehen. Das Integral (2) für die Resultierende, die das ganze System auf sich selbst ausübt, verschwindet und läßt sich in eine Anzahl von Integralen auflösen, die in zwei Klassen zerfallen:

1. Integrale, welche die Wirkung jedes einzelnen Körpers auf sich selbst darstellen und deren jedes für sich Null ist, und

2. je zwei einander entsprechende Integrale, welche die Wirkung eines Körpers A auf einen Körper B und die Rückwirkung des Körpers B auf den Körper A ausdrücken und die eine entgegengesetzt gleiche Resultierende für diese Wirkung ergeben. Wir finden das fundamentale Resultat:

Für die aus der hydrodynamischen Feldkraft hervorgehenden scheinbaren Fernkräfte zwischen den Körpern des Systems ist das Prinzip von der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gültig.

Dies darf keineswegs als a priori einleuchtend angesehen werden. Das Prinzip von der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gilt erfahrungsgemäß bei der unmittelbaren Berührung zweier Körper, und es wird axiomatisch auf die Kräfte der NEWTONschen Fernwirkungsmechanik übertragen. Für die durch Zwischenglieder übertragenen scheinbaren Fernwirkungen von einem Körper A auf einen Körper B gilt es dagegen im allgemeinen nicht. Man erkennt dies sofort, wenn man

die vollständige Wirkung betrachtet, die durch die Flüssigkeit von dem einen dieser Körper auf den anderen übertragen wird. Diese vollständige Wirkung haben wir in zwei Teile zerlegt. Der erste ist die induzierende oder feldbildende Wirkung: das Feld, mit dem sich der Körper A umgibt, erstreckt sich auch in das Innere des Körpers B; und das Feld, mit dem sich der Körper B umgibt, erstreckt sich auch in das Innere des Körpers A. Bei dieser induzierenden oder feldbildenden Fernwirkung haben Wirkung und Gegenwirkung überhaupt nichts miteinander zu tun. Diese induzierende Wirkung ist gewöhnlich die überwiegende, aber nicht die vollständige Fernwirkung. Es ist noch eine Restwirkung da, welche die hydrodynamische Feldkraft darstellt, und für diese Restwirkung gilt, wie wir gesehen haben, das Gegenwirkungsprinzip.

64. Die einfachsten Fernwirkungsformeln. Die Gültigkeit des Gegenwirkungsprinzips ist nicht nur prinzipiell, sondern auch praktisch wichtig. Es gestattet uns, die Berechnung der resultierenden Kräfte auf einen Körper erheblich zu vereinfachen, da wir von den scheinbaren Wechselwirkungen der Teilchen des Körpers selbst absehen können. Wir werden dies in Verbindung mit der Formel **62** (2) durchführen. Durch Anwendung der Gleichung **11** (5) können wir diese Formel

$$\mathbf{f} = -\bar{\mathbf{v}} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v}^{**} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}$$

schreiben. Indem wir die Aktionsgeschwindigkeit $\mathbf{v}^{**}$ nach **59** (9) in ihren permanenten und temporären Teil zerlegen, ergibt sich:

$$\mathbf{f} = -\bar{\mathbf{v}} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v}_p^{**} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} - (s - s_0)\, \bar{\mathbf{v}}_f \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}. \tag{1}$$

Wenn wir diese Formel über das ganze Volumen des Körpers integrieren, können wir von demjenigen Anteil der freien spez. Bewegungsgröße $\bar{\mathbf{v}}$ absehen, der von den freien Massenausflüssen des Körpers selbst herrührt. Das gelingt ohne weiteres in den beiden ersten Gliedern: das hier explizite auftretende $\bar{\mathbf{v}}$ brauchen wir nur als das $\bar{\mathbf{v}}$ des äußeren Feldes zu interpretieren, das vorhanden war, ehe der Körper hineingebracht wurde. Denn hier ist der andere Faktor, nämlich $\operatorname{div} \mathbf{v}$ und $\mathbf{v}_p^{**}$, von diesem $\bar{\mathbf{v}}$ des äußeren Feldes unabhängig. Im dritten Gliede ist dagegen $\bar{\mathbf{v}}_f$ von diesem äußeren Felde $\bar{\mathbf{v}}$ erzeugt. Es besteht zwischen $\bar{\mathbf{v}}_f$ und $\bar{\mathbf{v}}$ eine Proportionalität mit einem Proportionalitätsfaktor, den man nur in jedem einzelnen Fall als Funktion der gegebenen geometrischen Verhältnisse bestimmen kann. Vorläufig setzen wir in (1) mit einem unbestimmten Proportionalitätsfaktor: $\bar{\mathbf{v}}_f = k\bar{\mathbf{v}}$. Die Elementarkraft $\mathbf{f}$ nimmt dadurch die Form

$$\mathbf{f} = -\bar{\mathbf{v}} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v}_p^{**} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} - (s - s_0)\, k \nabla (\tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{v}}^2) \tag{2}$$

an, wo jetzt in allen Gliedern $\bar{\mathbf{v}}$ die freie spez. Bewegungsgröße des äußeren Feldes bedeutet.

Um uns über die entsprechenden resultierenden Kräfte unter den einfachsten Verhältnissen zu orientieren, machen wir jetzt einfache Voraussetzungen über das äußere Feld: wir nehmen an, daß die Größen $\bar{\boldsymbol{v}}$ und $\nabla \bar{\boldsymbol{v}}$, und damit auch $\nabla(\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^2)$, innerhalb des von dem Körper eingenommenen Raumes schwach veränderliche Größen sind, so daß passende Mittelwerte dieser Größen vor das Integralzeichen treten. Unter Berücksichtigung von **58** (6) und **59** (6) ergibt sich dann für die resultierende Kraft auf den ganzen Körper:

$$\boldsymbol{F} = -E\bar{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{V}_p^{**} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}} - (s - s_0)\, k S \nabla(\tfrac{1}{2}\bar{\boldsymbol{v}}^2), \tag{3}$$

wo S das Volumen des Körpers bedeutet. Indem wir $\bar{\boldsymbol{v}}$ durch $-\nabla\bar{\varphi}$ ersetzen, finden wir:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla \Psi, \tag{4}$$

wo das Potential den Wert

$$\Psi = -E\bar{\varphi} + \boldsymbol{V}_p^{**} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} + \tfrac{1}{2}(s - s_0)\,\bar{\boldsymbol{v}}^2 k S \tag{5}$$

hat. Wir wollen die wichtigsten Spezialfälle dieser Kraft betrachten.

1. *Auf Volumenänderung beruhende resultierende Kraft.* Ist das äußere Feld eine reine Parallelströmung mit der räumlich konstanten spez. Bewegungsgröße $\bar{\boldsymbol{v}}$, so verschwinden die beiden von der Veränderlichkeit des Feldes abhängigen Glieder, und die Kraft (3) reduziert sich auf:

$$\boldsymbol{F} = -E\bar{\boldsymbol{v}} = -\frac{1}{s_0} E \boldsymbol{v}, \tag{6}$$

die vom Potential

$$\Psi = -E\bar{\varphi} = -\frac{1}{s_0} E \varphi \tag{7}$$

abhängt. Also:

Ein Körper mit der Expansionsgeschwindigkeit E in einer Strömung der spez. Bewegungsgröße $\bar{\boldsymbol{v}}$ erfährt eine Kraft, die gleich dem negativen Produkt von Expansionsgeschwindigkeit und spez. Bewegungsgröße ist.

Entsprechend erleidet ein Körper der elektrischen Ladung E in einem Felde der Feldstärke $\bar{\boldsymbol{v}}$ eine Kraft gleich dem *positiven* Produkt von Ladung und Feldstärke. Der positiv geladene Körper erfährt also eine Kraft *in*, der negativ geladene *entgegen* der Feldrichtung, der expandierende Körper erleidet eine Kraft *entgegen*, der kontrahierende eine Kraft *in* der Stromrichtung.

Setzen wir in (7) den Ausdruck **61** (1) des Potentiales $\bar{\varphi}$ ein, so ergibt sich für die gegenseitige Wechselwirkung zweier volumenändernder Körper das Potential:

$$\Psi = -\frac{1}{s_0} \cdot \frac{EE'}{4\pi r} \tag{8}$$

Wenn man solche Anordnungen trifft, daß E und E' den trägen Massen der beiden Körper proportional sind, so stellt (8) eine Massenanziehung

analog der NEWTONschen dar. Kommen beide Vorzeichen der Größen E und E' vor, so entspricht (8), abgesehen vom Vorzeichen, dem COULOMBschen Gesetze für die Anziehung oder Abstoßung elektrisch geladener Körper oder magnetischer Pole.

2. *Auf erzwungener Bewegung beruhende Kraft.* Hat der Körper unveränderliches Volumen, jedoch ein Aktionsmoment, so verschwindet das erste Glied (5), während das zweite bestehen bleibt. Das dritte Glied verschwindet bei Homogenität und ist auch im Falle der Heterogenität meistens klein im Vergleich mit einem von einem permanenten Aktionsmoment herrührenden Glied. Auf den Körper mit dem permanenten Aktionsmoment $\boldsymbol{V}_p^{**}$ wirkt dann die Kraft:

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{V}_p^{**} \cdot \nabla \bar{\boldsymbol{v}}, \tag{9}$$

die entgegengesetzt gleich ist der Kraft, die ein Magnet mit dem permanenten magnetischen Moment $\boldsymbol{V}_p^{**}$ im magnetischen Vergleichsfelde erfährt.

Rührt $\bar{\boldsymbol{v}}$ von einem volumenändernden Körper her, so findet man als Potential der Wechselwirkung der beiden Körper:

$$\Psi = -E\,\boldsymbol{V}_p^{**} \cdot \nabla\left(\frac{1}{4\pi r}\right). \tag{10}$$

Dasselbe Potential mit dem entgegengesetzten Vorzeichen gibt die entsprechende Wechselwirkung zwischen einem Magnetpol und einem Magneten.

Rührt das Feld $\bar{\boldsymbol{v}}$ von einem anderen Körper mit eingeprägter Bewegung und folglich von einem Aktionsmoment $\boldsymbol{V}_{p_2}^{**}$ her, so findet man für die Wechselwirkung dieser beiden Körper das Potential:

$$\Psi = -\boldsymbol{V}_{p_1}^{**} \cdot \nabla\left(\boldsymbol{V}_{p_2}^{**}\ \nabla\frac{1}{4\pi r}\right). \tag{11}$$

Bis auf das Vorzeichen ist dies das bekannte Potential für die Wechselwirkung zweier Elementarmagnete oder zweier elektrischer Dipole.

3. *Auf Heterogenität beruhende Kräfte.* Hat der Körper weder ein veränderliches Volumen noch eine Eigenbewegung, die ihm ein permanentes Aktionsmoment verleiht, so verschwinden die beiden ersten Glieder der Formel (5). Es bleibt nur das letzte Glied übrig, welches auf der Heterogenität und dem dadurch bedingten temporären Aktionsmoment beruht. Die Kraft wird mit der Unbestimmtheit, die der unbestimmte Faktor k hineinbringt:

$$\boldsymbol{F} = -\tfrac{1}{2}(s - s_0)\,k S \nabla(\bar{\boldsymbol{v}}^2). \tag{12}$$

Es werden also leichte Körper ($s > s_0$) in der Richtung abnehmender, schwere Körper ($s < s_0$) in der Richtung zunehmender Feldenergie bewegt.

Das Gesetz entspricht, bis auf das Vorzeichen, dem FARADAYschen, daß paramagnetische Körper ($s > s_0$) in der Richtung zunehmender, diamagnetische Körper ($s < s_0$) in der Richtung abnehmender Energie getrieben werden.

4. *Die Wechselwirkung von Doppelschichten und freie Wirbel.* Wie man die Fernkräfte des Magnetismus durch die freien elektrischen Ströme ausdrücken kann, so kann man die des Hydromagnetismus durch die entsprechenden freien Wirbel ausdrücken. Wir wollen dies der Vollständigkeit halber zeigen, beschränken uns jedoch dabei der Einfachheit halber auf die Betrachtung homogener Systeme, wobei wir $s_0 = s = 1$ setzen.

Im Potential (7) sei φ das Geschwindigkeitspotential **60** (9) einer Doppelschicht, dann wird (7):

$$\Psi = -i E \frac{\Omega}{4\pi}$$

wo $\Omega/(4\pi)$ den Raumwinkel darstellt, unter dem man von dem volumenändernden Körper aus den Randwirbel der Doppelschicht sieht. Dieser mit E multiplizierte Raumwinkel gibt dann den von dem volumenändernden Körper ausgehenden Fluß durch die Fläche innerhalb des Randwirbels. Kommen mehrere volumenändernde Körper vor, so findet man das Potential für deren Wechselwirkung mit der Doppelschicht, indem man den totalen Fluß bildet, der von allen diesen Körpern durch die Öffnung des Randwirbels fließt, und nachher mit der Intensität i des Randwirbels multipliziert. Das Potential für die Wechselwirkung der Doppelschicht mit einer beliebigen Kombination von volumenändernden Körpern läßt sich deshalb ausdrücken durch das negative Produkt von i mit dem Flächenintegral, das diesen Fluß durch eine Fläche darstellt, die den Randwirbel als Kontur hat. Wenn also $\boldsymbol{v}'$ die von den volumenändernden Körper herrührende Geschwindigkeit ist, so wird das Potential:

$$\Psi = -i \int \boldsymbol{v}' \cdot d\boldsymbol{\sigma}\,. \tag{13}$$

Die volumenändernden Körper seien nun ihrerseits so gruppiert, daß sie eine Doppelschicht der Stärke i' darstellen. Wir können dann $\boldsymbol{v}'$ durch das Vektorpotential $\mathfrak{y}'$ dieser Doppelschicht darstellen, $\boldsymbol{v}' = \operatorname{curl} \mathfrak{y}'$. Wenn wir dies in (13) einsetzen und nach der STOKESschen Identität das Flächenintegral in ein Linienintegral längs der Randkurve transformieren, so ergibt sich:

$$\Psi = -i \int \mathfrak{y}' \cdot d\boldsymbol{r}\,. \tag{14}$$

Hier können wir aber jetzt den Ausdruck **60** (11) des Vektorpotentiales $\mathfrak{y}'$ einer Doppelschicht mit einem Randwirbel der Stärke i' einführen. Man erhält dann das NEUMANNsche Potential mit negativem Vorzeichen

$$\Psi = -i i' \iint \frac{d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}'}{4\pi r} \tag{15}$$

für die Wechselwirkung zweier Doppelschichten oder deren Randwirbel.

Andererseits kann man auch von der Elementarkraft **62** (5) ausgehen, und mit $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$ hat man

$$(16) \qquad \boldsymbol{f} = \boldsymbol{v} \times \operatorname{curl}\boldsymbol{v}$$

für die Kraft pro Volumeneinheit dort, wo ein Wirbeln $\operatorname{curl}\boldsymbol{v}$ auftritt. Es sei nun $d\sigma$ der Querschnitt einer elementaren Wirbelröhre und folglich $i = \operatorname{curl}\boldsymbol{v} \cdot d\sigma$ deren Wirbelstärke. Die Kraft, die an einem Element $d\boldsymbol{r}$ einer elementaren Wirbelröhre angreift, können wir dann durch

$$(17) \qquad d\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r}$$

ausdrücken, und die resultierende Kraft gegen die geschlossene Wirbelröhre wird:

$$(18) \qquad \boldsymbol{F} = i\int \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r}\,.$$

Rührt nun $\boldsymbol{v}$ von einer Wirbelröhre der Wirbelstärke i' und mit dem Linienelemente $d\boldsymbol{r}'$ her, so können wir $\boldsymbol{v}$ durch die Formel **60** (12) darstellen. Die resultierende Kraft drückt sich dann durch das folgende Doppelintegral aus:

$$(19) \qquad \boldsymbol{F} = i i' \iint \left(d\boldsymbol{r}' \times \nabla' \frac{1}{4\pi r}\right) \times d\boldsymbol{r}\,.$$

Durch Auflösung des doppelten Vektorproduktes ergibt sich eine Summe von zwei Integralen:

$$\boldsymbol{F} = -\, i i' \iint \left(d\boldsymbol{r} \cdot \nabla' \frac{1}{4\pi r}\right) d\boldsymbol{r}' + i i' \iint d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}'\, \nabla' \frac{1}{4\pi r}\,.$$

Das erste Integral verschwindet bei der Integration längs einer geschlossenen Kontur, weil $\nabla' \frac{1}{4\pi r}$ ein potentieller Vektor mit eindeutigem Potential ist. Die Kraft wird also:

$$(20) \qquad \boldsymbol{F} = i i' \iint d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r}'\, \nabla' \frac{1}{4\pi r}\,.$$

Da die Linienelemente $d\boldsymbol{r}$ und $d\boldsymbol{r}'$ unabhängig von den Koordinaten sind, auf die sich die Operation ∇' bezieht, können wir diese Operation vor das Integralzeichen setzen, was wieder zu dem NEUMANNschen Potential (15) führt, und zwar mit dem negativen Vorzeichen, wenn man von ∇' zu ∇ übergeht.

Mit Rücksicht auf die ausgeführten Integraltransformationen heben wir hervor, wie wichtig es ist, nachzusehen, daß die durch mathematische Umformungen erhaltenen Formeln nicht über die Grenzen ihrer physikalischen Gültigkeit hinaus benutzt werden. Die Wirbel i und i', die in den Formeln (15) oder (20) auftreten, sind die Randwirbel von schichtförmigen, flüssigen Körpern, denen man durch äußere Kräfte eine erzwungene oder eingeprägte Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^*$ erteilt hat. Im Anschluß an die Formeln **60** (9) bis (12) oben machten wir das Gedankenexperiment, die Dicke der Schicht verschwinden zu lassen, um nur den zurück-

bleibenden Randwirbel mit dessen zirkulierendem Feld zu betrachten. Wir haben allen Grund, dies als eine erlaubte Extrapolation anzusehen. Wollte man aber dann noch einen Schritt weiter gehen und den Schluß ziehen, daß das NEUMANNsche Potential die ponderomotorische Wechselwirkung ganz beliebiger Wirbel i und i' in der Flüssigkeit darstellt, gleichviel, ob sie als Randwirbel an einen bewegten Flüssigkeitskörper gebunden sind oder nicht, so macht man einen Fehler. Denn die in der Flüssigkeit frei beweglichen Helmholtz-Wirbel z. B. verhalten sich ganz passiv zueinander. Die Wechselwirkung von Wirbeln nach dem NEUMANNschen Potential bleibt immer an ganz bestimmte dynamische Voraussetzungen gebunden, eine Tatsache, die wir im nächsten Kapitel von anderer Seite beleuchtet sehen werden.

Auch dient das NEUMANNsche Potential in der Hydrodynamik nur der Berechnung der scheinbaren Fernkräfte. Eine der elektrodynamischen Induktion entsprechende Erscheinung existiert in einem materiellen Medium mit so einfachen Eigenschaften wie die der idealen Flüssigkeit nicht, sondern erst wenn man zu Medien mit allgemeineren Eigenschaften übergeht.

65. Formändernde Wirkung der Feldkräfte. Außer translatorischen Bewegungen üben die hydrodynamischen Feldkräfte gewöhnlich auch deformierende Wirkungen auf die flüssigen Körper aus. Um diese Deformationen abzuleiten, müssen wir immer auf die fundamentale Form **62** (1) der hydrodynamischen Feldkraft zurückgreifen. Die ausschließlich mit Rücksicht auf bequeme Berechnung der resultierenden Kraft transformierten Formen dieser Gleichung können hier zu ganz falschen Resultaten führen.

Wir wollen die wichtigsten Beispiele dieser formändernden Wirkungen betrachten und beginnen mit dem letzten Glied von **62** (1), mit der an Heterogenitätsstellen auftretenden Kraft:

$$(1) \qquad \mathfrak{f} = \tfrac{1}{2}\bar{\mathfrak{v}}^2 \nabla s.$$

Sie hat die Richtung des Volumenaszendenten und tritt folglich besonders in der Grenzschicht eines Körpers auf, dessen Dichte von derjenigen der Grundflüssigkeit verschieden ist: in der Grenzschicht eines leichten Körpers ist die Kraft längs der Normalen nach innen, in der Grenzschicht eines schweren Körpers längs der Normalen nach außen gerichtet. Die deformierende Wirkung hängt dann von dem Faktor $\frac{1}{2}\bar{\mathfrak{v}}^2$ ab, und dieser Faktor hat bei dem leichten schnell bewegten Körper in einem Strome sein Maximum an den Polen und sein Minimum in der äquatorialen Gegend, während es bei dem schweren und langsam bewegten Körper umgekehrt ist (Abb. 32 A und B). Das Resultat ist aber dabei in beiden Fällen dasselbe: der Körper wird quer zur Strom-

richtung flachgedrückt. Eine Kugel nimmt deshalb die Form eines flachgedrückten Ellipsoids an mit der kleineren Achse in der Stromrichtung. Diese formändernde Wirkung ist verbunden mit einer allgemeinen Tendenz zur Kompression des leichten und zur Expansion des schweren Körpers.

Wir betrachten sodann die Kraft:

$$f = \nabla \mathfrak{v}^* \cdot \bar{\mathfrak{v}}, \tag{2}$$

die in der Grenzschicht eines Körpers mit eingeprägter Geschwindigkeit auftritt. Die Anwendung der Formel ist insofern etwas unbequem, als man in dieser Grenzschicht schnelle Veränderlichkeit nicht nur von $\mathfrak{v}^*$, sondern auch von $\bar{\mathfrak{v}}$ hat. Unter Anwendung der geometrischen Deutung **11** (II) der konjugierten Vektorliniendifferentiation findet man jedoch eine zusammenpressende Kraft in den polaren Gegenden und eine ausdehnende in den äquatorialen: der Körper wird quer zu der Richtung seiner Bewegung flachgedrückt. Setzt man also eine flüssige Kugel in der ursprünglich ruhenden Flüssigkeit durch gleiche gleichgerichtete Impulse gegen die einzelnen Volumenelemente in Bewegung, so wird sie allmählich eine Ellipsoidform mit der kürzeren Achse in der Bewegungsrichtung annehmen.

Die von der Volumenänderung abhängige Kraft

$$f = -\bar{\mathfrak{v}} \operatorname{div} \mathfrak{v} \tag{3}$$

gibt eine Tendenz zum Zusammenhalten der expandierenden Massen und ebenfalls zum Zusammenhalten der kontrahierenden Massen, aber zu einer Trennung der expandierenden und der kontrahierenden Massen voneinander. Ein expandierender Körper strebt deshalb, bei gleicher Expansionsgeschwindigkeit sämtlicher Teilchen, der Kugelform zu und ebenso ein kontrahierender Körper. Ein Körper, der sowohl expandierende wie kontrahierende Massen enthält, hat dagegen die Tendenz, sich in einen nur expandierenden und einen nur kontrahierenden Körper zu teilen: ein scharfer Gegensatz zu dem elektrischen Fall, wo die allgemeine Tendenz gegen eine neutrale Mischung geht.

66. Vollständige Integration der hydrodynamischen Gleichungen bei synchron schwingender Bewegung. Wir haben im Vorhergehenden gezeigt, wie man den ganzen Formelapparat der Elektrostatik und des Magnetismus in der Hydrodynamik zur Anwendung bringen kann. Die Formeln, welche Integraldarstellungen des elektrostatischen oder des magnetischen Feldes geben, stellen gleichzeitig ganz beliebige Momentanzustände des bewegten flüssigen Systems dar. Die in den elektrischen oder magnetischen Feldern wirkenden Feldkräfte treten mit dem entgegengesetzten Vorzeichen in diesen hydrodynamischen Momentanfeldern auf und vermitteln, zusammen mit den evtl. auch ein-

greifenden äußeren Kräften, den Übergang zu dem nächsten Bewegungszustand, der wieder durch die Formeln der Elektrostatik und des Magnetismus in Integralform darstellbar ist. Mit der Kenntnis der formändernden Wirkungen der Feldkräfte sowie ihrer Resultierenden in bezug auf ganze Körper können wir uns wenigstens qualitativ ein Bild des aus einem Momentanzustand hervorgehenden folgenden Momentanzustandes machen, und wenn es gelingt, dies streng rechnerisch durchzuführen, so daß man aus der Integraldarstellung des einen Momentanzustandes den des nächstfolgenden ableiten kann, so würde sich dadurch eine Methode ergeben, die hydrodynamischen Gleichungen allgemein zu integrieren. Da es sich hierbei um einen von der Natur selbst, unter teilweiser Enthüllung tiefer Naturgeheimnisse, angewiesenen Weg handelt, ist hier ein Erfolg nicht ausgeschlossen.

Denn als ein solches Naturgeheimnis, dessen Tragweite zu überblicken wir zur Zeit gar nicht imstande sind, muß man die tiefliegenden Analogien des hydrodynamischen Feldes mit dem elektrischen oder magnetischen ansehen. Es muß auf einer zur Zeit noch nicht zu verstehenden Verwandtschaft der beiden Erscheinungsreihen beruhen, wenn sich ein so allgemeines flüssiges System wie das, welches wir betrachtet haben, überhaupt nicht anders als nach den Formeln der Elektrostatik und des Magnetismus bewegen kann. Aber ebenso überraschend wie diese Tatsache an sich ist, ebenso eigentümlich ist es, daß sie sich uns nicht unmittelbar bei der Beobachtung der Flüssigkeitsbewegungen aufdrängt. Dies hat aber in Wirklichkeit einfache Gründe. Erstens ist das Bewegungsfeld immer wechselnd. Man hat in jedem Moment ein neues elektrisches oder magnetisches Vergleichssystem heranzuziehen, und bei dem kaleidoskopartigen Wechsel wird man nicht leicht auf die Übereinstimmung aufmerksam. Der Hauptgrund liegt aber tiefer. Bei den hydrodynamischen Erscheinungen vertritt ein und derselbe Vektor, nämlich eine Geschwindigkeit, sowohl das in einem Körper bestehende Feld wie auch die Bewegung des Körpers, während der entsprechende elektrische oder magnetische Feldvektor etwas ganz Anderes ist — oder zu sein scheint — als die Geschwindigkeit, mit der sich der Körper sichtbar bewegt. In dieser doppelten Rolle der kinematischen Vektoren liegt die Schwierigkeit des Vergleiches. Deshalb mußte die Entdeckung der Analogie durch die eigentümliche Zerlegung der Geschwindigkeit in zwei Partialgeschwindigkeiten geschehen. In den mathematischen Formeln ist dies ziemlich einfach, jedoch eine mit den Augen beobachtete Geschwindigkeit ist nicht so leicht als aus zwei Partialgeschwindigkeiten bestehend zu erkennen.

Wenn auch die Analogie nach dem Vorhergehenden in den mathematischen Formeln sehr gut hervortritt, nachdem man erst die richtige Zerlegung der kinematischen Vektoren gefunden hat, so entgeht sie

einem bei der unmittelbaren Beobachtung einer beliebigen Bewegung eines beliebigen flüssigen Systems jedoch vollkommen. Von den durch die Formeln **64** (6) bis (12) dargestellten hydrodynamischen Fernwirkungserscheinungen wird man schwerlich die geringsten Spuren entdecken. Da eine absolute Inkompressibilität nie vorkommt, treten bei den Flüssigkeitsbewegungen immer volumenändernde Teilchen auf, und diese werden der Kraft **64** (6) ausgesetzt, zwei volumenändernde Teilchen werden die durch das Potential **64** (8) ausgedrückte Fernwirkung aufeinander ausüben. Die auf diesen Kräften beruhende „eingeprägte" Zusatzbewegung kommt zu der das Feld darstellenden allgemeinen Bewegung hinzu, ist jedoch so klein, daß sie gegenüber der allgemeinen Bewegung verschwindet. Ganz ähnlich verhält es sich mit der durch die Formel **64** (9) dargestellten Kraft, die an einer flüssigen Masse angreift, welche durch eine äußere Kraft oder eine hydrodynamische Feldkraft eine „eingeprägte" Geschwindigkeit erhalten hat, und ebenso mit den durch die Formeln **64** (10) und (11) dargestellten Fernwirkungen zwischen zwei Massen, von denen die eine eine Volumenänderungs- und die andere eine eingeprägte Geschwindigkeit besitzt oder schließlich beide eingeprägte Geschwindigkeit haben. Die von diesen Kräften herrührenden Zusatzbewegungen verschwinden gegenüber der allgemeinen Feldbewegung. Nicht wesentlich anders ist es auch meist mit der auf der Heterogenität beruhenden hydrodynamischen Feldkraft **64** (12). Die mathematisch immer nachweisbare Analogie bleibt im allgemeinen physikalisch schwer beobachtbar.

Um so lehrreicher ist die Betrachtung einer speziellen Bewegungsform, bei der die sonst so tief verborgene Analogie klar hervortritt. Dieser Fall ist gleichzeitig insofern mathematisch interessant, als man unter Anwendung der Formeln der Elektrostatik und des Magnetismus Integrale der hydrodynamischen Gleichungen bilden kann, die nicht nur einen momentanen, sondern einen dauernden Bewegungszustand darstellen.

Diese Bewegung ist dadurch gekennzeichnet, daß *die Stromlinien ein im Raume festliegendes Kurvensystem bilden und die Flüssigkeitsteilchen synchron mit unendlich kleinen Amplituden längs Elementen dieses Stromliniensystems schwingen.*

In diesem Falle hat man es, räumlich betrachtet, nur mit *einem* Felde zu tun, welches periodischen Intensitätsschwankungen und Vorzeichenwechseln unterworfen ist. Man kommt mit einer einzigen Integraldarstellung des Feldes und einem periodischen Zeitfaktor aus. Zu jeder Zeit verhält sich das schwingende Feld wie ein elektrisches oder ein magnetisches Feld mit entsprechenden Feldkräften. Während aber die Feldgrößen periodisch ihre Vorzeichen wechseln, behalten die Feldkräfte unveränderliches Vorzeichen. Denn als Produkt zweier periodisch veränderlicher Feldgrößen ist jedes Glied dem Quadrat der

periodischen Funktion proportional und somit von unveränderlichem Vorzeichen. Man hat dann ein wegen der Kleinheit der Amplituden unsichtbares, im Mittel unveränderliches Feld, das im Mittel konstante Kräfte ausübt, die denen eines unveränderlichen elektrischen oder magnetischen Feldes entgegengesetzt gleich sind.

Um den schwingenden Bewegungszustand zweckmäßig darzustellen, wollen wir mit $h(t)$ eine beliebige periodische Funktion bezeichnen, der wir nur zwei Bedingungen auferlegen. Sie soll symmetrisch sein, so daß sie in der Periode T den Mittelwert Null hat; und sie soll numerisch so normiert sein, daß ihr Quadrat in der Periode den Mittelwert 1 hat. Sie hat mit anderen Worten die beiden Eigenschaften:

$$\frac{1}{T}\int^{T} h(t)\,dt = 0\,, \qquad \frac{1}{T}\int^{T} h^2(t)\,dt = 1 \tag{1}$$

Ein Beispiel einer solchen Funktion ist:

$$h(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi\,\frac{t}{T}\,.$$

Setzen wir in unseren Grundgleichungen die beiden Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v}^*$ proportional dieser Funktion, so ist nach der Verbindungsgleichung auch $s\bar{\boldsymbol{v}}$ dieser Funktion proportional. Da s während der Schwingungen nach unseren Voraussetzungen sich nur sehr wenig ändert, ist auch $\bar{\boldsymbol{v}}$ derselben periodischen Funktion proportional. Wir können deshalb widerspruchsfrei sämtliche Größen, die in die fundamentalen Feldgleichungen **57** (1) bis (6) eingehen, der Funktion $h(t)$ proportional setzen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_m h(t)\,, & e &= e_m h(t)\,, \\ \boldsymbol{v}^* &= \boldsymbol{v}_m^* h(t)\,, & \bar{\boldsymbol{v}} &= \bar{\boldsymbol{v}}_m h(t)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Die von der Zeit unabhängigen Größen $\boldsymbol{v}_m$, $\boldsymbol{v}_m^*$, $\bar{\boldsymbol{v}}_m$, e_m haben dann *relativ zueinander* dieselben Richtungen oder Vorzeichen wie die entsprechenden periodisch veränderlichen Größen zu einer beliebigen Zeit. Ohne Widerspruch können wir deshalb *festsetzen, daß die Größen* $\boldsymbol{v}_m$, $\boldsymbol{v}_m^*$, $\bar{\boldsymbol{v}}_m$, e_m *die Richtungen oder die Vorzeichen haben sollen, welche die periodisch veränderlichen Größen* $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}^*$, $\bar{\boldsymbol{v}}$, e *zu einer festgesetzten Anfangszeit* $t = t_0$ *haben.*

Die Ausdrücke (2) substituieren wir jetzt in den allgemeinen Feldgleichungen **57** (1) bis (6). Der Zeitfaktor fällt dann fort, und wir bekommen für die reinen Raumfunktionen $\boldsymbol{v}_m$, $\boldsymbol{v}_m^*$, $\bar{\boldsymbol{v}}_m$, e_m das folgende System von Feldgleichungen für die Grundflüssigkeit:

$$\boldsymbol{v}_m = s_0\bar{\boldsymbol{v}}_m \tag{I}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}_m = 0\,, \tag{II}$$

$$\operatorname{curl}\bar{\boldsymbol{v}}_m = 0\,, \tag{III}$$

und für das Innere der Körper:

(IV) $$\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{v}_m^* + s\bar{\boldsymbol{v}}\,,$$

(V) $$\operatorname{div} \boldsymbol{v}_m = e_m\,,$$

(VI) $$\operatorname{curl} \bar{\boldsymbol{v}}_m = 0\,.$$

Weiter gibt die Substitution (2) in **57** (7) für die *Feldkraft:*

(VIIa) $$\boldsymbol{f} = \{- e_m \bar{\boldsymbol{v}}_m + \nabla \boldsymbol{v}_m^* \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_m + \tfrac{1}{2} \bar{\boldsymbol{v}}_m^2 \nabla s\} h^2(t) = \boldsymbol{f}_m h^2(t)\,.$$

Diese hat, trotz des ständigen Zeichenwechsels der Größen (2), ein unveränderliches Zeichen. Nach (1) ergibt sich als *Mittelwert dieser Feldkraft:*

(VIIb) $$\boldsymbol{f}_m = - e_m \bar{\boldsymbol{v}}_m + \nabla \boldsymbol{v}_m^* \cdot \bar{\boldsymbol{v}}_m + \tfrac{1}{2} \bar{\boldsymbol{v}}_m^2 \nabla s\,,$$

und diese mittlere Feldkraft steht in genau derselben Beziehung zu den von der Zeit unabhängigen Feldgleichungen (I) bis (VI) wie die momentane Feldkraft **57** (7) zu den von der Zeit abhängigen Feldgleichungen **57** (1) bis (6).

Um die dynamischen Bedingungen zu finden, unter denen das Gleichungssystem (I) bis (VIIb) in Verbindung mit (2) gültig ist, suchen wir die äußere Kraft $\boldsymbol{f}'$, die einwirken muß, um diesen Bewegungszustand kleiner synchroner Schwingungen aufrechtzuerhalten. Die Gleichung **56** (9) gibt, wenn man sie nach der verfügbaren äußeren Kraft $\boldsymbol{f}'$ auflöst:

$$\boldsymbol{f}' = q \frac{d\boldsymbol{v}^*}{dt} - \boldsymbol{f}\,,$$

oder, wenn man den Wert von $\boldsymbol{v}^*$ nach (2) und den Wert von $\boldsymbol{f}$ nach (VIIa) einführt, findet man für die gesuchte Kraft:

(VIIIa) $$\boldsymbol{f}' = q \boldsymbol{v}_m^* h'(t) - \boldsymbol{f}_m h^2(t)\,.$$

Hier hat $h'(t)$ als Ableitung der periodischen Funktion $h(t)$ den Mittelwert Null in der Periode, und unter Benutzung von (1) findet man für den Mittelwert der Kraft (VIIIa):

(VIIIb) $$\boldsymbol{f}'_m = - \boldsymbol{f}_m\,.$$

Die erforderliche Kraft besteht also aus zwei Teilen: aus einem rein periodischen Teil $q_0 \boldsymbol{v}_m^* h'(t)$, der die kleinen Schwingungen des Systems unterhält, und einer stets gleichgerichteten Kraft $\boldsymbol{f}_m h^2(t)$, die einwirken muß, um progressive Konfigurationsveränderungen des Systems zu verhindern. Schließlich ist der Mittelwert der äußeren Kraft (VIIIa) dem Mittelwert der hydrodynamischen Feldkraft entgegengesetzt gleich. Das heißt, die mittlere äußere Kraft, die einwirken muß, um Konfigurationsveränderungen des hydrodynamischen Systems zu verhindern, ist derjenigen äußeren Kraft entgegengesetzt gleich, die einwirken muß, um Konfigurationsveränderungen des elektrostatischen oder magnetischen Vergleichssystems zu verhindern. Das hydrodynamische System

hat also, abgesehen von der Richtung der auftretenden Feldkräfte, im Mittel genau die gleichen dynamischen Eigenschaften wie das elektrische oder magnetische Vergleichssystem.

Die vollständige Übereinstimmung des Gleichungssystems (I) bis (VIIb) für den Durchschnittszustand eines schwingenden Systems mit dem Gleichungssystem **57** (1) bis (7) für einen beliebigen Momentanzustand eines beliebig bewegten Systems hat eine wichtige Folge. *Alle Formeln für Feld- und Kräftedarstellungen, die wir aus dem Gleichungssystem für Momentanzustände entwickelt haben, sind unmittelbar auch für die mittleren Dauerzustände des schwingenden Systems brauchbar*, wenn wir die in den Formeln auftretenden Symbole genau so umdeuten wie bei dem Übergang von dem System **57** (1) bis (7) zu dem System (I) bis (VIIb). Als Beispiele für diese neue Deutung werden wir die Formeln **64** (6) bis (12) heranziehen. Sie beziehen sich, wie wir oben sahen, unter gewöhnlichen Umständen auf schwer beobachtbare oder nicht beobachtbare Kräfte. Jetzt werden diese Kräfte jedoch als sehr auffällige, ja sogar als die einzig beobachtbaren Erscheinungen hervortreten, wenn bei den verschwindend kleinen Amplituden die Felder sich der Beobachtung entziehen.

Die Formel **64** (6) stellt dann die mittlere Kraft dar, die ein periodisch volumenändernder oder *pulsierender* Körper erleidet, wenn er sich in einer oszillierenden Strömung befindet und die Schwingungen synchron sind, so daß sich der Körper ausdehnt, während die Strömung in der einen Richtung verläuft, und sich zusammenzieht, während die Strömung die entgegengesetzte Richtung hat. Die Durchschnittskraft bewegt dann den pulsierenden Körper in der Richtung, welche die Strömung zu der Zeit hat, wenn sich der Körper zusammenzieht.

Die Formel **64** (8) ist das Potential der Anziehung oder Abstoßung zweier pulsierender Körper. Bei gleicher Phase, d. h. wenn sich beide Körper gleichzeitig ausdehnen und gleichzeitig zusammenziehen, hat man Anziehung nach dem NEWTONschen Gesetze. Denkt man sich eine Welt gebaut aus lauter gleichen Atomen, die sich in einer raumerfüllenden, homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit befinden, und welche alle in gleicher Phase mit gleichen Amplituden pulsieren, so hat man eine Welt, in der sich alle Körper nach dem NEWTONschen Gravitationsgesetz anziehen. Kommen beide Phasen vor, so hat man gegenseitige Anziehung der gleich pulsierenden und gegenseitige Abstoßung der entgegengesetzt pulsierenden Körper. Das Gesetz entspricht dem COULOMBschen für die Anziehung und die Abstoßung elektrisch geladener Körper oder magnetischer Pole, nur daß im hydrodynamischen Falle gleiches Vorzeichen Anziehung und entgegengesetztes Vorzeichen Abstoßung gibt.

Die Formel **64** (9) stellt die Durchschnittskraft dar, die im Falle der synchronen Schwingungen ein oszillierender Körper in einer oszillierenden Strömung erfährt, eine Kraft, die entgegengesetzt gleich ist derjenigen, die der entsprechende Magnet in dem entsprechenden Magnetfelde erfährt. Das Aktionsmoment $\boldsymbol{V}^{**}$ des oszillierenden Körpers ist das mittlere Maß der Oszillationsgeschwindigkeit, die der Körper im leeren Raume annehmen würde unter dem Einfluß der äußeren periodischen Kraft, welche die Schwingungen unterhält.

Die Formel **64** (10) gibt die Fernwirkung zwischen einem Körper mit dem oszillierenden Aktionsmoment $\boldsymbol{V}^{**}$ und einem Körper mit der Pulsationsintensität E. Von dem Vorzeichen der Kraft abgesehen, gibt sie gleiche Kraftwirkungen wie zwischen einem Magneten mit dem Moment $\boldsymbol{V}^{**}$ und einem isolierten Magnetpol der Polstärke E.

Die Formel **64** (11) gibt die Fernwirkung zwischen zwei synchron oszillierenden Körpern mit den permanenten Aktionsmomenten $\boldsymbol{V}_{p_1}^{**}$ und $\boldsymbol{V}_{p_2}^{**}$, die bis auf das Vorzeichen identisch ist mit der Kraft, die zwei Magnete mit den permanenten magnetischen Momenten $\boldsymbol{V}_{p_1}^{**}$ und $\boldsymbol{V}_{p_2}^{**}$ aufeinander ausüben.

Die Formel **64** (12) schließlich gibt die Kraft, die beliebige pulsierende oder oszillierende Körper auf solche Körper ausüben, die sie in induzierte Schwingungen versetzen, entsprechend den induzierten Magnetisierungen, die Magnetpole oder Magnete in ihnen erzeugen würden. Körper, die ein größeres spez. Volumen als die Flüssigkeit haben und deshalb stärker schwingen als die umgebende Flüssigkeit, werden von den pulsierenden oder oszillierenden Körpern abgestoßen; das entspricht der Anziehung durch Magnetpole oder Magnete, die ein paramagnetischer Körper erfährt, der mehr induzierten Magnetismus als das umgebende Medium annimmt. Körper, die ein kleineres spez. Volumen als die Flüssigkeit haben und deshalb kleinere induzierte Schwingungen als die umgebende Flüssigkeit ausführen, werden angezogen; das entspricht der Abstoßung der diamagnetischen Körper, die weniger induzierten Magnetismus als das umgebende Medium annehmen.

Alle diese Resultate lassen sich in größter Vollständigkeit durch sehr überzeugende Versuche bestätigen. Da bei den synchronen Schwingungen die flüssigen Körper keine merkbaren Konfigurationsveränderungen erleiden, können wir sie ohne weiteres durch feste Körper ersetzen, die durch innere Mechanismen die verlangten synchronen Pulsationen oder Oszillationen ausführen. Die Wirkungen dieser Körper aufeinander und auf neutrale leichtere oder schwerere Körper können wir dann unter allen möglichen Verhältnissen untersuchen. Um diese Versuche in streng richtiger Weise auszuführen, hätte man durch eine äußere Kraft $\boldsymbol{F}'$ die progressiven Bewegungstendenzen aufzuheben

und die dazu erforderliche äußere Kraft zu messen. Die auffälligsten Erscheinungen erhält man jedoch, wenn man keine solche äußere Kraft einführt, sondern die erzeugten Bewegungen der Körper betrachtet. In Wirklichkeit wären dann die erzeugten progressiven Geschwindigkeiten als neue eingeprägte Geschwindigkeiten in Rechnung zu bringen. Die Vernachlässigung dieser Korrektion macht aber nichts aus.

Diese Versuche an sich darf man jedoch nicht als das Hauptergebnis der ganzen Untersuchung der hydroelektrischen und hydromagnetischen Erscheinungen betrachten. Das fundamental Wichtige bleibt die Erkenntnis einer immer vorhandenen, tief verborgenen Analogie zwischen scheinbar sehr verschiedenen Gebieten physikalischer Erscheinungen. Der Spezialfall der synchronen Schwingungen mit den zugehörigen Versuchen weist jedoch mit großer Deutlichkeit auf die sonst so verborgene Analogie hin.

67. Bewegung einer Kugel oder eines Zylinders in der Flüssigkeit. Die Analogie wurde zuerst an Hand der expliziten Lösung für die Bewegung kugelförmiger Körper in der Flüssigkeit gefunden. Teils als Beispiel zu dem Vorhergehenden, teils mit Rücksicht auf spätere Anwendungen wollen wir einige auf Kugeln bezügliche Formeln entwickeln. Nach **61** (1) und (2) drückt die Summe

$$s_0\bar{\varphi} = \frac{E}{4\pi r} + \frac{\boldsymbol{V}^{**}}{4\pi r^3} \tag{1}$$

das Geschwindigkeitsfeld in großem Abstande von einem Körper beliebiger Form aus, der sich unter Volumenänderung bewegt. Ist der Körper eine Kugel vom Radius R, also vom Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$ und nimmt man eine innerhalb des Kugelvolumens konstante Aktionsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}^{**}$ an, so findet man für die Expansionsgeschwindigkeit und das Aktionsmoment der Kugel:

$$E = 4\pi R^2 \dot{R}, \qquad \boldsymbol{V}^{**} = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \boldsymbol{v}^{**} \tag{2}$$

Das Potential (1) läßt sich dann in der Form

$$s_0\bar{\varphi} = \frac{R^2\dot{R}}{r} + \frac{1}{3}\frac{R^3}{r^2} v^{**}\cos\theta \tag{3}$$

schreiben, wo θ der Winkel zwischen Radiusvektor und Aktionsgeschwindigkeit ist.

Im Abstande $r = R$ vom Mittelpunkte der Kugel hat dieses Feld die Radialgeschwindigkeit:

$$-s_0\left(\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial r}\right)_{r=R} = \dot{R} + \frac{2}{3}v^{**}\cos\theta,$$

die identisch ist mit der Radialgeschwindigkeit eines Teilchens der Kugeloberfläche selbst, das infolge der Expansion die Radialgeschwindigkeit $\dot{R}$ und infolge der Translationsgeschwindigkeit

$$v = \tfrac{2}{3}\, v^{**} \tag{4}$$

noch eine zusätzliche Radialgeschwindigkeit $v \cos\theta = \frac{2}{3} v^{**} \cos\theta$ besitzt. Das Potential (3) ist also bis zur Oberfläche der Kugel gültig, wenn diese neben ihrer Expansionsgeschwindigkeit noch die Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ besitzt. Wir finden, daß *die Aktionsgeschwindigkeit einer Kugel das Dreieinhalbfache ihrer Translationsgeschwindigkeit ist:*

$$\boldsymbol{v}^{**} = \tfrac{3}{2}\, \boldsymbol{v}. \tag{5}$$

Nach Einsetzen von (5) in (3) ergibt sich das Potential:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{s_0} \frac{R^2 \dot{R}}{r} + \frac{1}{2} \frac{1}{s_0} \frac{R^3}{r^3} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}, \tag{6}$$

welches die Bewegung darstellt, die eine Kugel erzeugt, die sich unter Expansion mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ durch die Flüssigkeit bewegt.

Zur Berechnung der Felder innerhalb der Kugel haben wir die beiden Gleichungen:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^* + s\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}^* + \frac{1}{q}\bar{\boldsymbol{v}}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{**} + s_0\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}^{**} + \frac{1}{q_0}\bar{\boldsymbol{v}}. \tag{7'}$$

Die letztere gibt uns, zusammen mit (5), die rückwärts gerichtete selbstinduzierte freie spez. Bewegungsgröße im inneren Raume:

$$\bar{\boldsymbol{v}} = -\frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{v}}{s_0} = -\frac{1}{2} q_0 \boldsymbol{v}. \tag{8}$$

Sie setzt, wie man leicht verifiziert, das äußere Feld (6) der spez. Bewegungsgröße mit stetiger Tangentialkomponente fort.

Aus (7) und (8) folgert man:

$$\boldsymbol{v}^* = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{q_0}{q}\right) \boldsymbol{v}. \tag{9}$$

Diese Formel gibt den Impuls pro Masseneinheit — oder die Leerraumgeschwindigkeit —, die man der Kugel erteilen muß, damit sie in der Flüssigkeit die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ annimmt. In dieser Formel kann man das Verhältnis der Dichten q_0/q durch das Verhältnis zweier Massen m/M ersetzen, wo M die Masse der Kugel selbst ist und m die Masse des von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsvolumens. Damit läßt sich die Formel auch in der Form

$$M \boldsymbol{v}^* = (M + \tfrac{1}{2} m)\, \boldsymbol{v} \tag{10}$$

schreiben, die ein bekanntes Resultat enthält: *eine Kugel, die sich in einer Flüssigkeit bewegt, zeigt eine scheinbare Trägheit, als wäre ihre*

Masse um die halbe Masse des von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsvolumens vergrößert worden.

Denken wir uns das Gesamtsystem von Kugel und Flüssigkeit mit der Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ bewegt, so ändern sich dadurch die inneren Verhältnisse des Systems nicht. Das heißt, wir können das Potential $-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}'$ der allgemeinen Translationsbewegung hinzufügen und gleichzeitig im Ausdruck von $\bar{\varphi}$ die Absolutgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ durch die relative $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'$ ersetzen. Somit ergibt sich

$$(11) \qquad \varphi = \quad -\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}' + \frac{R^2\dot{R}}{r} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}')\Big)$$

als Potential einer Kugel, die sich unter Volumenänderung in einer Strömung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ bewegt. Die Aktionsgeschwindigkeit, die den Einfluß der Kugel auf die Bewegung darstellt, wird:

$$(12) \qquad \boldsymbol{v}^{**} = \tfrac{3}{2}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'),$$

und dies ergibt durch Einsetzen in die Gleichung (7) für die induzierte spez. Bewegungsgröße den Ausdruck:

$$(13) \qquad \bar{\boldsymbol{v}} = q_0(\tfrac{3}{2}\boldsymbol{v}' - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}).$$

Dies ist die unmittelbare Verallgemeinerung von (8): die selbstinduzierte spez. Bewegungsgröße $-\frac{1}{2}q_0\boldsymbol{v}$ ist durch die fremdinduzierte $\frac{3}{2}q_0\boldsymbol{v}'$ ergänzt worden.

Ist keine eingeprägte Geschwindigkeit vorhanden, ist also $\boldsymbol{v}^* = 0$, so haben wir reine Fremdinduktion. Die Gleichungen (7) und (13) ergeben dann

$$(14) \qquad \boldsymbol{v} = \frac{\frac{3}{2}q_0}{q+\frac{1}{2}q_0}\boldsymbol{v}' = \frac{\frac{3}{2}s}{s_0+\frac{1}{2}s}$$

für die Geschwindigkeit, die eine Strömung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ in einer Kugel induziert. Bei unendlicher Dichte, $q=\infty$, bleibt die Kugel unbewegt, $\boldsymbol{v}=0$, bei einer Dichte gleich der der Flüssigkeit, $q=q_0$, nimmt sie die Geschwindigkeit des Stromes an, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'$, und wenn die Kugel massenlos ist, $q=0$, $s=\infty$, läuft sie dreimal so schnell als der Strom, $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{v}'$.

Wie wir die gleichzeitige Expansions- und Translationsbewegung einer Kugel behandelt haben, können wir auch die entsprechende Bewegung eines unendlich langen Kreiszylinders behandeln. Allerdings sind die für den dreidimensionalen Raum entwickelten allgemeinen Integralausdrücke nicht ohne weiteres auf den unendlich langen Zylinder anwendbar. Die Bewegung, die der Zylinder in der Flüssigkeit erzeugt, ist eine zweidimensionale, die in Ebenen senkrecht zu der Achse des Zylinders verläuft. Das Problem ist als ein zweidimensionales

leicht lösbar und führt zu Formeln, die den für die Kugel entwickelten nahe verwandt sind.

Hier soll deshalb nur eine einzige Formel hingeschrieben werden. Entsprechend dem Potential (11) für die Kugel erhält man als Potential für einen Zylinder vom Radius ϱ_0, der sich unter Expansion mit der Radialgeschwindigkeit $\dot{\varrho}$ quer zu seiner Achse mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in einer ebenfalls senkrecht zur Achse gerichteten Strömung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ bewegt:

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{s_0}\left(-\varrho \cdot \mathfrak{v}' - \varrho \cdot \dot{\varrho} \log \varrho + \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2}\, \varrho \cdot (\mathfrak{v} - \mathfrak{v}')\right). \tag{15}$$

Die nähere Diskussion läßt sich in ganz ähnlicher Weise wie im Falle der Kugel durchführen.

68. Makrometeorologische Anwendungen. Wir wollen jetzt einige Beispiele für die Anwendung der oben entwickelten Methoden und Resultate auf meteorologische Erscheinungen geben.

1. *Luftbewegung quer über einen Gebirgsrücken.* Das Potential **67** (15) mit $\dot{\varrho} = 0$ und $\mathfrak{v} = 0$ nimmt in skalarer Schreibweise die Form

$$\varphi = -v'\left(1 + \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2}\right)\varrho \cos\theta \tag{1}$$

an. Es stellt die stationäre Strömung um einen ruhenden Zylinder dar. Die Gleichung der Stromlinien ist in Polarkoordinaten:

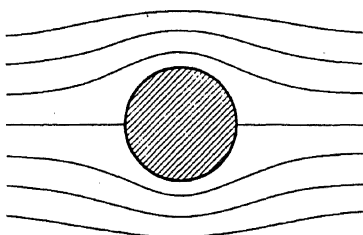



Abb. 35. Luftbewegung über einen Gebirgsrücken.

$$\psi = -v'\left(1 - \frac{\varrho_0^2}{\varrho^2}\right)\varrho \sin\theta. \tag{2}$$

Denken wir uns sowohl den Zylinder wie die Strömung im großen Abstande horizontal, so hat man in der Vertikalebene das Strombild der Abb. 35. Jede Stromlinie in der Figur vertritt eine Stromfläche, die sich in der Nähe des Zylinders bis zu einer gewissen Höhe erhebt. Jede der Flächen kann man solidifiieren und die Bewegung nur oberhalb der erstarrten Fläche betrachten. Die Lösung gibt dann ein angenähertes Bild, wie die Luft über einen Bergrücken des Profils der Stromlinien hinüberströmt. Eine bessere Annäherung erhält man, wenn man, unter Beibehaltung der Piezotropie, den Einfluß der Volumenänderungen der Luft während des Hinüberströmens berücksichtigt. Dabei kann man auch, wenn die Luft feucht ist, die Stellen, wo Kondensation stattfindet, und die Form und Ausdehnung der Hinderniswolke über dem Berg bestimmen.

2. *Zur Cumulusbildung.* Die erbrachten Lösungen gestatten uns, einige mit der Cumulusbildung zusammenhängende Fragen zu diskutieren.

Wenn von einer erwärmten Bodenschicht eine zylindrische Luftkolonne aufsteigt, so verhält sich die Seitenfläche der Kolonne gegenüber der umgebenden Luft neutral. Der aufsteigende Kolonnenkopf verdrängt aber die umgebende Luft und verhält sich insofern wie ein expandierender Körper mit einer Expansionsgeschwindigkeit E, die gleich dem Produkte von Aufsteiggeschwindigkeit und Querschnitt der Kolonne ist. Steigen nun zwei solche Kolonnen auf, so fragt es sich, welche Wirkung sie aufeinander ausüben, sowohl während des Aufsteigens, als auch später, wenn das Gleichgewichtsniveau erreicht ist und die aufgestiegenen Massen sich seitlich ausbreiten.

Im Falle eines periodischen Auf- und Absteigens würden sich die Kolonnenköpfe wie pulsierende Körper anziehen: die induzierende Wirkung der beiden Köpfe aufeinander würde gleich große hin- und hergehende Bewegungen erzeugen und nur die Wirkung der anziehenden Feldkraft würde von Bedeutung sein. Es wäre jedoch falsch, dieses Resultat auf die gleichmäßig anwachsenden Cumulusköpfe anzuwenden. Denn jeder Cumulus unterliegt der Wirkung des von dem anderen ausgehenden Radialfeldes und die induzierende Wirkung ist der reinen Anziehung gerade entgegengerichtet. Ersetzt man die Cumulusse durch expandierende Kugeln oder durch expandierende Zylinder, so kann man das Problem auf Grund der erbrachten Lösungen durchrechnen. Es zeigt sich, daß sich keine irgendwie bedeutsame Wirkung ergibt. Die allgemeine Tendenz ist die, daß jeder expandierende Körper neutral in der von dem anderen erzeugten Radialströmung treibt.

3. *Polarfronterscheinungen.* Die Ereignisse in der Atmosphäre, von denen die Änderungen des Wetters abhängen, bestehen, wie wir jetzt wissen, durchweg in dem Verdrängen gewisser Luftmassen durch Luftmassen mit anderen physikalischen Eigenschaften. Man sieht es in kleinem Maßstabe bei der Bildung der Cumuluswolken und man erkennt es in größerem Maßstabe bei den Polarfronterscheinungen, wo polare Luftmassen solchen mehr tropischen Ursprunges verdrängen oder umgekehrt. Man hat es also mit der Bewegung eines heterogenen flüssigen Systems zu tun. Es handelt sich um die Bewegung flüssiger Körper durch eine umgebende Flüssigkeit und somit um Probleme ähnlicher Art wie diejenigen, die wir seit Abschnitt **57** behandelt haben. Die dabei entwickelten Methoden werden sich deshalb vielleicht später einmal bei der Behandlung meteorologischer Erscheinungen großen Maßstabes als nützlich erweisen.

69. Mikrometeorologische Anwendungen. Das Zusammenfließen von Regentropfen. Gehen wir andererseits zur Mikrometeorologie über, so haben wir in den Regentropfen flüssige Massen, die sich durch ein flüssiges Medium bewegen. Sie fallen mit Geschwindigkeiten, die mit der Größe der Tropfen zunehmen bis zu der Maximalgeschwindigkeit von 8 m/sec, die bei Tropfen von 4,5 mm Durchmesser erreicht wird. Noch größere Tropfen verlieren durch innere Bewegungen ihre Kugelform, fallen langsamer und zerplatzen infolge der inneren Bewegungen. Messungen der Größe sowohl der eigentlichen Regentropfen wie der mikroskopischen, im Nebel schwebenden Tröpfchen haben zu dem überraschenden Resultat geführt, daß zwar alle Größen, von den kleinsten zu den größten, vertreten sind, aber doch so, daß sie sich in Gruppen häufen, in denen sich die Größen wie die Potenzen von 2 verhalten[1]. Man muß daraus schließen, daß die Tropfen vorwiegend durch Verdoppelung anwachsen und nicht, wie man vielleicht zunächst denken könnte, dadurch, daß sich die großen schneller fallenden Tropfen vorwiegend mit den langsamer fallenden kleinen vereinigen, die sie überholen. Es muß also eine Ursache vorhanden sein, die das Zusammenfließen von gleich großen Tropfen gegenüber dem Zusammenfließen ungleich großer Tropfen begünstigt.

Die Kräfte, die den gegenseitigen Abstand der Tropfen beeinflussen, können teils hydrodynamischer, teils elektrischer Natur sein: die Tropfen üben hydrodynamische Fernwirkungen aufeinander aus, während sie durch die Luft fallen; gleichzeitig üben sie elektrische Fernwirkungen aufeinander aus, weil sie sich immer in einem elektrischen Felde befinden, und schließlich auch, weil sie Eigenladungen haben können. Die Eigenladungen können wir jedoch als Ursache der hier in Frage kommenden Erscheinung gleich ausschließen, weil Anziehung nur bei Ladungen entgegengesetzten Zeichens vorkommen kann und schließlich in Neutralität der Tropfen ausmündet, womit eine stetig fortgesetzte Verdoppelung der Tropfen nicht erklärt werden kann. Die Abstoßung von Tropfen des gleichen Zeichens kann nur dem Zusammenfließen der Tropfen hinderlich sein, so daß wir sie nur als Gegenkraft in Betracht zu ziehen haben. Was wir besonders zu untersuchen haben, ist deshalb die Wirkung des Fallens und die Wirkung des elektrischen Feldes.

Um zunächst die hydrodynamische Seite der Frage zu behandeln, so erzeugt eine fallende Kugel A ein Feld, das mit dem eines elektrischen Dipols identisch ist und durch das zweite Glied von **67** (1) dargestellt wird. Das Potential ist durch

$$\varphi = \frac{V^{**}\cos\theta}{4\pi r^2} \tag{1}$$

[1] Defant, A.: Über Gesetzmäßigkeiten in der Verteilung der verschiedenen Tropfengrößen bei Regenfällen. Wiener Sitzungsber., Math.-naturwissenschaftl. Klasse 1905, S. 585; Köhler, H.: Zur Kondensation des Wasserdampfes in der Atmosphäre. Geofysiske Publ. Oslo, Vol. II, No. 6, 1922.

gegeben, wo V^{**} das Aktionsmoment ist und wo der polare Winkel θ von der Vertikalen aus gemessen ist. Abb. 36 gibt die bekannten Feldlinien dieses Feldes.

Eine Kugel B, die sich in diesem Felde befindet, ist zunächst einer induzierenden Wirkung ausgesetzt, von der wir hier nicht, wie im Falle der schwingenden Bewegungen, a priori absehen können. Ist $\boldsymbol{v}'$ die Geschwindigkeit, die A im Punkte B erzeugen würde, wenn die Kugel B dort nicht vorhanden wäre, so nimmt die hier vorhandene Kugel B nach **67** (14) die induzierte Geschwindigkeit

$$v_B = \frac{\frac{3}{2} q_0}{q + \frac{1}{2} q_0} v' = \frac{\frac{3}{2} s}{s_0 + \frac{1}{2} s} v' \tag{2}$$

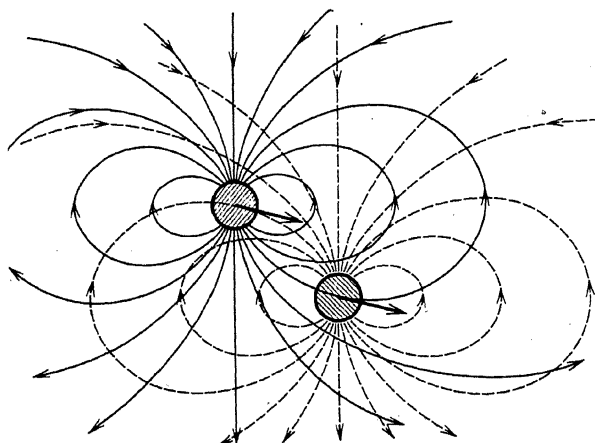



Abb. 36. Gegenseitige Induktion zweier parallel bewegter Kugeln.

an, d. h. bei dem spez. Volumen $s = 1$ des Wassers und $s_0 = 800$ der Luft etwa:

$$v_B = \frac{\quad}{500}. \tag{3}$$

Die Kugel B würde deshalb während des Vorüberfallens der Kugel A im Maßstab $\frac{1}{500}$ die kleine Schleife wiederholen, die das Luftteilchen B beim Vorbeifallen der Kugel A beschreibt. Ganz ähnlich würde B auf A einwirken, wenn B an A vorbeifiele. Denn die Felder, mit denen sich die fallenden Kugeln umgeben, sind geometrisch kongruent. Wenn nun beide Kugeln gleichzeitig mit gleichgerichteten Geschwindigkeiten sich abwärts bewegen, so zeigt ein Blick auf die Felder, daß in jeder gegenseitigen Lage die Geschwindigkeiten, die A in B und B in A induziert, *gleichgerichtet* sind, ein schlagendes Beispiel dafür, daß bei den induzierenden Wirkungen das Gegenwirkungsprinzip nicht gilt (**63**). Dabei werden sie auch gleich groß, wenn die Kugeln gleich groß sind

und gleich schnell fallen. In diesem Falle beeinflußt also die induzierende Wirkung überhaupt nicht den gegenseitigen Abstand der beiden Kugeln. Bei ungleich großen und somit ungleich schnell fallenden Kugeln sind die Geschwindigkeiten, welche die eine Kugel an der anderen induziert, gleichgerichtet aber ungleich groß; die größere induziert größere Geschwindigkeit an der kleineren als umgekehrt. Dies trägt, allerdings in ganz unbedeutendem Maße, dazu bei, daß die größere Kugel an der kleineren vorbeifällt.

Ferner übt die Kugel A auf die Kugel B eine Feldkraft aus, die man aus dem Kräftepotential **64** (11) ableitet, und für die man in Polarkoordinaten die Komponenten

$$(4)\left\{\begin{aligned} F_r &= 3\,\frac{1}{s_0}\,\frac{V_A^{**}\,V_B^{**}}{4\pi r^4}\left(\frac{3}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{2}\right),\\ F_\theta &= 3\,\frac{1}{s_0}\,\frac{V_A^{**}\,V_B^{**}}{4\pi r^4}\sin 2\theta \end{aligned}\right.$$

findet. Die entgegengesetzt gleiche Feldkraft übt B auf A aus. Die Kraftlinien des Vektors $\boldsymbol{F}$ sind in der Abb. 37 gezeichnet. Die Linien haben maximalen Abstand von dem Feldzentrum auf einem Umdrehungskegel mit vertikaler Achse: innerhalb dieses Kegels hat man das Abstoßungsgebiet, außerhalb das Anziehungsgebiet. Sind die Kugeln ungleich groß, so fällt die größere schnell durch das Feld des kleineren. Nur eine geringfügige Zuckung, erzeugt durch anfängliche Abstoßung, kurzdauernde Anziehung und dann wieder Abstoßung, stört ein wenig den vertikalen Fall. Sind aber die Kugeln gleich groß, so fallen sie gleich schnell und die eine hält sich dauernd im Felde der anderen auf. Es kann sich dann nur ein Resultat ergeben: Die Kugel A wandert längs den Kraftlinien der Kugel B, und die Kugel B wandert längs den Kraftlinien der Kugel A. Befindet sich dabei von Anfang an A im Anziehungsgebiet von B und B im Anziehungsgebiet von A, so erfolgt unmittelbare Anziehung. Befindet sich dagegen von Anfang an A im Abstoßungsgebiet von B und B im Abstoßungsgebiet von A, so wandert jede Kugel vom Abstoßungsgebiet in das Anziehungsgebiet des andern hinüber, und das Resultat wird, nach einer einleitenden Abstoßung, eine endgültige Anziehung.

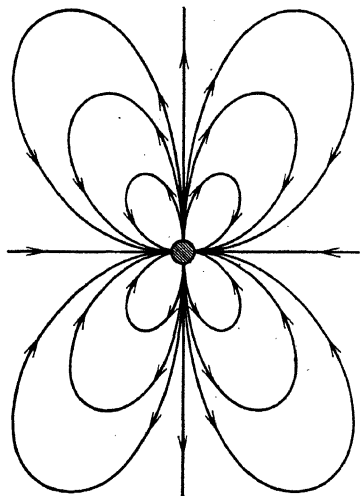



Abb. 37. Feldkraft bei parallel bewegten Kugeln.

Die hydrodynamische Feldkraft wirkt also in dem Sinne, daß gleich große und gleich schnell fallende Tropfen sich vereinigen, während

ungleich große und ungleich schnell fallende Tropfen nicht wesentlich gehindert werden, frei aneinander vorbeizufallen.

Außerdem befinden sich die Tropfen auch in einem elektrischen Felde, mit gewöhnlich nach oben zunehmendem Potential, also mit vertikalen Feldlinien, während allerdings lokal, z. B. in Gewitterwolken, alle Richtungen der Feldlinien vorkommen können. In diesem Felde werden die als Leiter auftretenden Regentropfen durch Induktion zu elektrischen Dipolen. Jeder Dipol erzeugt ein Feld mit dem Potential (1), wo V^{**} das Dipolmoment ist. Die gegenseitigen Induktionswirkungen der Kugeln brauchen wir nicht zu diskutieren, weil das induzierte Feld kein Bewegungsfeld ist. Wir brauchen nur die ponderomotorischen Kräfte zwischen den parallel eingestellten Dipolen zu betrachten. Die Komponenten der Kraft, die der eine Dipol auf den anderen ausübt, sind durch die Formeln (4) gegeben, wenn man sie mit den entgegengesetzten Vorzeichen schreibt. Die Resultierende ist durch die Abb. 37 dargestellt, wenn man die Richtung der Pfeile längs der Feldlinien umkehrt: das frühere Anziehungsgebiet ist Abstoßungsgebiet geworden und umgekehrt. Diese Vertauschung macht aber für das Endresultat nichts aus. Wenn die Tropfen ungleich groß sind, fällt der eine schnell durch das Feld des anderen. Wenn sie aber gleich groß sind und gleich schnell fallen, so daß während des ganzen Falles sich der eine im Felde des anderen aufhält, werden sie sich relativ zueinander verschieben, so daß sie aus den gegenseitigen Abstoßungsgebieten in die gegenseitigen Anziehungsgebieten gelangen, bis schließlich Berührung und Zusammenfließen erfolgt. Dabei ist es belanglos, ob die elektrischen Feldlinien mit der Fallrichtung zusammenfallen oder nicht.

Schließlich haben wir die absolute Größe der Kräfte zu betrachten. Sie interessiert uns nur im Falle der gleich großen Kugeln mit gleich großen hydrodynamischen Aktionsmomenten oder elektrischen Dipolmomenten. Wir können also in (4) $V_A^{**} = V_B^{**}$ setzen und brauchen nur die reine Anziehungskraft F_r zu betrachten. Von dem trigonometrischen Faktor, dessen Zahlenwert zwischen 0 und 2 liegt, können wir absehen und brauchen nur die Größe

$$\frac{3}{s_0}\frac{V^{**2}}{4\pi r^4} \tag{5}$$

zu betrachten. Sie gibt die größte hydrodynamische Anziehung und die entsprechende größte elektrische Abstoßung, die im Abstande r vorkommen kann. Der doppelte Wert von (5) gibt entsprechend die größte hydrodynamische Abstoßung und größte elektrische Anziehung.

Von jetzt an gestaltet sich die Rechnung für den hydrodynamischen und elektrischen Fall etwas verschieden, weil die beiden Probleme einander nicht ganz genau entsprechen. Die mit der Geschwindigkeit v fallende Kugel hat die Aktionsgeschwindigkeit $\frac{3}{2}\,v$, die nach Multiplikation mit dem Volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$ der Kugel das hydrodynamische Aktionsmoment $V^{**} = 2\pi R^3 v$ ergibt. Der leitende Tropfen im elektrischen Felde der Verschiebung v beeinflußt dieses Feld wie eine isolierende Kugel von unendlicher Dielektrizitätskonstante und entspricht somit einer massenlosen Kugel in einem Felde der Geschwindigkeit v. Die Formel (2) ergibt für $s = \infty$ als Geschwindigkeit dieser Kugel $3\,v$, also das Dreifache der Geschwindigkeit im äußeren Felde. Die Geschwindigkeit der Kugel relativ zu dem äußeren Felde wird dann $2v$. Die Multiplikation dieser relativen Geschwindigkeit mit $\frac{3}{2}$ ergibt als Aktionsgeschwindigkeit der Kugel $3v$, und dies mit dem Volumen der Kugel multipliziert, ergibt als Aktionsmoment $V^{**} = 4\pi R^3 v$, welches gleichzeitig das Dipolmoment der leitenden Kugel ist. Man erhält demnach parallel im hydrodynamischen und im elektrischen Fall:

(6) $$\frac{3\pi}{s_0}\frac{R^6}{r^4}v^2 \quad \text{und} \quad \frac{6\pi}{s_0}\frac{R^6}{r^4}v^2,$$

wo v in der ersten Formel die Fallgeschwindigkeit eines Tropfens ist und in der zweiten die elektrische Verschiebung in dem äußeren elektrischen Felde.

Jetzt interessiert uns weniger die Größe der Kräfte selbst als die Beschleunigungen, die sie den Tropfen erteilen. Dazu haben wir die Kräfte (6) durch die effektive träge Masse der Tropfen zu dividieren. Bei der Dichte Eins des Wassers hat eine Kugel vom Radius R die Masse $\frac{4}{3}\pi R^3$. Dazu müßte noch die Masse des halben verdrängten Luftvolumens hinzugefügt werden, von diesem Zuschlag können wir aber absehen und nur mit der Masse der Kugel dividieren. Dann ergeben sich aus (6) die Beschleunigungen zu:

(7) $$\frac{9}{4\,s_0}\frac{R^3}{r^4}v^2 \quad \text{und} \quad \frac{9}{2\,s_0}\frac{R^3}{r^4}v^2 .$$

Von besonderem Interesse sind nun die Maximalwerte dieser Beschleunigungen, die sich für $r = 2\,R$ ergeben, wenn die Tropfen zur Berührung gekommen sind:

(8) $$\frac{}{64\,s_0}\frac{v^2}{R} \quad \text{und} \quad \frac{9}{32\,s_0}\frac{v^2}{R}$$

Hier ist in der ersten Formel (8) v die Fallgeschwindigkeit des Tropfens und s_0 das spez. Volumen der Luft. In der zweiten Formel (8) ist v die elektrische Verschiebung im äußeren elektrischen Felde und s_0 die Dielektrizitätskonstante der Luft.

		2,25	1,5	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Tropfenradius R mm		2,25	1,5	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
Fallgeschwindigkeit v m/sec		8	6,91	5,83	4,26	1,86	0,78	0,26	—	0,001
Beschleunigung in m/sec²	1. Hydrodynamisch	5,2	5,8	6,2	6,6	3,1	1,4	0,24	—	0,000018
2. Durch elektrisches Feld in Volt/cm gemessen	1 Volt/cm	0,00022	0,00033	0,0005	0,001	0,0025	0,005	0,01	0,025	0,05
	10 „	0,022	0,033	0,05	0,1	0,25	0,5	1,0	2,5	5,0
	100 „	2,2	3,3	5,0	10	25	50	100	250	500
	1000 „	220	330	500	1000	2500	5000	10000	25000	50000
3. Durch elektrische Ladung in Elementarladungen gemessen	1 E. L.	$2,3 . 10^{-19}$	$1,7 . 10^{-18}$	$1,3 . 10^{-17}$	$0,41 . 10^{-15}$	$0,4 . 10^{-13}$	$1,3 . 10^{-12}$	$0,41 . 10^{-10}$	$0,4 . 10^{-8}$	$1,3 . 10^{-7}$
	10 „	$2,3 . 10^{-17}$	$1,7 . 10^{-16}$	$1,3 . 10^{-15}$	$0,41 . 10^{-13}$	$0,4 . 10^{-11}$	$1,3 . 10^{-10}$	$0,41 . 10^{-8}$	$0,4 . 10^{-6}$	$1,3 . 10^{-5}$
	100 „	$2,3 . 10^{-15}$	$1,7 . 10^{-14}$	$1,3 . 10^{-13}$	$0,41 . 10^{-11}$	$0,4 . 10^{-9}$	$1,3 . 10^{-8}$	$0,41 . 10^{-6}$	$0,4 . 10^{-4}$	$1,3 . 10^{-3}$
	1000 „	$2,3 . 10^{-13}$	$1,7 . 10^{-12}$	$1,3 . 10^{-11}$	$0,41 . 10^{-9}$	$0,4 . 10^{-7}$	$1,3 . 10^{-6}$	$0,41 . 10^{-4}$	0,004	0,13

Wenn wir jetzt zur numerischen Tabulierung dieser Größen übergehen, so ist der wesentliche Unterschied zu beachten, daß die Fallgeschwindigkeit v eines Tropfens eine empirisch gefundene Funktion seines Radius ist, die rasch mit dem Radius abnimmt, während die elektrische Verschiebung v des äußeren Feldes von der Tropfengröße unabhängig ist. Daraus folgt, daß mit abnehmenden Tropfenradien R die Bedeutung der elektrischen Wirkung rasch zunimmt, während die hydrodynamische abnimmt.

Die erste Zeile der beigefügten Tabelle gibt den Tropfenradius; in der zweiten Zeile sind die entsprechenden empirisch festgestellten Fallgeschwindigkeiten der Tropfen eingetragen. Mit diesen Werten der Fallgeschwindigkeiten und dem Wert $s_0 = 800$ für das spez. Volumen der Luft sind dann nach der ersten Formel (8) die von den hydrodynamischen Kräften herrührenden Beschleunigungen berechnet und in die dritte Zeile der Tabelle eingetragen worden. Die größte Beschleunigung der Tropfen gegeneinander, die diese Kräfte hervorrufen können, beträgt dann 6,6 und nähert sich also der Schwerebeschleunigung; die größte abstoßende Beschleunigung beträgt demnach 13,2 und übersteigt also erheblich die Schwerebeschleunigung. Im Größenbereiche der eigentlichen Regentropfen bis zu Radien von einem zehntel Millimeter herunter trägt also die hydrodynamische Fernkraft in hohem Maße zur Vereinigung der gleich großen Tropfen bei. Mit den abnehmenden Fallgeschwindigkeiten der kleineren Tropfen

nimmt aber die Wirkung schnell ab und wird schließlich bedeutungslos.

Die folgenden vier Zeilen sind nach der zweiten Formel (8) berechnet. Im elektrostatischen Einheitssystem hat man die Dielektrizitätskonstante der Luft $s_0 = 1$ zu setzen, und man kann Verschiebung und Feldstärke identifizieren. Die vier Zeilen geben die Kräfte für Feldstärken von 1—1000 Volt pro cm, d. h. von $\frac{1}{300}$ bis 3,33 irrationellen elektrostatischen Einheiten der Feldstärke oder von $9{,}1 \cdot 10^{-4}$ bis 0,91 entsprechenden rationellen Einheiten. Die letzteren Zahlen sind in der für rationelle Einheiten berechneten Formel (8) benutzt worden. Die verzeichneten Zahlen zeigen folgendes. Die normale Feldstärke von einem Volt pro cm ist ganz bedeutungslos bei den eigentlichen Regentropfen, muß aber schon von wesentlicher Bedeutung sein, wenn wir uns dem kolloidalen Gebiet nähern. Gehen wir aber zu stärkeren Feldern über, so steigt die Bedeutung der elektrischen Wirkung für alle Tropfengrößen. Bei 100 Volt pro cm ist die elektrische Wirkung auch für die eigentlichen Regentropfen von ähnlicher Größenordnung wie die hydrodynamische, und bei 1000 Volt pro cm würden nach der Tabelle ganz riesige Kräfte auftreten. Wo die Grenze für die Feldstärken liegt, die lokal in den Gewitterwolken unmittelbar vor den Entladungen auftreten können, wissen wir nicht. Man sieht aber, daß dann sehr große Kräfte auftreten und versteht, warum gerade dann große Tropfen in großer Menge fallen.

Zum Vergleich sind zuletzt in den vier letzten Zeilen der Tabelle die Beschleunigungen angegeben, welche die elektrischen Ladungen den Tropfen unter den gleichen Umständen, d. h. im Moment der Berührung, erteilen können. Es zeigt sich, daß im ganzen Gebiet diese Kräfte neben den schon betrachteten für alle festgestellten Ladungen von einem Elementarquantum bis etwa 1000 bedeutungslos sind.

Daß die innerhalb und unterhalb der Wolken zur Verfügung stehenden Fallhöhen und Fallzeiten ausreichen, um eine wiederholte Vereinigung von Tropfen unter der Wirkung der hydrodynamischen Feldkraft herbeizuführen, haben Rechnungen von W. SCHMIDT[1] gezeigt, der sich zuerst mit der hydrodynamischen Erklärung des Gesetzes von der Tropfengröße beschäftigt hat, allerdings ohne die noch wichtigere Wirkung des elektrischen Feldes mit in Betracht zu ziehen.

Zuletzt seien einige Erscheinungen erwähnt, die man ganz oder teilweise auf dieselben Ursachen wie das Zusammenfließen der Regentropfen zurückführen kann.

[1] SCHMIDT, W.: Zur Erklärung der gesetzmäßigen Verteilung der Tropfengrößen bei Regenfällen. Met. Z. 1905, S. 496.

WOOD[1] hat das Verhalten einer Suspension von kleinen Teilchen unter der Wirkung intensiver Schallwellen von sehr hoher Frequenz (300000 Schwingungen pro Sekunde) untersucht. Teilchen, die nicht zu klein und schwerer als die Flüssigkeit sind, ballen sich zu Klumpen zusammen, die sich unmittelbar unter der Oberfläche der Flüssigkeit sammeln. Zweifellos macht sich hier die hydrodynamische Anziehung der Teilchen geltend. Die zusammengeballten Klumpen werden von der Schwere nach unten, von der hydrodynamischen Feldkraft dagegen nach der Oberfläche getrieben, sofern das Schwingungsfeld hier die größte kinetische Energie hat.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß Tabaksrauch in der Nähe einer arbeitenden Influenzmaschine zu Boden fällt. Dabei ist offenbar dieselbe elektrische Anziehung wirksam, die zur Vereinigung der Regentropfen im elektrostatischen Felde führt, wenn auch gleichzeitig Ionenbildung in der Luft stattfindet und vielleicht die Hauptursache ist. Ähnliches gilt für die bekannte Erscheinung, daß eine Suspension sehr kleiner Teilchen in einer Flüssigkeit ebenso wie eine kolloidale Lösung durch das Anlegen einer elektrischen Spannung ausgefällt wird. Die hier studierten Kräfte müssen unbedingt mitwirken, ohne deshalb notwendig die Hauptursache zu sein. Jedenfalls ist es interessant, zu untersuchen, ob man auch in diesen Fällen das 2^n-Gesetz für die Größe der ausgefallenen Teilchen wiederfindet.

Sechstes Kapitel.

Hydroelektrische und hydromagnetische Erscheinungen, zweite Reihe.

Stationäre Bewegung.

70. Hydrodynamische Feldgleichungen, zweite Reihe. Bei der Ableitung der ersten Reihe hydrodynamischer Kraftfelderscheinungen haben wir eine spezielle Bewegungsform ausgeschlossen, die stationäre. In diese Lücke paßt eigentümlicherweise eine zweite Reihe hydrodynamischer Kraftfelderscheinungen hinein, die eine von der ersten wesensverschiedene Analogie mit elektrischen und magnetischen Erscheinungen gibt. Diese ist gekennzeichnet durch die zweite der beiden a priori gleich naheliegenden Alternativen (**56**) für die Zusammenpaarung der hydrodynamischen Größen mit den elektrischen oder magnetischen: statt des spez. Volumens entspricht jetzt die Dichte der Dielektrizitätskonstanten oder der magnetischen Permeabilität, und Geschwindigkeit und spez. Bewegungsgröße vertauschen ihre Rollen. Die Geschwindigkeit

[1] WOOD, W. and A. L. LOOMIS: The Physical and Biological Effects of High-frequency Soundwaves of Great Intensity, Phil. Mag. Vol. 4, S. 433, 1927.

entspricht jetzt der elektrischen oder der magnetischen Feldstärke und die spez. Bewegungsgröße der elektrischen Verschiebung oder der magnetischen Induktion.

Um gleich noch einen Unterschied der beiden Analogien zu betonen, so war es für die Entwicklung der ersten Analogie grundlegend, daß die dynamische Geschichte des Systems zu der eindeutigen Definition der erzwungenen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^*$ führte. Dieser Vektor entsprach den in den MAXWELLschen Gleichungen auftretenden Vektoren $\boldsymbol{D}^*$ oder $\boldsymbol{B}^*$. Bei dem jetzt vorausgesetzten stationären Bewegungszustand hat aber das System keine Geschichte. Man kann keinen durch die Geschichte des Systems definierten Vektor als Fundamentalgröße einführen. Man darf aber deswegen die zweite Analogie nicht für beschränkter halten als die erste. Denn nach der modernen Auffassung sind die elektrischen und magnetischen Größen $\boldsymbol{D}^*$ und $\boldsymbol{B}^*$ nur Hilfsgrößen, die man durch andere fundamentale Größen ausdrücken kann. Nichts hindert, in der zweiten Analogie Hilfsgrößen einzuführen, die diesen elektrischen oder magnetischen Größen entsprechen.

In einer Hinsicht ist die zweite Analogie wesentlich allgemeiner als die erste: sie gibt Stromfelder, die den Feldern der stationären elektrischen (magnetischen) Ströme entsprechen. Man bekommt somit ein vollständiges Bild der stationären Elektrodynamik. Gleichzeitig ist aber die Analogie nach der statischen Seite hin enger begrenzt: solange man an dem Prinzip von der Erhaltung der Masse festhält, findet man keine Größe, die der wahren elektrischen Ladung entspricht.

Wir können uns deshalb bei unseren Betrachtungen von vornherein auf ein quellenfreies elektrisches und auf ein quellenfreies magnetisches Feld beschränken und haben es somit mit dem folgenden Spezialfall der MAXWELLschen Gleichungen zu tun. Die eigentlichen Feldgleichungen der beiden stationären Felder sind:

(1A) $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, (1B) $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$,

(2A) $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$, (2B) $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$,

(3A) $\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{c}'$, (3B) $\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{c}$,

wo $\boldsymbol{c}$ die elektrische Stromdichte und $\boldsymbol{c}'$ die formal entsprechende magnetische Stromdichte ist. Die Energien pro Volumeneinheit sind:

(4A) $w_e = \frac{1}{2} \varepsilon \boldsymbol{E}^2$, (4B) $w_m = \frac{1}{2} \mu \boldsymbol{H}^2$.

Durch Variation der entsprechenden Energieintegrale findet man für die Feldkräfte pro Volumeneinheit:

(5A) $\boldsymbol{f}_e = \boldsymbol{c}' \times \boldsymbol{D} - \frac{1}{2} \boldsymbol{E}^2 \nabla \varepsilon$, (5B) $\boldsymbol{f}_m = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{2} \boldsymbol{H}^2 \nabla \mu$,

wo $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{c}' \times \boldsymbol{D}$ die auf einen elektrischen bzw. magnetischen Strom wirkenden Kräfte sind und $-\frac{1}{2} \boldsymbol{H}^2 \nabla \mu$ und $-\frac{1}{2} \boldsymbol{E}^2 \nabla \varepsilon$ die auf Heterogenität

beruhenden Kräfte, die beim temporären Magnetismus und bei den entsprechenden elektrostatischen Erscheinungen auftreten. Damit das elektrische oder magnetische System nicht in Bewegung kommt und die Gleichungen (3 A) und (3 B) nicht ihre Gültigkeit verlieren, müssen die äußeren Kräfte

(6A) $\boldsymbol{f}_e' = \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{c}' + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2 \nabla \varepsilon$, (6B) $\boldsymbol{f}_m' = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}^2 \nabla \mu$

die Feldkräfte (5 A) bzw. (5 B) aufheben.

Das entsprechende flüssige System soll ein stationäres Geschwindigkeitsfeld und ein stationäres Massenfeld haben:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Wir werden untersuchen, ob sich eine durch die Verbindungsgleichung

$$\bar{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{v} \tag{8}$$

gekennzeichnete Analogie ergeben wird. Die Gleichungen für die geometrische Struktur des Feldes erhält man dabei unmittelbar. Die zweite Gleichung (7) in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung **17** (9) ergibt:

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} = 0. \tag{9}$$

Weiterhin erhält man durch Wirbelableitung der ersten Gleichung (7) und darauf folgende lokale Zeitintegration:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}, \tag{10}$$

wo $\boldsymbol{c}$ ein nur von den Koordinaten abhängiger und von der Zeit unabhängiger Vektor ist.

Diese Gleichungen geben die folgende Zuordnung der hydrodynamischen Größen zu den elektrischen oder den magnetischen Größen:

Größen	
(1) Spez. Bewegungsgröße (2) Elektrische Verschiebung (3) Magnetische Induktion	$\bar{\boldsymbol{v}}$
(1) Geschwindigkeit (2) Elektrische Feldstärke (3) Magnetische Feldstärke	$\boldsymbol{v}$
(1) Dichte (2) Dielektrizitätskonstante (3) Magnetische Permeabilität	q
(1) Spez. Massenausfluß (2) Wahre elektrische Dichte (3) Wahre magnetische Dichte	$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$
(1) Wirbel (2) Wahre elektrische Stromdichte (3) Wahre magnetische Stromdichte	$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}$

Wir haben sodann die dynamischen Eigenschaften des flüssigen Systems zu untersuchen, wenn es sich nach diesen Gleichungen bewegt. Da die Feldgleichungen (9) und (10) eine Folge der Gleichungen (7) sind, brauchen wir die Bewegungsgleichung nur nach (7) zu spezialisieren. Wir finden dann als Bewegungsgleichung für das stationär bewegte System:

(11) $$q\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}' - \nabla\chi - \nabla p\,.$$

Die auf die Volumeneinheit bezogene äußere Kraft ist wie früher als Summe eines gegebenen potentiellen Anteiles $-\nabla\chi$ und eines Anteiles $\boldsymbol{f}'$ geschrieben, über den wir bis auf die in Gleichung (11) erhaltene Beschränkung frei verfügen können. Es taucht die Frage auf, ob es unter den möglichen Werten von $\boldsymbol{f}'$ einen ausgezeichneten gibt, der Verwandtschaft zeigt mit der äußeren Kraft (6A) oder (6B), die an dem elektrischen oder magnetischen Feld angreift. Um dies festzustellen, versuchen wir wieder, von dem allgemeinen Trägheitsgliede von (11) spezielle Glieder abzutrennen, die ähnlich gebaut sind wie die Feldkräfte (5A) oder (5B). Das Glied $q\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v}$ können wir nach der Identität **11** (4) in der Form $q\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + (\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v})\times\overline{\boldsymbol{v}}$ schreiben oder nach (10): $q\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}\times\overline{\boldsymbol{v}}$, so daß die Gleichung (11)

$$q\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}\times\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}' - \nabla\chi - \nabla p$$

wird. Hier läßt sich das erste Glied umschreiben:

$$q\nabla\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = q\nabla\tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 = \nabla(\tfrac{1}{2}q\boldsymbol{v}^2) - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\nabla q\,,$$

so daß wir die Gleichung für die stationäre Bewegung in der entwickelten Form

(12) $$\boldsymbol{c}\times\overline{\boldsymbol{v}} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\nabla q + \nabla(\tfrac{1}{2}q\boldsymbol{v}^2) = \boldsymbol{f}' - \nabla\chi - \nabla p$$

erhalten, welche die erwünschte Zerlegung des Trägheitsgliedes gibt.

Diese Gleichung kann durch unendlich viele Wertkombinationen der äußeren Kraft $\boldsymbol{f}'$ und des Druckes p befriedigt werden, unter denen sich auch die von uns gesuchte befindet. Erteilt man dem Druck den Wert:

(13) $$p = p_0 - \chi - \tfrac{1}{2}q\boldsymbol{v}^2,$$

so muß die verfügbare äußere Kraft den Wert

(14) $$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{c}\times\overline{\boldsymbol{v}} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\nabla q$$

haben, und umgekehrt folgt aus dem Wert (14) dieser Kraft der Wert (13) des Druckes. Die vom Felde ausgeübte Trägheitskraft, die $\boldsymbol{f}'$ zu überwinden hat, ist:

(15) $$\boldsymbol{f} = \overline{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{c} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{v}^2\nabla q\,.$$

Feldkraft und äußere Kraft im stationär bewegten flüssigen System entsprechen somit genau nur mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, Feldkraft und äußerer Kraft im entsprechenden stationären elektrischen oder magnetischen System.

71. Definition des stationär bewegten flüssigen Systems. Wir machen jetzt die folgenden Voraussetzungen über das flüssige System, auf das wir die oben abgeleiteten Gleichungen anwenden wollen. Die Flüssigkeit soll in zwei verschiedenen Phasen vorkommen können, in der *Grundphase*, in der die Flüssigkeit homogen und inkompressibel mit der Dichte q_0 ist, und der *Körperphase*, in der sie mit der Dichte q beliebig räumlich heterogen auftreten kann, entsprechend der flüssigen und der dampfförmigen Phase eines beliebigen Körpers. Die Körperphase soll die Flüssigkeit nur während des Durchströmens gewisser begrenzter Räume — der Körper — annehmen. Im unbegrenzten Raume außerhalb der Körper soll sie sich in der Grundphase befinden. In der Grenzschicht der somit definierten immer ruhenden Körper tritt eine Phasenveränderung der Flüssigkeit ein, und zwar in der einen Richtung beim Eintreten in den Körper, in der entgegengesetzten beim Austreten. Die Körperräume kann man sich, wenn man will, materiell durch atomistische Gitter definiert denken, die so dünn sind, daß sie das Hindurchströmen der Flüssigkeit nicht beeinträchtigen. Auf den materiellen Ursprung der Zustandsänderungen gehen wir nicht ein; es genügt festzuhalten, daß es sich um etwas physikalisch Vorstellbares handelt; eine innerhalb und außerhalb der Körper verschiedene Temperatur könnte z. B. die Ursache sein. Im übrigen kann man die Flüssigkeit mit ihren verschiedenen Dichten außerhalb und innerhalb des Gitters mit dem FRESNELschen Lichtäther vergleichen, der außerhalb und innerhalb der ponderablen Körper verschiedene Dichte hat.

Außerdem nehmen wir an, daß die homogene und inkompressible Flüssigkeit im äußeren Raume sich wirbelfrei bewegt und im unendlich Fernen ruht. Da somit weder Divergenzen noch Wirbel noch Heterogenitäten im äußeren Raume vorkommen, wird hier keine äußere Kraft $\boldsymbol{f}'$ eingreifen. Wir können dann nach dem Vorhergehenden das folgende Gleichungssystem für die Bewegung der Flüssigkeit aufstellen:

Für den Raum außerhalb der Körper:

$$\bar{\boldsymbol{v}} = q_0 \boldsymbol{v}\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} = 0\,, \tag{2}$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = 0\,. \tag{3}$$

Für den Raum innerhalb der Körper:

$$\bar{\boldsymbol{v}} = q \boldsymbol{v}\,, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{v}} = 0\,, \tag{5}$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}\,. \tag{6}$$

Damit die durch diese Feldgleichungen beschriebene Bewegung erhalten bleibt, muß schließlich nach **70** (14) die äußere Kraft $\boldsymbol{f}'$ eingreifen, und die Gegenkraft $\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{f}'$, die das Feld ausübt, wird:

$$\boldsymbol{f} = \bar{\boldsymbol{v}} \times \operatorname{curl} \boldsymbol{v} + \tfrac{1}{2} \boldsymbol{v}^2 \nabla q\,. \tag{7}$$

Vergleichen wir jetzt mit dem magnetischen Feld, so entsprechen die Gleichungen (1), (2), (3) den Feldgleichungen im freien Raume und die Gleichungen (4), (5), (6) den Feldgleichungen im Innern des Körpers. (7) entspricht der Kraft, die nur innerhalb der Körper, nie aber im freien Raume wirksam ist.

Nebenbei bemerken wir, daß diese zweite Analogie zu ähnlichen Betrachtungen Anlaß gibt wie die erste. Man sieht noch einmal, mit welcher Einfachheit die Natur gleichzeitig ein Feld bildet und dessen Feldkräfte erzeugt. Dabei war in beiden Fällen die Feldkraft eine nach außen wirkende Trägheitskraft. Das Resultat ist deshalb von großer Allgemeinheit. Denn das Trägheitsglied ist in den Bewegungsgleichungen aller materieller Medien das gleiche, ganz unabhängig davon, ob das Medium flüssig ist oder elastische Eigenschaften mehr zusammengesetzter Natur besitzt. Man kann in allen Medien dieselben Feldkräfte absondern. Je nach den speziellen elastischen Eigenschaften des Mediums treten aber diese Kräfte in Verbindung mit Feldern verschiedener geometrischer oder kinematischer Eigenschaften auf. Dies macht es möglich, die Analogien mit dem Elektromagnetismus erheblich zu verallgemeinern. Seit der Zeit der mechanischen Lichttheorien wissen wir, daß im gewöhnlichen elastischen Medium Felder auftreten, die mit denen der Optik zum großen Teil identisch sind. Im elastisch festen Äther können Moleküle und Atome jedoch nur schwingen, sich nicht aber translatorisch fortbewegen. Beides ist aber möglich in einem Medium, dessen Teilchen auf Drehung gyrostatisch reagieren. Dieses Medium kann dieselben Potentialbewegungen wie eine Flüssigkeit ausführen, reagiert aber auf Wirbelbewegung nach Feldgleichungen gleicher Form wie der MAXWELLschen. Dadurch erweitert sich die zweite hydrodynamische Analogie erheblich, so daß sie ein sehr vollständiges mechanisches Bild des elektromagnetischen Feldes nach der MAXWELLschen Theorie gibt, allerdings mit der einen schon von Anfang an vorhandenen Lücke. Solange man an dem Prinzip von der Erhaltung der Masse festhält, bleibt das hydrodynamische Feld quellenfrei und läßt sich deshalb nur mit denjenigen elektrischen bzw. magnetischen Feldern vergleichen, in denen keine elektrischen bzw. magnetischen Ladungen vorkommen. Aber auch diese Lücke läßt sich ausfüllen, wenn man — im Sinne moderner Anschauungen — nicht mehr unbedingt an dem Prinzip von der Erhaltung der Masse festzuhalten braucht.

Wir werden uns jedoch hier nicht mit den außerhalb der Grenzen der Hydrodynamik möglichen Erweiterungen der Analogie befassen, sondern nur mit ihrer Anwendung innerhalb der Hydrodynamik, indem wir bekannte Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes auf das entsprechende hydrodynamische Feld übertragen.

72. Die Feldeigenschaften des stationären Feldes. Die ausführliche Diskussion des nicht wesentlich verschiedenen Gleichungssystems **57** (1) bis (7) in dem vorhergehenden Kapitel erübrigt es, jetzt auf Einzelheiten der Integraldarstellungen, Umformungen der Ausdrücke der Feldkraft usf. einzugehen. Wir beschränken uns auf Bemerkungen allgemeiner Art.

Das wesentlich Neue und über die erste Analogie Hinausgehende ist das Auftreten eines lokal erhaltenen Wirbelns $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \mathbf{c}$, und in Verbindung damit einer Feldkraft $\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{c}$. Im *homogenen System* $q = q_0$, das wir zunächst betrachten, ist diese neue Feldkraft zugleich die gesamte Feldkraft:

$$(1) \qquad \mathbf{f} = \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{c} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{c}.$$

Geht man von dieser auf die Volumeneinheit bezogenen Kraft zu der entsprechenden Kraft für die Längeneinheit einer Wirbelröhre der Wirbelstärke $\mathbf{i}$ über, so erhält man:

$$(2) \qquad \mathbf{f} = \bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{i} = q_0 \mathbf{v} \times \mathbf{i}$$

in Analogie zur Kraft $\mathbf{i} \times \bar{\mathbf{v}}$, welche an der entsprechenden stromführenden elektrischen Leitung angreift.

Nach unserer Voraussetzung ist ein Wirbeln $\mathbf{c}$ nur in den Räumen vorhanden, welche die Körper vertreten. Die homogene inkompressible Flüssigkeit strömt wirbelfrei von außen herein und würde unter Erhaltung ihrer Wirbelfreiheit hindurchströmen, wenn nicht die vorausgesetzte äußere Kraft **70** (14) der Flüssigkeit das verlangte Wirbeln aufzwingen würde. Im Homogenitätsfall ist diese äußere Kraft $\mathbf{f}' = -\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{c}$. Sie ist senkrecht zu $\bar{\mathbf{v}}$ und damit zu der Bahn des Teilchens, und ebenfalls senkrecht zu $\mathbf{c}$, d. h. senkrecht zu den verlangten Wirbellinien. Die Kraft krümmt also die Bahn der vorüberströmenden Teilchen in solcher Weise, daß an Ort und Stelle das vorgeschriebene Wirbeln entsteht. An den Stellen, wo wirbelnde Teilchen aus dem Körper hinausströmen, krümmt die äußere Kraft wieder die Bahn der Teilchen, so daß sie ihr Wirbeln verlieren und wieder ohne Wirbeln in den äußeren Raum hinaustreten. Die Gegenkraft, die die äußere Kraft dabei zu überwinden hat, ist die Zentrifugalkraft, die der erzeugten Krümmung der Bahn entspricht. Diese von den Teilchen ausgeübte Zentrifugalkraft ergibt die von dem Stromfelde ausgeübte Feldkraft (1). Man kann durch diese Betrachtung eine elementare Ableitung der Feldkraft (1) geben, die das Feld ausüben muß, wenn sich die Flüssigkeit unter lokaler Erhaltung der Wirbel bewegen soll.

Diese lokale Wirbelerhaltung ist deshalb der Kernpunkt der ganzen Analogie. Wirbel werden in einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit ohne jede Einwirkung einer äußeren Kraft *individuell* erhalten. Die frei mit dem Strome treibenden Wirbel üben deshalb auch keine Feldkraft (1) oder (2) aus, die derjenigen der elektrischen Ströme ent-

spricht. Deshalb beobachtet man zwischen den frei in der Flüssigkeit sich bewegenden HELMHOLTZschen Wirbelringen oder zwischen den um einander tanzenden geradlinigen parallelen Wirbeln, die oft in den Lehrbüchern behandelt werden, keine Anziehungs- oder Abstoßungserscheinungen. Sie geben nur eine geometrische, nicht aber eine dynamische Analogie zur Elektrodynamik. Wenn man aber durch äußere Kräfte die Helmholtz-Wirbel daran hindern will, sich mit der Strömung zu bewegen, so muß man die äußere Kraft $\boldsymbol{f}' = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{c}$ aufwenden, und es tritt dann die Feldkraft (1) auf.

Ein schon hervorgehobener Unterschied zwischen den beiden Analogien besteht darin, daß ein als „eingeprägt" bezeichneter Vektor $\boldsymbol{v}^*$ in den Grundgleichungen der ersten Analogie auftritt, jedoch in denen der zweiten fehlt. Das heißt die erste Analogie gibt das — wahrscheinlich physikalisch nicht zutreffende — polare Bild des permanenten Magneten. Nur durch Integraltransformationen ergab sich eine Formel, die mathematisch, aber nicht physikalisch eine Analogie zur AMPÈREschen Theorie des Magnetismus darstellt. Die zweite Analogie gibt jedoch das AMPÈREsche Bild: dem AMPÈREschen Magneten mit seiner elektrischen Stromverteilung entspricht hydrodynamisch ein Körper mit der entsprechenden stationären Wirbelverteilung. Die Darstellung des Feldes durch ein mehrdeutiges Skalarpotential **60** (9) oder durch Vektorpotential **60** (6) und **60** (11), die wir früher durch Umformung der fundamentalen Darstellungen ableiteten, ist jetzt in der zweiten Analogie die natürliche Felddarstellung. Von diesen können wir durch Transformationen rückwärts zu einer Darstellung durch eingeprägte Vektoren gelangen, die aber dann als mathematische Rechengrößen, nicht als physikalische Fundamentalgrößen aufzufassen sind. Ähnlich wird jetzt das in **64** (15) gegebene NEUMANNsche Potential die physikalisch natürliche Grundlage sein für die Berechnung der scheinbaren Fernkräfte, welche die stationären Wirbel aufeinander ausüben. Durch Transformationen kann man von diesem Potentiale aus rückwärts wieder zu den Potentialen gelangen, die in der früheren Analogie die grundlegenden waren, in der neuen aber nicht mehr.

Ohne diese Transformationen auszuführen, werden wir einige ihrer Resultate benutzen. Der äußeren Kraft $\boldsymbol{f}'$, welche die Bewegung der Flüssigkeit stationär erhält, können wir auch die Bedingung auferlegen, gewisse Gebiete der Flüssigkeit in Ruhe zu lassen. Wenn die ruhenden Gebiete einen mehrfach zusammenhängenden Raum bilden, so wird hierdurch die wirbelfreie Zirkulation der umgebenden Flüssigkeit nicht behindert. Wirbel bestehen dann nur in der Grenzschicht zwischen den ruhenden Massen und der bewegten umgebenden Flüssigkeit, und zwar

im Grenzfall als reine Gleitwirbel. Nichts hindert uns jetzt, die unbewegten flüssigen Massen zu solidifiieren. Man hat dann beliebige von Kanälen durchsetzte feste Körper, die von der umgebenden Flüssigkeit wirbelfrei umströmt und durchströmt werden. Diese Körper üben Kräfte aufeinander aus, die entgegengesetzt gleich sind denjenigen, die Körper mit den entsprechenden flächenhaft verteilten elektrischen Strömen aufeinander ausüben würden — ein Satz, den Lord KELVIN (Sir WILLIAM THOMSON) im Jahre 1870 ausgesprochen hat, jedoch ohne den vollständigen Beweis zu veröffentlichen.

Als Beispiel können wir zwei lange schmale Röhren betrachten, die wirbelfrei durchströmt werden. Die Röhren beeinflussen sich gegenseitig wie die entsprechenden elektrischen Strömsolenoide. Statt die fundamentale Kraft (2) zu benutzen, können wir auch geeignete transformierte Formen verwenden. Insbesondere finden wir, daß zwei Enden der Solenoide sich nach dem Gesetz

$$\boldsymbol{F} = -\frac{1}{q_0}\frac{\bar{E}\bar{E}'}{4\pi r^2} \tag{3}$$

anziehen oder abstoßen, wo $\bar{E}$ und $\bar{E}'$ die Ausflußmassen der Röhren pro Zeiteinheit bedeuten.

Wir haben bisher den Fall der Homogenität betrachtet. Ändert sich aber jetzt die Dichte der Flüssigkeit, wenn sie die Grenzfläche eines Körpers passiert, und ist $q > q_0$, so daß sie in kondensierter Form durch den Körper strömt, so hat man den Fall des hydrodynamischen Paramagnetismus; ist $q < q_0$, d. h. strömt die Flüssigkeit unter Expansion durch den Körper, so hat man den Fall des hydrodynamischen Diamagnetismus. Im ersten Fall konvergieren die Stromlinien gegen den Körper wegen des größeren Massentransportes der kondensierten Massen durch den Körper. Im zweiten Fall divergieren die Stromlinien, entsprechend dem kleineren Transportvermögen, wenn die Massen in expandiertem Zustande durch den Körper hindurchströmen sollen. Der Gegensatz zu der früheren Analogie, vgl. Abb. 32, S. 215, und der Ursprung des Gegensatzes ist klar: spez. Bewegungsgröße und Geschwindigkeit vertauschen in den beiden Analogien ihre Rollen.

Das Durchströmen durch die Grenzfläche findet unter Erhaltung der Masse statt und folglich mit stetiger Normalkomponente der spez. Bewegungsgröße, so daß die Normalkomponenten der Geschwindigkeit sich umgekehrt wie die Dichten verhalten. Wenn sich dabei die Grenzfläche nicht verschieben soll, muß eine lokal auftretende Kraft $\boldsymbol{f}' = -\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \nabla q$ für die Beschleunigung der sich ausdehnenden und die Verzögerung der sich zusammenziehenden Massen sorgen. Die Feldkraft $\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 \nabla q$, die als Gegenkraft zu $\boldsymbol{f}'$ auftritt, ist uns übrigens aus der ersten Analogie bekannt: es ist die Kraft, die ein Teilchen wegen

seiner Expansions- oder Kontraktionsgeschwindigkeit in einer Strömung erfährt. Die beiden Analogien sind aus denselben dynamischen Elementen aufgebaut, die nur verschieden miteinander verknüpft auftreten.

73. Experimentelle Bestätigungen. Diese zweite Analogie läßt sich nicht in dem gleichen Umfange wie die erste experimentell verifizieren. Die Voraussetzungen der Theorie sind in den allgemeinsten Fällen schwer realisierbar, und es fehlen uns gewöhnlich die Mittel, um die in der stationär strömenden Flüssigkeit auftretenden Feldkräfte zu beobachten und zu messen. Dazu kommt, daß, wenn im übrigen die Bedingungen gut erfüllt zu sein scheinen, oft die nur allzu bekannte Erscheinung auftritt, daß die erwartete stationäre Bewegung in eine turbulente übergeht, eine Störung, die bei den Versuchen mit synchronen Schwingungen ganz in den Hintergrund tritt. Nichtsdestoweniger läßt sich eine recht große Anzahl bekannter und theoretisch längst erklärter Erscheinungen vom Standpunkte dieser Analogie zusammenfassend überblicken und diskutieren.

Für eine experimentelle Prüfung eignen sich besonders die Fälle, wo gewisse Teile der Flüssigkeit unbewegt sind und durch feste Körper ersetzt werden können, so daß man die Kräfte messen kann, die erforderlich sind, um diese Körper in Ruhe zu halten, oder auch die Bewegungen beobachten kann, die sich bei Abwesenheit dieser Kräfte einstellen.

1. *Kräfte an Röhrenmündungen.* Nach der Formel **72** (3) sollen sich sowohl die Ausflußenden wie die Einflußenden zweier Röhren anziehen, während ein Einflußende und ein Ausflußende sich gegenseitig abstoßen sollen, alles unter der Voraussetzung, daß sowohl Ein- wie Ausströmen wirbelfrei und damit turbulenzfrei vor sich geht. Diese Voraussetzung trifft für das Einströmen meist zu, für das Ausströmen dagegen nicht. Man konstatiert auch leicht, daß zwei Einströmungsenden sich bis zur Berührung aufeinander bewegen, eine Erscheinung, die man jedoch nicht eindeutig auf eine anziehende Feldkraft zurückführen kann, weil es eine Bewegung mit der Strömung ist. Wegen der turbulenten Ausströmung gelingt es andererseits auch nicht, eine eindeutige Abstoßung zwischen einem Ausströmungs- und einem Einströmungsende nachzuweisen. Mit zwei Ausströmungsenden kann man jedoch eine sehr auffällige Anziehung — und zwar entgegen der Stromrichtung — erhalten, wenn nur die beiden Röhrenenden genau gleich starke Strömungen direkt gegeneinander aussenden. Wählt man den Abstand nicht zu groß, so kommt es zu keiner Strahlenbildung, sondern die zwei Strömungen biegen ohne Turbulenz gegeneinander ab, und es erfolgt eine kräftige Anziehung.

In diesem Falle, wo das Gelingen auf genauer Symmetrie beruht, ist die Ebene in der Mitte zwischen den beiden Röhrenmündungen eine Symmetrieebene, die sich nicht bewegt. Diese Ebene kann man dann solidifiieren und schließt: Wenn aus einer Röhre Wasser oder Luft gegen eine starre Wand strömt, so findet zwischen Röhrenende und Wand Anziehung statt. Bläst man durch das Loch einer Garnrolle gegen ein Kartenblatt, so wird das letztere von der Garnrolle kräftig angezogen. Der Versuch ist altbekannt und wird vielfach gemacht, um die Eigenschaften des dynamischen Druckes nachzuweisen. Er gibt aber gleichzeitig eine Bestätigung der hier entwickelten Theorie.

2. *Das hydrodynamische Paradoxon.* An einen beliebigen Körper, der sich in einem homogenen magnetischen Felde befindet, greift keine resultierende Kraft an. Dies gilt für beliebige magnetische Eigenschaften des Körpers, vom stärksten Ferromagnetismus, wo die Kraftlinien in großer Zahl den Körper durchsetzen, bis zum stärksten Diamagnetismus, wo alle Kraftlinien um den Körper herumbiegen. Ein Körper, der sich in einer stationären Flüssigkeitsströmung in Ruhe befindet, entspricht dem unendlich diamagnetischen Körper im Magnetfelde und soll nach der Analogie keine resultierende Kraft erfahren. Die Analogie führt somit zu dem bekannten Paradoxon, daß ein Körper in einer beliebigen stationären Flüssigkeitsströmung beliebig lange ruhen kann, ohne mitgeführt zu werden, oder wegen der Relativität der Bewegung, daß sich ein Körper mit gleichmäßiger Geschwindigkeit widerstandslos durch die Flüssigkeit bewegen kann.

Der Schluß ist aber nur so lange gültig, als das Feld außerhalb des Körpers dasselbe wirbelfreie Feld wie das magnetische bleibt, und der Widerstand rührt, wie wir unten sehen werden, nicht in erster Linie von der Flüssigkeitsreibung her, sondern beruht darauf, daß das Feld hinter dem Körper nicht wirbelfrei bleibt.

3. *Der Rotoreffekt.* Der ruhende Körper habe die Form eines unendlich langen Zylinders von beliebigem Querschnitt. Nach dem hydrodynamischen Paradoxon wird dieser Zylinder von einer gleichförmigen Strömung senkrecht zu seiner Achse nicht mitgeführt. Ist keine solche äußere Strömung vorhanden, sondern wird der ruhende Zylinder von der umgebenden Flüssigkeit wirbelfrei umkreist, so greift auch keine resultierende Kraft am Zylinder an, ebensowenig wie an einer ruhenden stromführenden Leitung eine Kraft angreift, wenn kein äußeres magnetisches Feld vorhanden ist.

Ist aber jetzt gleichzeitig sowohl ein äußeres Stromfeld der spez. Bewegungsgröße $\bar{\boldsymbol{v}} = q_0 \boldsymbol{v}$ und eine Zirkulation mit der Wirbelstärke $\boldsymbol{i}$ um den ruhenden Zylinder vorhanden, so wirkt auf den Zylinder pro

Längeneinheit die Kraft **72** (2), die entgegengesetzt gleich ist der Kraft, die am Zylinder angreifen würde, wenn er einen elektrischen Strom der Stromstärke $\boldsymbol{i}$ führte und sich in einem magnetischen Felde der Feldstärke $\boldsymbol{v}$ befände.

Wenn wir hier den Zylinder als ruhend bezeichnen, so ist es natürlich nur in dem selbstverständlichen relativen Sinne dieses Wortes gemeint. Nichts ändert sich, wenn wir dem gesamten System von Zylinder und Flüssigkeit eine gleichmäßige Translationsbewegung erteilen, nur daß man dann $\boldsymbol{v}$ als die Geschwindigkeit der Strömung relativ zum Zylinder zu deuten hat. Führen wir ein Bezugsystem ein, relativ zu dem die Strömung die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und der Zylinder die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_c$ hat, so ist die Kraft pro Längeneinheit des Zylinders:

$$\boldsymbol{f} = q_0(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_c) \times \boldsymbol{i}. \tag{1}$$

Dabei stellt $\boldsymbol{i}$ die totale Wirbelstärke dar, die man durch die Zirkulation um dem Zylinder messen kann. Wenn nun der Zylinder relativ zum äußeren Koordinatensystem ruht, $\boldsymbol{v}_c = 0$, so erhalten wir das alte Gesetz:

$$\boldsymbol{f} = q_0 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{i}. \tag{2}$$

Bewegt sich dagegen der Zylinder mit der gleichmäßigen Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_c$, während die Translationsgeschwindigkeit der Flüssigkeit Null ist, $\boldsymbol{v} = 0$, so ist die Kraft:

$$\boldsymbol{f} = q_0 \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{v}_c. \tag{3}$$

Haben schließlich Zylinder und Flüssigkeit die gleiche Translationsgeschwindigkeit relativ zum äußeren Bezugsystem, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_c$, so verschwindet die Kraft:

$$\boldsymbol{f} = 0, \tag{4}$$

ein Resultat, dessen ausdrückliche Betonung trotz seiner Selbstverständlichkeit nicht überflüssig ist, weil es unter etwas komplizierteren Verhältnissen nicht so klar zutage tritt. Dieses Verschwinden jeder Feldkraft entspricht dem HELMHOLTZschen Fall, wo Wirbel, ohne dynamisch zu reagieren, in der Strömung treiben.

Nach der Formel (3) erfährt ein zylindrischer Körper von beliebigem Profil, der sich in horizontaler Lage mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_c$ durch ruhende Luft bewegt, und um den eine durch $\boldsymbol{i}$ gemessene Luftzirkulation vorhanden ist, pro Längeneinheit die Auftriebskraft (3). Nach (2) ergibt sich die entsprechende Auftriebskraft für einen ruhenden Zylinder mit der Zirkulation $\boldsymbol{i}$ in einem Winde der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Es ist in beiden Fällen die bekannte Auftriebskraft, die einen Tragflügel beliebigen Profils hebt (qualitativ das Gesetz von LANCHESTER, quantitativ von KUTTA und JOUKOWSKI).

Die Zirkulation, auf der diese Auftriebskraft beruht, entsteht von selbst, wenn das Profil des Tragflügels eine geeignete Asymmetrie relativ zur Strömung hat. Ein Körper, der keine solche Asymmetrie aufweist, ist der Kreiszylinder. Dabei wäre es bei vollkommen reibungsloser Flüssigkeit gleichgültig, ob er um seine Achse rotiert oder nicht. Ist dagegen Reibung vorhanden, so entsteht um den rotierenden Kreiszylinder eine Zirkulation, und es greift die Kraft (2) an dem rotierenden Zylinder an, wenn er in einem Luftstrome ruht, und die Kraft (3), wenn er sich unter Rotation durch ruhende Luft translatorisch bewegt. Man hat den zuerst von MAGNUS (1853) experimentell gefundenen Effekt, der länger als ein Jahrhundert die Ballistiker in so große Verlegenheit gebracht hat. Lord RAYLEIGH hat zuerst in direkter Form die Theorie des MAGNUS-Effektes gegeben (1878), ohne jedoch zu erkennen, daß sein Resultat als sehr spezieller Fall in dem obenerwähnten Satz von Lord KELVIN enthalten ist. Der letztere hat offenbar seinerseits MAGNUS' Versuch nicht gekannt, da er ihn sonst als Bestätigung seiner Theorie herangezogen haben würde. Den viel später auftretenden Tragflügeltheoretikern scheint Lord KELVINS Arbeit unbekannt geblieben zu sein.

Die Haupterscheinungen des Rotoreffektes verifiziert man leicht mit Kreiszylindern, die mit vertikaler Achse im Wasser schwimmen und in geeigneter Weise in Rotation versetzt werden können. (Sehr zweckmäßig baut man in den Zylinder einen möglichst schweren Kreisel ein, der dem Zylinder durch die Reibung allmählich seine Rotation erteilt.) Man beobachtet dann die folgenden Erscheinungen: Befindet sich der rotierende Zylinder in der Mitte eines ruhenden Gefäßes, so behält er seine Lage relativ zu dem Gefäße bei, auch wenn dieses translatorisch bewegt wird. Das ist der HELMHOLTZsche Fall, wo der Wirbel mit der Strömung treibt. Verhindert man aber mittels eines Fadens den rotierenden Zylinder, die Translation des Gefäßes mitzumachen, so schlägt er entsprechend der Gleichung (2) transversal aus. Läßt man das Gefäß ruhen, und versucht man mittels des Fadens den rotierenden Zylinder durch die Flüssigkeit zu ziehen, so schlägt er nach Gleichung (3) seitlich aus.

Der einfachste Versuch, den Rotoreffekt in Luft zu zeigen, dürfte der folgende sein. Einen Bindfaden (1,5 m), der in einer Öse endet, wickelt man um die Mitte eines Hohlzylinders aus Papier, Pappe oder Celluloid (z. B. Länge 30—40 cm, Durchmesser 4—5 cm, Wandstärke 0,2—2 mm), legt den Zylinder auf einen Tisch, so daß das freie Ende des Bindfadens mit der Öse unten etwas hervorragt, steckt das Ende eines leichten Bambusstabes (1,5 m Länge) in die Öse hinein und zieht mit möglichst großer Geschwindigkeit den Faden. Der Zylinder bewegt sich dann längs des Tisches unter rascher Rotation, deren Richtung der beim Rollen auftretenden entgegengesetzt ist.

Sobald der Zylinder von der Schnur frei ist, hebt er sich und beschreibt eine Bahn, die theoretisch eine Trochoide ist, und zwar je nach den Anfangsbedingungen, eine mit Öse, eine mit Spitze (Zykloide) oder eine nur wellenförmige. Der Grenzfall einer horizontalen Geraden ist mit einbegriffen, es ist der Fall des reinen Schwebens, der dann eintritt, wenn Schwere und ablenkende Rotorkraft sich das Gleichgewicht halten. Wegen der Abnahme sowohl der Translation wie der Rotation infolge der Reibung ist das Schweben immer auf eine endliche Strecke begrenzt, und man bekommt nur eine Welle, eine Spitze oder eine Öse der Trochoide und höchstens eine schwache Andeutung der zweiten. Das horizontale Schweben wird ebenfalls durch eine ziemlich plötzliche Umbiegung nach unten unterbrochen. Neigt man die Tischplatte in geeignetem Maße, so kann man erzielen, daß von der ganzen Bahnkurve nur die Öse zur Entwicklung kommt. Dabei kann es vorkommen, daß derjenige, der den Zylinder abschießt, von seinem eigenen Schuß im Rücken getroffen wird. Dies ist der Bumerangeffekt in reinster Form.

4. *Fernwirkungen.* Der mit der Wirbelstärke $\boldsymbol{i}$ oder einer entsprechenden Zirkulationskonstanten rotierende Zylinder befinde sich jetzt in dem Stromfelde, das ein anderer im Abstand ϱ rotierender Zylinder mit paralleler Achse und der Wirbelstärke $\boldsymbol{i}'$ erzeugt. Drücken wir das $\boldsymbol{v}$ in Formel (2) als von diesem zweiten Zylinder herrührend aus, so finden wir pro Längeneinheit eine rein radiale Kraft:

$$\boldsymbol{f} = q_0 \, {}_{2\pi\varrho} \, . \tag{5}$$

Die Kraft ist positiv oder abstoßend, wenn i und i' dasselbe Vorzeichen haben, also die Zylinder in gleicher Richtung rotieren, dagegen negativ oder anziehend, wenn i und i' entgegengesetzte Vorzeichen, also entgegengesetzte Rotationsrichtungen haben. Identisch dieselbe Formel, nur mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, gilt für die entsprechende Wechselwirkung von elektrischen Strömen der Stromstärken i und i'.

Man verifiziert das Resultat leicht experimentell durch zwei Zylinder wie der oben erwähnte, die mit vertikaler Achse schwimmen. Man sieht, daß sie sich abstoßen, wenn sie gleichsinnig rotieren, und anziehen, wenn sie in entgegengesetzter Richtung rotieren. Überläßt man aber die Zylinder sich selbst, so fängt jeder derselben allmählich an, mit dem von dem anderen erzeugten Strome zu treiben, und dann sind die Voraussetzungen der Formel (5) oder der ursprünglichen (2), daß der Zylinder keine Translationsbewegung haben darf, nicht mehr vorhanden: man nähert sich immer mehr den Bedingungen der Formel (4), so daß die Kraft aufhört. Wenn man aber dieses Treiben der Zylinder mittels Fäden verhindert, sieht man die Anziehungs- oder Abstoßungskraft wieder deutlich einsetzen.

Ein rotierender Zylinder wird von der ebenen Wand des Gefäßes angezogen; es ist eine Anziehung, die man nach dem Spiegelungsprinzip auf die Anziehung zwischen dem Zylinder und seinem Spiegelbild hinter der Wand zurückführen kann. Allmählich fängt der Zylinder auch an, längs der Wand zu treiben; er treibt, kann man sagen, mit der von seinem Spiegelbilde erzeugten Strömung. Gleichzeitig damit nimmt die Anziehung durch die Wand ab; sie setzt jedoch wieder in voller Stärke ein, wenn man durch einen Faden die Bewegung des Zylinders längs der Wand verhindert.

Wenn R und R' die Radien, v und v' die Peripheriegeschwindigkeiten der rotierenden Zylinder sind, so sind die Wirbelintensitäten $i = 2\pi R v$, $i' = 2\pi R' v'$, und die Formel (5) für die Wechselwirkung der beiden Zylinder wird:

$$f = 2\pi q_0 \frac{RR'}{\varrho} v v' \tag{6}$$

Wenden wir diese Formel auf gleich große Zylinder an, $R = R'$, die mit entgegengesetzt gleichen Peripheriegeschwindigkeiten $v = -v'$ rotieren, so ergibt sich:

$$f = -2\pi q_0 \frac{R^2}{\varrho} v^2 . \tag{7}$$

Diese Formel gilt auch für die Anziehung zwischen einem rotierenden Zylinder und einer ebenen Wand, wenn ϱ der Abstand von dem Spiegelbilde hinter der Wand ist oder der doppelte Abstand der Zylinderachse von der Wand. Ihren größten Wert erreicht diese Anziehungskraft, wenn beide Zylinder miteinander in Berührung sind bzw. der eine Zylinder in Berührung mit der Wand ist. In diesem Falle, $\varrho = 2R$, wird die Kraft pro Längeneinheit des Zylinders:

$$f = -\pi q_0 R v^2 . \tag{8}$$

Diese Kraft ist in den folgenden beiden Tabellen berechnet. Die erste Tabelle gilt für Wasser und ist für Zylinder- oder Wirbelradien von einem Millimeter bis zu einem Meter berechnet und für Peripheriegeschwindigkeiten von einem halben bis zu 10 m in der Sekunde. Die zweite Tabelle gilt für Luft und ist für Wirbelradien von 0,1 mm bis zu 100 m und für ein entsprechend größeres Geschwindigkeitsintervall berechnet. Von der in M.T.S.-Einheiten ausgedrückten Kraft pro Meter längs des Wirbels gelangt man angenähert zu der entsprechenden in Kilogrammgewicht ausgedrückten Kraft durch Multiplikation mit 100.

5. *Flüssigkeitswiderstand.* Wenn eine Flüssigkeit an einem ruhenden Körper vorbeiströmt, werden die Teilchen einer dünnen Schicht nahe an der Körperoberfläche verzögert. Die verzögerten Teilchen häufen sich hinter dem Körper an und befinden sich hier in wirbelnder Bewegung, weil die Teilchen nahe am Körper kleinere Geschwindigkeiten

A. Anziehung (M.T.S.) eines Wasserwirbels an eine Wand.

R \ v	0,5 m/sec	1 m/sec	2 m/sec	5 m/sec	10 m/sec
1 mm	$7{,}85 \cdot 10^{-4}$	$3{,}14 \cdot 10^{-3}$	$1{,}26 \cdot 10^{-2}$	$7{,}85 \cdot 10^{-2}$	0,314
1 cm	$7{,}85 \cdot 10^{-3}$	$3{,}14 \cdot 10^{-2}$	0,126	0,785	3,14
1 dm	$7{,}85 \cdot 10^{-2}$	0,314	1,26	7,85	31,4
1 m	$7{,}85 \cdot 10^{-1}$	3,14	12,6	78,5	314

B. Anziehung (M.T.S.) eines Luftwirbels an eine Wand.

R \ v	0,2 m/sec	0,5 m/sec	1 m/sec	2 m/sec	5 m/sec	10 m/sec	20 m/sec	50 m/sec	100 m/sec
0,1 mm	$1{,}62 \cdot 10^{-8}$	$1{,}02 \cdot 10^{-7}$	$4{,}1 \cdot 10^{-7}$	$1{,}62 \cdot 10^{-6}$	$1{,}02 \cdot 10^{-5}$	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	$1{,}62 \cdot 10^{-4}$	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$	0,0041
1 „	$1{,}62 \cdot 10^{-7}$	$1{,}02 \cdot 10^{-6}$	$4{,}1 \cdot 10^{-6}$	$1{,}62 \cdot 10^{-5}$	$1{,}02 \cdot 10^{-4}$	$4{,}1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}62 \cdot 10^{-3}$	0,0102	0,041
1 cm	$1{,}62 \cdot 10^{-6}$	$1{,}02 \cdot 10^{-5}$	$4{,}1 \cdot 10^{-5}$	$1{,}62 \cdot 10^{-4}$	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$	0,0162	0,102	0,41
1 dm	$1{,}62 \cdot 10^{-5}$	$1{,}02 \cdot 10^{-4}$	$4{,}1 \cdot 10^{-4}$	$1{,}62 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{-2}$	$4{,}1 \cdot 10^{-2}$	0,162	1,02	4,1
1 m	$1{,}62 \cdot 10^{-4}$	$1{,}02 \cdot 10^{-3}$	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$	$1{,}62 \cdot 10^{-2}$	0,102	0,41	1,62	10,2	4,1
5 „	8,1 „	5,07 „	0,02	0,081	0,507	2,0	8,1	50,7	203
10 „	$1{,}62 \cdot 10^{-3}$	$1{,}02 \cdot 10^{-2}$	0,041	0,162	1,02	4,1	16,2	102	406
20 „	3,25 „	2,03 „	0,081	0,325	2,03	8,1	32,5	203	812
30 „	4,87 „	3,05 „	0,122	0,487	3,05	12,2	48,7	305	1220
40 „	6,50 „	4,06 „	0,162	0,650	4,06	16,2	65,0	406	1620
50 „	8,12 „	5,08 „	0,203	0,812	5,08	20,3	81,2	508	2030
100 „	16,2 „	10,2 „	0,406	1,62	10,2	40,6	162	1020	4060

haben als die weiter entfernten. Diese aus verzögerten Massen bestehenden Wirbel wachsen an, bis sie so groß geworden sind, daß sie vom äußeren Strome mitgeführt werden; dann fängt das Spiel von neuem an. Es bildet sich hinter dem Körper ein wirbelndes Kielwasser, und der Energieverlust durch diese Wirbelbildung erklärt den Flüssigkeitswiderstand (PRANDTL*sche Grenzschichttheorie*). Sehr gut wird die Theorie durch die Beobachtung der BESNARD-KÁRMÁNschen Wirbelstraße hinter einem in strömendem Wasser ruhenden Zylinder bestätigt. Eigentlich sollen hinter dem Zylinder zwei symmetrische, entgegengesetzt rotierende Wirbel sich gleichzeitig bilden und gleichzeitig ablösen. Da der Vorgang aber nie vollständig symmetrisch verläuft, löst sich der eine Wirbel zuerst los, und danach lösen sich die Wirbel in regelmäßiger Reihenfolge los, abwechselnd auf der einen und der anderen Seite, was nach KÁRMÁN auch die einzige stabile Anordnung gibt.

Die regelmäßige Ablösung von Wirbeln mit abwechselnd entgegengesetzter Zirkulationsrichtung hat eine interessante Folge, auf die wir beiläufig aufmerksam machen. Um den Zylinder muß immer eine Zirkulation zurückbleiben, die der Zirkulation des zuletzt abgegangenen Wirbels entgegengesetzt gerichtet ist. Folglich muß auf den Zylinder eine Kraft (2) wirken, wo $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit des Stromes ist und $\boldsymbol{i}$ die Intensität des periodisch wechselnden Wirbelfeldes um den Zylinder. Diese periodische Kraft sucht dann den Zylinder in Schwingungen senkrecht zur Stromrichtung zu versetzen, entsprechend den Transversalschwingungen eines Leitungsdrahtes, der in einem konstanten Magnetfelde einen Wechselstrom führt. Diese Schwingungen sind leicht nachzuweisen: versucht man mit der Hand einen zylindrischen Stab in strömendem Wasser in Ruhe zu halten, so gelingt dies nur schwer, weil heftige Schwingungen quer zur Stromrichtung auftreten. Das bekannte Singen der Telegraphendrähte ist ein anderes Beispiel für Schwingungen dieser Art.

Von dieser Nebenerscheinung kehren wir zu dem eigentlichen in der Stromrichtung wirkenden Flüssigkeitswiderstand des Zylinders zurück. Wie erwähnt, erklärt man ihn summarisch durch den Arbeitsverlust bei der Wirbelbildung. Wir können aber einen Schritt weiter gehen und ihn speziell durch die Anziehung zwischen dem Zylinder und dem noch anhaftenden, in Bildung begriffenen Wirbel erklären. Die Anziehung zwischen dem sich bildenden Wasserwirbel und dem ruhenden Zylinder entspricht der obenerwähnten Anziehung eines rotierenden Zylinders durch eine ruhende Wand. Wegen des minimalen Abstandes ist die Anziehung die größte, die bei den vorkommenden Bewegungen auftreten kann. Nach dem Loslösen nimmt jedoch die Kraft schnell ab, und zwar aus zwei Gründen: wegen des wachsenden Abstandes und weil sich der HELMHOLTZsche Fall der Kraft Null allmählich

einstellt. Dafür wächst aber die Kraft an, die von dem auf der anderen Seite sich entwickelnden Wirbel herrührt.

Gehen wir zu einem Körper beliebiger Form über, so ist nach dieser Auffassung der größte Widerstand bei solchen Körpern zu erwarten, die so geformt sind, daß sich hinter ihnen Wirbel leicht bilden und gut haften. Dies trifft besonders für flache Körper mit scharfer Kante zu, die quer zur Stromrichtung stehen oder sich quer zu ihrer Fläche bewegen. Beim Rudern bildet sich am Rande des flachen Ruderblattes ein Wirbel, der etwas nachhängt, wenn sich das Ruderblatt durch das Wasser bewegt. Die Anziehung zwischen dem Ruderblatt und diesem nachhängenden Wirbel gibt den Widerstand, auf dem die Ruderwirkung beruht. In ähnlicher Weise erklärt sich die Wirkung des Fischschwanzes. Die Wirkung der Flügelschläge der Vögel und der Insekten beruht ebenfalls auf der Anziehung zwischen den Flügeln und den besonders an ihrem hinteren Rande sich bildenden, etwas nachhängenden Wirbeln.

Wenn diese Auffassung richtig ist, so müßte man, allerdings nur in erster roher Annäherung, die Widerstände nach der Formel (8) berechnen können, welche die Anziehungskraft pro Meter Länge gibt zwischen einem Wirbel und der ebenen Fläche, an der er haftet. Man setzt dabei in erster Annäherung die Peripheriegeschwindigkeit des Wirbels gleich der Geschwindigkeit, welche die flüssigen Massen am Rande des Körpers relativ zum Körper haben.

Die Formel (8) führt dann zu einem *Widerstand proportional dem Quadrate der Gleitgeschwindigkeit am Rande des Körpers.* Die Zahlenwerte des Widerstandes pro Meter Länge des Wirbels kann man dann für Wasser und für Luft den obigen beiden Tabellen (S. 269) entnehmen. Dabei können die Werte zu groß ausfallen, weil die Ebene nicht unbegrenzt, sondern begrenzt ist, und zwar nach der einen Seite ziemlich eng begrenzt. Die Werte können aber auch zu klein ausfallen, weil die wirklichen Wirbel sich der Fläche viel enger anschmiegen als der zirkular-zylindrische Wirbel, auf den sich die Tabellen beziehen. Welcher von diesen einander entgegenwirkenden Fehlern der größere ist, läßt sich nicht von vornherein entscheiden. Wir nehmen deshalb an, daß sie sich in erster Annäherung aufheben. Ein anderer unsicherer Faktor ist sodann die von uns als Gleitgeschwindigkeit bezeichnete Geschwindigkeit am Rande des Körpers. Für einfache Körper in der reibungslosen Flüssigkeit kann man diese Gleitgeschwindigkeit berechnen. Es sei v die Geschwindigkeit, mit der sich eine Kugel oder ein Kreiszylinder durch die ruhende Flüssigkeit bewegt (der letztere senkrecht zu sich selbst), dann ist die Gleitgeschwindigkeit am Äquatorkreise der Kugel $-\frac{3}{2}v$, an den äußersten Erzeugenden des Zylinders $-2v$. Sie wird jedoch unendlich für unendlich dünne Körper, die sich senkrecht zu

ihrer Breitenerstreckung bewegen. Unter Berücksichtigung der Reibung ist die Geschwindigkeit unmittelbar am Körper Null, jedoch hat man eine maximale Relativgeschwindigkeit unmittelbar außerhalb der Grenzschicht. Welche Werte man unter diesen Umständen für die Gleitgeschwindigkeit zu setzen hat, läßt sich nur durch das Experiment entscheiden. Wir rechnen aber sicher nicht mit einem zu großen Wert, wenn wir im folgenden diese Relativgeschwindigkeit am Rande eines Ruderblattes oder der Flügel eines Vogels oder eines Insektes wie beim Zylinder gleich $2v$ setzen.

Bewegt sich nun ein Ruderblatt mit einer Geschwindigkeit von einem halben Meter pro Sekunde durch das Wasser, so setzen wir die Relativgeschwindigkeit am Rande und damit die Peripheriegeschwindigkeit des nachhängenden Randwirbels gleich 1 m in der Sekunde. Ist der Radius dieses Wirbels gleich 1 cm und seine Länge 1 m, so gibt die Tabelle (A) $3{,}14 \cdot 10^{-2}$ MTS Krafteinheiten oder rund 3,2 kg. Nimmt man den doppelten Wert 2 cm für den Radius des Randwirbels, so kommt man auf die doppelte Kraft von 6,4 kg. Der Rudernde wird an dem kürzeren Ende des Hebels mit jedem Arm etwa das Doppelte dieser Kräfte zu leisten haben, also bzw. 6,4 und 12,8 kg: man erhält gleich die richtige Größenordnung.

Als weiteres Beispiel ist in der beigefügten Tabelle, nach zoologischen Handbüchern und einer Spezialarbeit[1]), in den drei ersten Kolonnen Gewicht, Flügellänge (ausgebreitet) und Zahl der Flügelschläge in der Sekunde für einige Vögel und Insekten angegeben. Daraus ist in der vierten Kolonne die mittlere Geschwindigkeit an den Flügelspitzen berechnet unter der Voraussetzung, daß der Ausschlag sowohl nach oben wie nach unten 45° beträgt, die ganze Winkelbewegung also 90°, ein Durchschnittswert, der für einzelne Vögel zu klein, für die meisten Insekten vielleicht etwas zu groß sein dürfte. Sodann sind in der fünften Kolonne rein hypothetisch angenommene Radien der gebildeten Randwirbel angeführt. Der Radius ist bei der Möwe gleich 1 cm gesetzt und für die übrigen proportional den linearen Dimensionen der Flügel. Hier kommt natürlich eine große Unsicherheit hinein. Der Wirbel bildet sich bei jedem Flügelschlag neu und wächst während des Schlages bis zu einem gewissen Maximalwert. Für diesen Maximalwert gibt die Breite des Flügels eine obere Grenze, von der man nicht weiß, ob sie erreicht wird. Der effektive Mittelwert des Wirbelradius ist demnach schwer abzuschätzen.

In der sechsten Kolonne findet man dann die nach der Tabelle (B) berechnete Kraft für einen Abwärtsschlag beider Flügel. Dabei ist die Peripheriegeschwindigkeit des Randwirbels gleich der doppelten Geschwindigkeit der Flügel*spitze* gesetzt worden. Da man hierdurch einen zu großen Wert erhalten würde, ist aber nur die äußere Hälfte

[1] Demoll: Der Flug der Insekten und der Vögel. Jena 1918.

des Flügels als effektiv gerechnet worden, d. h. die Länge des tragenden Wirbels ist gleich dem halben Umfang beider Flügel statt gleich ihrem vollen Umfang gesetzt worden. Für die Hummel und die Biene, die zwei Paar Flügel haben, hat man nur mit dem vorderen prinzipalen Flügelpaar gerechnet. In der vorletzten Kolonne sind diese Hebkräfte eines Abwärtsschlages durch das Gewicht des fliegenden Tieres dividiert worden, und in der letzten Kolonne ist die Hälfte dieser Zahlen als mittlere Hebkraft der Flügelschläge gegeben, wobei gleiche Dauer der Aufwärts- und der Abwärtsbewegung der Flügel vorausgesetzt ist. Nach diesen Zahlen tragen die größeren Flieger, Storch, Möwe, Taube, Sperling usw. $^1/_5$, $^1/_3$, $^1/_4$ und $^1/_5$ ihrer Körpergewichte

	Gewicht g	Flügellänge m	Flügelschläge pro sec	Geschw. an Flügelspitze m/sec	Wirbelradius (hypothetisch) cm	Hebkraft des Abwärtsschlages g	Spez. Hebkraft des Abwärtsschlages	Spez. Hebkraft im Mittel
Storch	3500	0,91	2	5,7	1,5	1480	$^2/_5$	$^1/_5$
Möwe	1000	0,60	3	5,65	1	640	$^2/_3$	$^1/_3$
Taube	350	0,30	6	5,65	0,5	160	$^1/_2$	$^1/_4$
Sperling	30	0,11	13	4,5	0,183	13	$^2/_5$	$^1/_5$
Hummel	0,12	0,012	240	9,0	0,02	0,72	5	2,5
Biene	0,067	0,010	200	6,3	0,017	0,23	3,5	1,7
Fliege	0,011	0,007	190	4,2	0,011	0,044	4	2

durch die Abwärtsschläge der Flügel und folglich etwa $^4/_5$, $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ durch den Segelflug während der Zeit der Aufwärtsbewegung der Flügel, eine Zeit, die jedoch, besonders bei den großen Vögeln, wesentlich länger als die Zeit des Abwärtsschlages ist. Hieraus folgt für diese Vögel sowohl eine vergrößerte Wirkung der Abwärtsschläge, wie eine vollständigere Ausnutzung der Segelflugwirkung: das ist die höchste Technik des Fliegens. Für die Insekten verliert dagegen die Segelflugwirkung jede Bedeutung, dafür haben sie aber das Vermögen, sich an Ort und Stelle in der Luft schwebend zu erhalten. Dies steht in Übereinstimmung mit den Zahlen der Tabelle: die Abwärtsschläge genügen um mehr als ihr Gewicht zu tragen und geben einen Überschuß, um die von den Aufwärtsschlägen der Flügel herrührende abwärts gerichtete Kraft zu kompensieren. Nur durch passende Vergrößerung der Anzahl und der Amplitude der Flügelschläge können die Vögel dasselbe leisten oder steil aufwärts steigen.

Man darf aber die Bedeutung der in der Tabelle gegebenen Resultate nicht überschätzen. Die Fehlerquellen sind zahlreich, und schon die zoologischen Daten sind nicht unangreifbar. Es ist uns nicht gelungen, die zusammengehörigen Daten über Gewicht, Flügellänge und Zahl der Schläge in demselben zoologischen Werke zu finden, und die von uns

zusammengestellten Daten beziehen sich deshalb nie auf ein und dasselbe Exemplar und vielleicht auch nicht immer auf dieselbe Varietät innerhalb der Art. Mit der größten Unsicherheit sind die Peripheriegeschwindigkeiten und die Radien der tragenden Wirbel behaftet, und es wäre zu wünschen, sie durch Beobachtungen und Modellversuche direkt zu bestimmen.

Versucht man auf der hier gegebenen Grundlage sich von dem allgemeinen Widerstandsgesetz ein Bild zu machen, und zwar zunächst für flache quer gestellte Körper, so werden sich in erster Linie die Länge des Randwirbels und damit die linearen Dimensionen des flachen Körpers geltend machen. In zweiter Linie kommt dann die Fläche des Körpers quer zur Strömungsrichtung, weil der größere Flächeninhalt die Ausbildung von Wirbeln mit größeren Radien gestattet. Eine direkte Proportionalität des Widerstandes mit der Fläche ist aber nicht zu erwarten und wird auch nicht durch Messungen gefunden, sondern man findet z. B. für langgestreckte Rechtecke einen größeren Widerstand pro Flächeneinheit als für Quadrate. So finden IRMINGER und NÖKKENTVED[1] für ein Rechteck von 302 mm Länge und 40 mm Breite einen fast doppelt so großen Widerstand pro Flächeneinheit als für ein Quadrat von 50 mm Seitenlänge. Der gesamte Widerstand des angegebenen Rechtecks betrug nach ihren Messungen bei Geschwindigkeiten von 12,84 und 19,70 m in der Sekunde im Windkanal bzw. 2,4 und 5,7 kg. Hinter diesem Rechteck haben gerade zwei zirkulare Wirbel von 10 mm Radius Platz. Setzen wir die Peripheriegeschwindigkeiten dieser Wirbel gleich der doppelten Geschwindigkeit im Windkanal, so gibt unsere Tabelle B die Kräfte 2,7 und 6,4 kg, also etwa 11% zuviel, was nicht überraschen darf, wenn man bedenkt, daß die Tabelle B die Anziehung des Wirbels durch eine unbegrenzte Ebene gibt, während im vorliegenden Fall die Breite des Rechteckes nur zwei Wirbeldurchmesser beträgt. Es wäre jedoch von Interesse, diese Messungen unter Beobachtung der Wirbelbewegung zu wiederholen.

Eine Verkleidung des plattenförmigen Körpers nach vorn oder nach hinten vermindert bekanntlich den Widerstand, und zwar besonders eine solche nach hinten. Man erkennt unmittelbar den Grund: Beim langgestreckten Körper ist die Gleitgeschwindigkeit am Rande und damit auch die Peripheriegeschwindigkeit des Widerstandswirbels kleiner, und eine Verkleidung der Hinterseite ist deshalb am wirksamsten, weil dadurch auch der Raum verkleinert wird, wo der Widerstandswirbel bestehen kann.

In diesem Zusammenhang muß man noch eine weitere Luftbewegung erwähnen, bei der sich unzweifelhaft die Anziehung nachhängender

[1] IRMINGER u. NÖKKENTVED: Windpressure on Buildings. Kopenhagen 1930.

Wirbel geltend macht. Besonders schön ausgebildete nachhängende Wirbel hat man in den beiden parallelen Wirbeln, die von den Enden eines bewegten Tragflügels nach rückwärts führen und sich hinten zu dem kinematisch notwendigerweise geschlossenen Wirbel vereinigen. Man kann diesen geschlossenen Wirbel schematisch als ein Rechteck auffassen, mit zwei Seiten b und b' von unveränderlicher Länge gleich der Länge des Tragflügels und zwei Seiten a und a', die parallel der Flugrichtung sind und mit einer Geschwindigkeit gleich der des Fluges anwachsen. Ist i die Wirbelintensität dieses Wirbels, so üben die drei Seiten a, b', a' eine Anziehung auf die Seite b aus, die gleich der Abstoßung ist, die der elektrische Strom a, b', a' auf b ausübt. Formeln für diesen Widerstand kann man ohne weiteres dem Formelvorrat des Elektromagnetismus entnehmen. Man kennt den Ausdruck des Selbstinduktionskoeffizienten einer rechteckigen Strombahn mit den Seitenlängen a und b und dem Drahtradius c. Durch Differentiation dieses Ausdruckes nach a findet man die Kraft, die auf die Seite b ausgeübt wird. Die entgegengesetzte Kraft tritt im hydrodynamischen Fall auf, wenn der Wirbel dieselbe einfache Form hat. In dem Grenzfall, wo a unendlich lang im Verhältnis zu b ist und man den Strom als Oberflächenstrom auf der Leitung ansieht, findet man z. B. die einfache Formel[1]:

$$F = \frac{i^2}{2\pi} q \log \frac{b}{c}. \tag{9}$$

Sie bezieht sich auf einen sehr idealisierten Fall, der jedoch als Beispiel für die Beziehung zwischen Flüssigkeitswiderstand und hydrodynamischen Feldkräften nicht ohne Interesse ist.

74. Meteorologische Anwendungen. Ähnlich wie hinter Häusern bilden sich hinter Bergrücken häufig große Luftwirbel, die wegen der Anziehung durch den Bergrücken und den Boden sich stabil behaupten können, ohne fortzutreiben.

Daneben haben wir aber auch die freien atmosphärischen Wirbel, Wasserhosen, Tromben, Tornados und die Zyklonen und Antizyklonen zu betrachten. Wenn diese Wirbel ihre Lagen behaupten und nicht der eine im zirkulierenden Felde des anderen treibt, so müssen die Anziehungs- und Abstoßungskräfte zur Wirkung kommen. Die Kräfte, die dabei bei den kleineren Wirbeln wie Wasserhosen und Tornados auftreten, kann man der Tabelle B (S. 269) entnehmen. Vor allem interessiert uns aber, ob merkbare Wirkungen bei Zyklonen und Antizyklonen auftreten. Wie beim Versuch mit den rotierenden Zylindern müssen zwei Zyklonen und zwei Antizyklonen sich abstoßen, während Zyklone und Antizyklone sich gegenseitig anziehen müssen.

[1] Mascart: Comptes rendus, Paris 1894 I, S. 278.

In diesem Falle sind nicht so sehr die von den Wirbeln aufeinander ausgeübten Kräfte **73** (5) bis (8) von Bedeutung, als vielmehr die Beschleunigungen, die sie einander erteilen. Um diese zu finden, haben wir die Kräfte durch die effektiven Massen pro Längeneinheit der Zylinder zu dividieren. Wegen der vertikalen Stabilität der Atmosphäre ist die Bewegung überwiegend zweidimensional-horizontal, und die effektive Masse eines Zylinders ist dann gleich seine Masse, vergrößert um die Masse des von ihm verdrängten Flüssigkeitsvolumens. Nun ist die Masse des Zylinders pro Längeneinheit $q\pi\varrho^2$, und die verdrängte Luftmasse ebenso groß. Die effektive Masse, mit der wir zu dividieren haben, wird somit $2\pi q\varrho^2$, und folglich die aus Formel **73** (7) folgende Beschleunigung:

$$j = \frac{v^2}{2R}.$$

Die Tabelle gibt die Werte dieser Beschleunigung in m/sec² für verschiedene Radien und Peripheriegeschwindigkeiten der Wirbel.

R \ v	1 m/sec	2 m/sec	5 m/sec	10 m/sec	20 m/sec	50 m/sec	100 m/sec
10 m	0,05	0,2	1,25	5	20	125	500
100 „	0,005	0,02	0,125	0,5	2	12,5	50
1 km	0,0005	0,002	0,0125	0,05	0,2	1,25	5
10 „	0,00005	0;0002	0,00125	0,005	0,02	0,125	0,5
100 „	0,000005	0,00002	0,000125	0,0005	0,002	0,0125	0,05
1000 „	0,0000005	0,000002	0,0000125	0,00005	0,0002	0,00125	0,005

Zwei unmittelbar aneinandergrenzende tropische Zyklonen, deren Durchmesser 100 km und deren Peripheriegeschwindigkeit 10 m beträgt, beeinflussen sich also gegenseitig so, daß jede eine Beschleunigung $^1/_{1000}$ m/sec² von dem gemeinschaftlichen Schwerpunkt fort erhält. In 10000 Sekunden oder etwa 3 Stunden ergibt dies die ganz beträchtliche Geschwindigkeit von 10 m/sec. Es müßte also eine sehr bedeutende Wirkung sein, wenn die fundamentale Voraussetzung erfüllt ist, daß nicht die eine Zyklone in der zirkulierenden Bewegung um die andere mitgeführt wird, wie es gewöhnlich der Fall ist, wenn die Zyklonen nicht infolge ganz besonderer Bedingungen ihren Platz behaupten können. Für die zehnmal größeren außertropischen Zyklonen beträgt die Beschleunigung nur den zehnten Teil, und die Geschwindigkeit von 10 m/sec wird erst nach 30 Stunden erreicht. Aber auch dies sind Werte, die für die täglichen Wettervorhersagen von Bedeutung sein würden, wenn die wirklichen Bedingungen für das Zustandekommen des Effektes vorhanden wären, was wohl in den meisten Fällen nur in beschränktem Maße der Fall ist. Es ist zu beachten, daß wir in dieser Verbindung die Erddrehung nicht mit in Betracht gezogen haben, was natürlich geschehen muß, ehe man zu praktischen Anwendungen des

Effektes geht. Eins ist aber klar: es kann sich um Effekte von solcher Größe handeln, daß man die Aufmerksamkeit auf sie richten muß.

Gehen wir von der friedlichen irdischen Atmosphäre zu den Gewalterscheinungen in einer Gasmasse über, wie sie die Sonne darstellt, und wo gewaltsame Zirkulationen auf thermischem Wege unterhalten werden, so können die Bedingungen für große Effekte dieser Art vorhanden sein. Wenn, wie es wohl wahrscheinlich ist, die Sonnenflecke Wirbel sind oder jedenfalls mit intensiven Wirbelbewegungen verbunden sind, so hat man allen Grund, seine Aufmerksamkeit auf Effekte dieser Art zu richten.

Siebentes Kapitel.

Hydrodynamische Störungsgleichungen.

75. Methode der Linearisierung der LAGRANGEschen hydrodynamischen Gleichungen. Unter Anwendung der hydrodynamischen Gleichungen in ihrer exakten Form haben wir allgemeine Eigenschaften der hydrodynamischen Stromfelder untersucht und auch gewisse Integrationen derselben durchführen können. Da die Gleichungen nichtlinear sind, gelingen direkte Integrationen jedoch nur ausnahmsweise, und wir müssen einen besonderen Weg einschlagen, um die für uns nützlichen Lösungen zu erhalten.

Gewisse einfache Lösungen kann man immer erhalten, vor allem solche, die zu dem verwendeten Koordinatensystem in besonders einfacher Beziehung stehen. Bei der vollkommen freien Wahl des Koordinatensystems gibt dies einen gewissen Vorrat von einfachen Lösungen.

Jede solche einfache Lösung, die einen *Grundzustand* definiert, kann aber dann als Ausgangspunkt für die Bildung weiterer Lösungen dienen, die von der gegebenen Lösung nicht sehr abweichen. Denn für die der bekannten Lösung überlagerte kleine Störungsbewegung kann man immer lineare Gleichungen ableiten.

Solche *linearisierte Gleichungen* kann man nun entwickeln, ohne die gegebene Lösung im voraus zu spezialisieren. Dadurch erhält man *allgemeine Störungsgleichungen* für beliebig gegebene Bewegungen. Diese allgemeinen Störungsgleichungen besitzen wegen ihrer vollen Allgemeinheit eine Symmetrie, die in den Spezialfällen gewöhnlich verlorengeht.

Was zunächst die Bezeichnungen anbetrifft, so werden wir die abhängigen Variablen des Grundzustandes durch große Buchstaben und die Zuschlagsgrößen, welche die kleinen Störungen definieren, durch die entsprechenden kleinen bezeichnen. Indem wir das LAGRANGEsche

System anwenden, soll dann der Grundzustand durch die folgenden Symbole definiert sein:

$$(1) \qquad \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \text{ bzw. } \boldsymbol{\Psi} \begin{cases} \Psi_1 \\ \Psi_2, \\ \Psi_3 \end{cases} S, \ P, \ \Theta, \ F.$$

Hier sind $\boldsymbol{R}$ oder X, Y, Z die cartesischen Lagekoordinaten eines Teilchens, und $\boldsymbol{\Psi}$ oder Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 dessen allgemeine Lagekoordinaten. S, P, Θ sind spez. Volumen, Druck und Temperatur des Teilchens. F ist je nach den Umständen eine Funktion der Ortskoordinaten oder der Numerierungskoordinaten, die, gleich Null gesetzt, eine gegebenenfalls äußere oder innere Grenzfläche darstellt. Da sonst F in genau ähnlicher Weise wie die übrigen abhängigen Variablen behandelt wird, werden wir im folgenden kurz (1) das Schema der abhängigen Variablen nennen.

Zur Vereinfachung wollen wir die Numerierungskoordinaten mit den Anfangswerten der Ortskoordinaten der Teilchen zusammenfallen lassen. D. h. es soll zur Zeit

$$(2) \qquad t = 0: \quad \begin{matrix} a = X_0 \\ b = Y_0 \\ c = Z_0 \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} a = \Psi_1^0 \\ b = \Psi_2^0 \\ c = \Psi_3^0 \end{matrix}$$

sein. Die Größen (1) sind als bekannt anzusehen. Sie sind keinen weiteren Bedingungen unterworfen, als daß sie die LAGRANGEschen Gleichungen einschließlich der Grenzflächenbedingungen befriedigen, also die Gleichungen **32** (3) bis (11) in der Form, die sie unter der vereinfachenden Voraussetzung (2) annehmen.

Wir betrachten jetzt einen Bewegungszustand, der sich nur sehr wenig von dem somit definierten unterscheidet und gekennzeichnet ist durch die abhängigen Variablen:

$$(3) \ \boldsymbol{R}+\boldsymbol{r} \ \begin{matrix} X+x \\ Y+y \\ Z+z \end{matrix} \text{ bzw. } \boldsymbol{\Psi}+\boldsymbol{\psi} \ \begin{matrix} \Psi_1+\psi_1 \\ \Psi_2+\psi_2, \\ \Psi_3+\psi_3 \end{matrix} \ S+s, \ P+p, \ \Theta+\theta, \ F+f,$$

die ebenfalls das LAGRANGEsche Gleichungssystem einschließlich der Grenzflächenbedingungen befriedigen sollen. Da die Größen (1) bekannt sind, sind dadurch die Zuschlagsgrößen

$$(4) \qquad \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \text{ bzw. } \boldsymbol{\psi} \ \begin{matrix} \psi_1 \\ \psi_2, \\ \psi_3 \end{matrix} \ s, \ p, \ \theta, \ f$$

vollständig bestimmt.

Zur Vereinfachung werden wir voraussetzen, daß zur Anfangszeit $t = 0$ sämtliche Zuschlagsgrößen Null sind:

$$(5)\quad t=0:\quad \mathfrak{r}=0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \psi=0 \quad \begin{matrix} \psi_1=0 \\ \psi_2=0, \\ \psi_3=0 \end{matrix} \quad s=0,\quad p=0,\quad \theta=0,\quad f=0.$$

D. h. *zu Anfang der Zeit soll ein und dasselbe Teilchen bei der gestörten Bewegung dieselbe Lage wie bei der ungestörten einnehmen, und dasselbe Volumen, denselben Druck und dieselbe Temperatur haben.* Diese Voraussetzung beschränkt physikalisch die Art und Weise, in der die in Betracht gezogenen Störungen erzeugt sind: wir betrachten sie als durch ein beliebiges System von Momentanimpulsen erzeugt, die zur Zeit $t = 0$ plötzlich die abhängigen Variablen der Teilchen ändern. Diese Voraussetzung hat zur Folge, daß sowohl in der ungestörten wie in der gestörten Bewegung die Numerierungskoordinaten a, b, c die Anfangskoordinaten der bewegten Teilchen sind.

Um die Gleichungen für die Zuschlagsgrößen (4) abzuleiten, ist der direkte Weg der folgende: wir substituieren die abhängigen Variablen (3) in das LAGRANGEsche Gleichungssystem und nehmen die Vereinfachungen vor, die daraus folgen, daß

1. die Variablen des Grundzustandes das gesamte LAGRANGEsche Gleichungssystem befriedigen;
2. die Zuschlagsgrößen (4) sowie ihre Ableitungen kleine Größen erster Ordnung sind, so daß man alle nichtlinearen Glieder weglassen kann.

Dieses etwas umständliche Rechenverfahren kann man aber, was unmittelbar ersichtlich ist, durch das folgende sehr bequeme ersetzen:

Man bildet die Variation sämtlicher Gleichungen des Grundzustandes in bezug auf die abhängigen Variablen (1), *indem man die Variation* δ *als eine von den sonst in den Gleichungen vorkommenden Differentiationen unabhängige Operation betrachtet, und ersetzt nach vollführter Rechnung die Variationen der abhängigen Variablen durch die Größen* (4).

Nach dieser einfachen Regel kann man mit Hilfe der Gleichungen des Grundzustandes diejenigen der kleinen Störungsbewegung ohne weiteres aufschreiben, vorausgesetzt, daß die abhängigen Variablen explizite und nur explizite in den Gleichungen vorkommen. Es ist nur noch der Fall zu betrachten, daß die Gleichungen, so wie man sie schreibt, auch Größen enthalten, die implizite von den abhängigen Variablen abhängen.

Eine solche Größe ist das Potential Φ der äußeren Kraft. Ist das Kraftfeld von Stelle zu Stelle veränderlich, so ist das Potential ein anderes im Punkte $X+x, Y+y, Z+z$ als im Punkte X, Y, Z.

Bei der gestörten Bewegung kommt deshalb für ein und dasselbe Teilchen an Stelle von $\Phi(X, Y, Z)$ das Potential $\Phi(X+x, Y+y, Z+z)$, und wir haben die entsprechende Variation $\varphi = \delta\Phi$ des Potentials zu berechnen. Offenbar hat man, wenn man von Größen höherer Ordnung absieht:

$$\varphi = \delta\Phi = \boldsymbol{r}\cdot\nabla_R\Phi = x\frac{\partial\Phi}{\partial X} + y\frac{\partial\Phi}{\partial Y} + z\frac{\partial\Phi}{\partial Z} \tag{6}$$

wo sich ∇_R auf eine Differentiation nach den Koordinaten X, Y, Z bezieht. Um zu den entsprechenden Operationen in bezug auf die unabhängigen Variablen a, b, c zu kommen, verwendet man die eine Vektorgleichung bzw. die drei entsprechenden Skalargleichungen:

$$\nabla\Phi = \nabla\boldsymbol{R}\cdot\nabla_R\Phi \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial a} &= \frac{\partial\Phi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial a} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial b} &= \frac{\partial\Phi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial b} + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial b} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial c} &= \frac{\partial\Phi}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial c}, \end{aligned}$$

wo sich ∇ auf die unabhängigen Variablen a, b, c bezieht. Durch Auflösung der Vektorgleichung nach $\nabla_R\Phi$ oder der Skalargleichungen nach $\partial\Phi/\partial X$, $\partial\Phi/\partial Y$, $\partial\Phi/\partial Z$ und Einsetzen in (6) ergibt sich die Variation des Potentials bzw. mit Vektor- und Tensorbezeichnungen oder in expliziter Darstellung:

$$\begin{aligned} \varphi &= \boldsymbol{r}\cdot(\nabla\boldsymbol{R})^{-1}\cdot\nabla\Phi \\ &= \frac{1}{\dfrac{D(X,Y,Z)}{D(a,b,c)}}\left\{x\frac{D(\Phi,Y,Z)}{D(a,b,c)} + y\frac{D(X,\Phi,Z)}{D(a,b,c)} + z\frac{D(X,Y,\Phi)}{D(a,b,c)}\right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

In den Variablen $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ ist die formale Rechnung identisch dieselbe. Die gesuchte Variation des Potentials läßt sich also in ganz beliebigen Koordinaten folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned} \varphi &= \boldsymbol{\psi}\cdot(\nabla\boldsymbol{\Psi})^{-1}\cdot\nabla\Phi \\ &= \frac{1}{\dfrac{D(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)}{D(a,b,c)}}\left\{\psi_1\frac{D(\Phi,\Psi_2,\Psi_3)}{D(a,b,c)} + \psi_2\frac{D(\Psi_1,\Phi,\Psi_3)}{D(a,b,c)} + \psi_3\frac{D(\Psi_1,\Psi_2,\Phi)}{D(a,b,c)}\right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Nur muß man, wenn es sich um die Vektor- und Tensorbezeichnungen handelt, rein rechnerisch auf die Formel sehen und nur symbolisch mit der Vektorvorstellung arbeiten.

Wenn die Bewegungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten vorliegen, gehen die abhängigen Variablen implizite außer in Φ zugleich in die kinetische Energie T, **30** (11), ein, die in dem Ausdruck

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\Psi}} - \frac{\partial T}{\partial\Psi} \tag{9}$$

auftritt. Zu variieren sind dann *nicht* das $\dot{\Psi}$ oder das Ψ, nach denen in diesem Ausdruck differentiiert wird, sondern *nur* diejenigen $\dot{\Psi}$ und Ψ, die im expliziten Ausdruck

$$T = T(\dot{\Psi}_1, \dot{\Psi}_2, \dot{\Psi}_3, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, t)$$

vorkommen. Dies folgt unmittelbar daraus, daß wir die Variationsmethode nur als Ersatz für die Substitution (3) in den nach Ausführung der Differentiationen (9) auf völlig explizite Form gebrachten Gleichungen benutzen. Die Variation von T ist deshalb durch den Ausdruck

$$(10) \quad \tau = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_1}\dot{\psi}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_2}\dot{\psi}_2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_3}\dot{\psi}_3 + \frac{\partial T}{\partial \Psi_1}\psi_1 + \frac{\partial T}{\partial \Psi_2}\psi_2 + \frac{\partial T}{\partial \Psi_3}\psi_3$$

gegeben, womit man die Bewegungsgleichungen der kleinen Störung allgemein aufschreiben kann.

Übrigens wird es sich in den konkret vorliegenden Fällen meist als bequemer erweisen, zuerst durch Ausführung der Differentiation (9) die Bewegungsgleichungen in den gewählten Koordinaten auf völlig explizite Form zu bringen, und dann die Störungsgleichungen durch Variation der in diesen Gleichungen explizite auftretenden abhängigen Variablen zu bilden.

In allgemeinen Koordinaten kommt in der Kontinuitätsgleichung die in der Gleichung **16** (15) definierte Größe D vor. Durch Variation ergibt sich:

$$(11) \qquad d = \frac{\partial D}{\partial \Psi_1}\psi_1 + \frac{\partial D}{\partial \Psi_2}\psi_2 + \frac{\partial D}{\partial \Psi_3}\psi_3 .$$

Die logarithmische Variation der Kontinuitätsgleichung **16** (12):

$$S = S_0 \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c},$$

gibt unmittelbar:

$$s = \frac{S}{\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial c} \right),$$

welches ohne weiteres eine brauchbare Form der Kontinuitätsgleichung für die kleine Störung ist. Man kann sie aber auch auf eine einfachere Form bringen. Durch Umformung der einzelnen Klammerglieder ergibt sich zunächst:

$$\frac{s}{S} = \frac{1}{\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c}} \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial b} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial c} \right).$$

Die auf der rechten Seite mit $\partial \boldsymbol{r}/\partial a$, $\partial \boldsymbol{r}/\partial b$, $\partial \boldsymbol{r}/\partial c$ skalar multiplizierten Vektoren sind aber nach 7 (8) die zu $\partial \boldsymbol{R}/\partial a$, $\partial \boldsymbol{R}/\partial b$, $\partial \boldsymbol{R}/\partial c$ reziproken Vektoren, also:

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a}\right)^* \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b}\right)^* \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial b} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c}\right)^* \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial c}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a}\right)^* \frac{\partial}{\partial a} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b}\right)^* \frac{\partial}{\partial b} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c}\right)^* \frac{\partial}{\partial c}\right] \cdot \boldsymbol{r}.$$

Oder schließlich, wenn der zu $\nabla \boldsymbol{R}$ reziproke Tensor wie gewöhnlich mit $(\nabla \boldsymbol{R})^{-1}$ bezeichnet wird:

(12) $$s = S(\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{r},$$

welches die Kontinuitätsgleichung der Störungsbewegung in kürzester Form ist. Ihre Verwandtschaft mit der EULERschen Kontinuitätsgleichung ist bemerkenswert. Wenn man nämlich von den Koordinaten a, b, c zu X, Y, Z übergeht, wird die Gleichung: $s = S\nabla_R \cdot \boldsymbol{r}$, d. h.:

$$s = S \operatorname{div} \boldsymbol{r},$$

wo sich die Divergenz jetzt auf die Koordinaten X, Y, Z bezieht.

Bei der logarithmischen Ableitung der Kontinuitätsgleichung in allgemeinen Koordinaten hat man das Glied

$$\frac{\delta\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial c}\right)}{\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial c}}$$

zu berechnen. In ähnlicher Weise wie oben läßt sich nun dieses Glied in der kürzeren Form

$$(\nabla \boldsymbol{\Psi})^{-1} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\psi}$$

schreiben. Die übrigen Glieder bieten keine Schwierigkeiten dar.

Will man die Energiegleichung mitnehmen, und also die thermodynamischen Vorgänge in einer gewissen Allgemeinheit mit in Betracht ziehen, so ist zu bemerken, daß die innere Energie E implizite von den abhängigen Variablen S, P, Θ abhängt, und daß die Variation von E dementsprechend zu berechnen ist. Über die zugeführte Wärmemenge, die überhaupt keine Zustandsfunktion ist, wären besondere Voraussetzungen zu machen, damit das Problem bestimmt ist. Bei den Störungen greifen aber, solange sie klein sind, die thermodynamischen Vorgänge in vielen Fällen nicht stark ein, und wir wollen unsere Aufgabe durch die Annahme vereinfachen, daß bei den kleinen Störungen alle Prozesse adiabatisch verlaufen oder auch, daß in irgendeiner anderen Weise ein Zustand der Piezotropie gesichert ist. Es ist dann eine Gleichung der Piezotropie

$$S = S(a, b, c, P)$$

zu variieren. Man erhält, ganz unabhängig von den in Anwendung gebrachten Lagekoordinaten:

$$s = \left(\frac{dS}{dP}\right)_{Ph} p\,,$$

und wenn man nach **24** (4) den Piezotropiekoeffizienten γ einführt:

(13) $$s = -S^2 \gamma p\,.$$

Schließlich ist die Variation der Grenzflächenbedingungen zu betrachten. Man hat dann ein Glied $(\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla P = \nabla_R P$ zu variieren, also die Variation $\delta(\nabla_R P)$ zu berechnen. Zu dem Zweck variieren wir die Relation:

$$\nabla \boldsymbol{R} \cdot \nabla_R P = \nabla P\,,$$

die

$$\nabla \boldsymbol{r} \cdot \nabla_R P + \nabla \boldsymbol{R} \cdot \delta(\nabla_R P) = \nabla p$$

ergibt. Skalare Multiplikation dieser Gleichung mit dem Tensor $(\nabla \boldsymbol{R})^{-1}$ als Präfaktor gibt nun:

$$(\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla \boldsymbol{r} \cdot \nabla_R P + \delta(\nabla_R P) = (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla p\,,$$

woraus die gesuchte Variation zu finden ist:

(14) $$\delta(\nabla_R P) = (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot [\nabla p - \nabla \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla P]\,.$$

In krummlinigen Koordinaten ist die Rechnung analog zu führen, und wir erhalten in symbolischer Darstellung:

(15) $$\delta(\nabla_\Psi P) = (\nabla \Psi)^{-1} \cdot [\nabla p - \nabla \psi \cdot (\nabla \Psi)^{-1} \cdot \nabla P]\,.$$

Nach den oben entwickelten allgemeinen Prinzipien können wir nun in jedem beliebigen Koordinatensystem die Gleichungen des Grundzustandes und die zugehörigen Störungsgleichungen aufschreiben.

76. LAGRANGEsche Störungsgleichungen in cartesischen Koordinaten. Wir beginnen mit dem Fall der cartesischen Koordinaten und benutzen dabei einleitend die vektorielle Schreibweise. Die Formeln des Grundzustandes werden wir mit römischen Ziffern, die der Störungsbewegung mit den entsprechenden arabischen Ziffern numerieren.

Der Grundzustand ist durch die folgenden abhängigen Variablen charakterisiert:

(I) $$\begin{cases} X \\ Y, \quad S, \quad P, \quad F, \\ Z \end{cases}$$

wo noch zur Vereinfachung die Anfangskoordinaten mit den Numerierungskoordinaten zu identifizieren sind:

$$t = 0: \quad a = X_0\,, \qquad b = Y_0 \qquad c = Z_0$$

Die Grundgleichungen — Bewegungsgleichung, Kontinuitätsgleichung und Piezotropiegleichung — sind dann in diesen Variablen:

$$\text{(II)}\qquad \nabla \boldsymbol{R} \cdot \ddot{\boldsymbol{R}} + S \nabla P + \nabla \Phi = 0,$$

$$\text{(III)}\qquad S = S_0 \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial b} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial c},$$

$$\text{(IV)}\qquad S = S(a, b, c, P).$$

Wenn eine Diskontinuitätsfläche durch die Gleichungen

$$\text{(V)}\qquad F(a, b, c, t) = 0 \quad \text{und} \quad F'(a', b', c', t) = 0$$

gegeben ist, hat man die kinematischen Grenzflächenbedingungen **32** (8):

$$\text{(VI)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} F(a, b, c, t) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} F'(a', b', c', t) = 0, \\ &\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla F \quad = 0, \\ &\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \boldsymbol{R}')^{-1} \cdot \nabla' F' = 0, \\ &\text{wenn } t = 0, \ a = a', \ b = b', \ c = c', \end{aligned}$$

und ebenso die dynamische Grenzflächenbedingung **32** (9):

$$\text{(VII)}\qquad \begin{aligned} &P(a, b, c, t) - P'(a', b', c', t) = 0, \\ &\text{wenn } t = 0, \ a = a', \ b = b', \ c = c'. \end{aligned}$$

Man verwendet oft mit Vorteil die gemischten Grenzflächenbedingungen **32** (10):

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} - \dfrac{\partial P'}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} - \dfrac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \boldsymbol{R}')^{-1} \cdot \nabla' P' = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial t} - \dfrac{\partial P'}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} - \dfrac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla P \quad = 0, \\ \text{wenn } t = 0, \ a = a', \ b = b', \ c = c'. \end{cases}$$

An einer freien Oberfläche hat man einfach:

$$\text{(IX)}\qquad P(a, b, c) = 0.$$

Dem somit gegebenen Grundzustand soll jetzt eine beliebige kleine Störungsbewegung

$$\text{(1)}\qquad \begin{matrix} | x \\ y, \quad s, \quad p, \quad f \end{matrix}$$

überlagert sein, für die zu Anfang der Zeit:

$$t = 0: \quad \boldsymbol{r}_0 = 0, \qquad s_0 = 0, \qquad p_0 = 0, \qquad f_0 = 0$$

gelten.

Durch Anwendung der im vorigen Abschnitte behandelten Variationsmethode, unter Beachtung der dortigen Formel (7), ergeben sich die folgenden, den Gleichungen (II) bis (IV) entsprechenden, Störungsgleichungen:

$$\nabla \boldsymbol{R} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla \boldsymbol{r} \cdot \ddot{\boldsymbol{R}} + S \nabla p + s \nabla P + \nabla \varphi = 0, \tag{2}$$

$$s = S (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{r}, \tag{3}$$

$$s = -S^2 \gamma p. \tag{4}$$

Es ist bemerkenswert, daß man mittels der letzten Gleichung durch einfache Substitution die Variable s sowohl aus der Kontinuitätsgleichung wie auch aus der Bewegungsgleichung eliminieren kann.

Die Gleichung der Diskontinuitätsfläche wird nach der Störung:

$$F(a,b,c,t) + f(a,b,c,t) = 0 \quad \text{und} \quad F'(a',b',c',t) + f'(a',b',c',t) = 0, \tag{5}$$

und die entsprechenden kinematischen Grenzflächenbedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(a,b,c,t) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} f'(a',b',c',t) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla F + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot [\nabla f - \nabla \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla F] = 0, \\ &\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \boldsymbol{R}')^{-1} \cdot \nabla' F' + \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \boldsymbol{R}')^{-1} \cdot [\nabla' f' - \nabla' \boldsymbol{r}' \cdot (\nabla' \boldsymbol{R}')^{-1} \cdot \nabla' F'] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\text{wenn} \quad t = 0, \; a = a', \; b = b', \; c = c'.$$

In derselben Weise erhält man die dynamische Grenzflächenbedingung:

$$\begin{gathered} P(a,b,c,t) + p(a,b,c,t) - P'(a',b',c',t) - p'(a',b',c',t) = 0, \\ \text{wenn} \quad t = 0, \; a = a', \; b = b', \; c = c', \end{gathered} \tag{7}$$

und die gemischten Bedingungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \boldsymbol{R}')^{-1} \cdot \nabla' P' \\ &\qquad - \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \boldsymbol{R}')^{-1} \cdot [\nabla' p' - \nabla' \boldsymbol{r}' \cdot (\nabla' \boldsymbol{R}')^{-1} \cdot \nabla' P'] = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla P \\ &\qquad - \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{R}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot [\nabla p - \nabla \boldsymbol{r} \cdot (\nabla \boldsymbol{R})^{-1} \cdot \nabla P] = 0, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\text{wenn} \quad t = 0, \; a = a', \; b = b', \; c = c'.$$

Die Bedingung an einer freien Oberfläche wird einfach:

$$p(a,b,c) = 0. \tag{9}$$

Der mit der Vektorrechnung Vertraute wird aus den obigen Vektorgleichungen die entsprechenden Komponentengleichungen leicht entnehmen können. Zur Erleichterung werden wir sie aber hier auch in voll entwickelter cartesischer Form aufschreiben:

$$
\text{(II')}\qquad
\begin{aligned}
&\ddot{X}\frac{\partial X}{\partial a}+\ddot{Y}\frac{\partial Y}{\partial a}+\ddot{Z}\frac{\partial Z}{\partial a}+S\frac{\partial P}{\partial a}+\frac{\partial \Phi}{\partial a}=0,\\
&\ddot{X}\frac{\partial X}{\partial b}+\ddot{Y}\frac{\partial Y}{\partial b}+\ddot{Z}\frac{\partial Z}{\partial b}+S\frac{\partial P}{\partial b}+\frac{\partial \Phi}{\partial b}=0,\\
&\ddot{X}\frac{\partial X}{\partial c}+\ddot{Y}\frac{\partial Y}{\partial c}+\ddot{Z}\frac{\partial Z}{\partial c}+S\frac{\partial P}{\partial c}+\frac{\partial \Phi}{\partial c}=0.
\end{aligned}
$$

$$
\text{(III')}\qquad S=S_0\frac{D(X,Y,Z)}{D(a,b,c)}=S_0\begin{vmatrix}
\frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial X}{\partial b} & \frac{\partial X}{\partial c}\\
\frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial b} & \frac{\partial Y}{\partial c}\\
\frac{\partial Z}{\partial a} & \frac{\partial Z}{\partial b} & \frac{\partial Z}{\partial c}
\end{vmatrix}
$$

$$
\text{(VI')}\qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial X'}{\partial t}\right)\frac{D(F,Y,Z)}{D(a,b,c)}+\left(\frac{\partial Y}{\partial t}-\frac{\partial Y'}{\partial t}\right)\frac{D(X,F,Z)}{D(a,b,c)}+\left(\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Z'}{\partial t}\right)\frac{D(X,Y,F)}{D(a,b,c)}=0,\\
&\left(\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial X'}{\partial t}\right)\frac{D(F',Y',Z')}{D(a',b',c')}+\left(\frac{\partial Y}{\partial t}-\frac{\partial Y'}{\partial t}\right)\frac{D(X',F',Z')}{D(a',b',c')}+\left(\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Z'}{\partial t}\right)\frac{D(X',Y',F')}{D(a',b',c')}=0,\\
&\text{wenn}\quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'.
\end{aligned}
$$

$$
\text{(VIII')}\qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial P'}{\partial t}\right)\frac{D(X',Y',Z')}{D(a',b',c')}-\left(\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial X'}{\partial t}\right)\frac{D(P',Y',Z')}{D(a',b',c')}\\
&\quad-\left(\frac{\partial Y}{\partial t}-\frac{\partial Y'}{\partial t}\right)\frac{D(X',P',Z')}{D(a',b',c')}-\left(\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Z'}{\partial t}\right)\frac{D(X',Y',P')}{D(a',b',c')}=0,\\
&\left(\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial P'}{\partial t}\right)\frac{D(X,Y,Z)}{D(a,b,c)}-\left(\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial X'}{\partial t}\right)\frac{D(P,Y,Z)}{D(a,b,c)}\\
&\quad-\left(\frac{\partial Y}{\partial t}-\frac{\partial Y'}{\partial t}\right)\frac{D(X,P,Z)}{D(a,b,c)}-\left(\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Z'}{\partial t}\right)\frac{D(X,Y,P)}{D(a,b,c)}=0,\\
&\text{wenn}\quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'.
\end{aligned}
$$

$$
\text{(2')}\qquad
\begin{aligned}
&\ddot{x}\frac{\partial X}{\partial a}+\ddot{y}\frac{\partial Y}{\partial a}+\ddot{z}\frac{\partial Z}{\partial a}+\ddot{X}\frac{\partial x}{\partial a}+\ddot{Y}\frac{\partial y}{\partial a}+\ddot{Z}\frac{\partial z}{\partial a}+S\frac{\partial p}{\partial a}+s\frac{\partial P}{\partial a}+\frac{\partial \varphi}{\partial a}=0,\\
&\ddot{x}\frac{\partial X}{\partial b}+\ddot{y}\frac{\partial Y}{\partial b}+\ddot{z}\frac{\partial Z}{\partial b}+\ddot{X}\frac{\partial x}{\partial b}+\ddot{Y}\frac{\partial y}{\partial b}+\ddot{Z}\frac{\partial z}{\partial b}+S\frac{\partial p}{\partial b}+s\frac{\partial P}{\partial b}+\frac{\partial \varphi}{\partial b}=0,\\
&\ddot{x}\frac{\partial X}{\partial c}+\ddot{y}\frac{\partial Y}{\partial c}+\ddot{z}\frac{\partial Z}{\partial c}+\ddot{X}\frac{\partial x}{\partial c}+\ddot{Y}\frac{\partial y}{\partial c}+\ddot{Z}\frac{\partial z}{\partial c}+S\frac{\partial p}{\partial c}+s\frac{\partial P}{\partial c}+\frac{\partial \varphi}{\partial c}=0.
\end{aligned}
$$

$$
\text{(3')}\qquad s=S_0\left[\frac{D(x,Y,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,y,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,Y,z)}{D(a,b,c)}\right].
$$

$$
(6')\quad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\frac{D(F,Y,Z)}{D(a,b,c)}+\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial t}\right)\frac{D(X,F,Z)}{D(a,b,c)}+\left(\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial t}\right)\frac{D(X,Y,F)}{D(a,b,c)}\\
&\quad+\left(\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial X'}{\partial t}\right)\left\{\frac{D(f,Y,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(F,y,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(F,Y,z)}{D(a,b,c)}\right\}\\
&\quad+\left(\frac{\partial Y}{\partial t}-\frac{\partial Y'}{\partial t}\right)\left\{\frac{D(x,F,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,f,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,F,z)}{D(a,b,c)}\right\}\\
&\quad+\left(\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Z'}{\partial t}\right)\left\{\frac{D(x,Y,F)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,y,F)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,Y,f)}{D(a,b,c)}\right\}=0,\\
&\qquad\text{wenn}\quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'.
\end{aligned}
$$

$$
(8')\quad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial p'}{\partial t}\right)\frac{D(X,Y,Z)}{D(a,b,c)}-\left(\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial t}\right)\frac{D(P,Y,Z)}{D(a,b,c)}\\
&\quad-\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial t}\right)\frac{D(X,P,Z)}{D(a,b,c)}-\left(\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial t}\right)\frac{D(X,Y,P)}{D(a,b,c)}\\
&\quad+\left(\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial P'}{\partial t}\right)\left\{\frac{D(x,Y,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,y,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,Y,z)}{D(a,b,c)}\right\}\\
&\quad-\left(\frac{\partial X}{\partial t}-\frac{\partial X'}{\partial t}\right)\left\{\frac{D(p,Y,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(P,y,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(P,Y,z)}{D(a,b,c)}\right\}\\
&\quad-\left(\frac{\partial Y}{\partial t}-\frac{\partial Y'}{\partial t}\right)\left\{\frac{D(x,P,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,p,Z)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,P,z)}{D(a,b,c)}\right\}\\
&\quad-\left(\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Z'}{\partial t}\right)\left\{\frac{D(x,Y,P)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,y,P)}{D(a,b,c)}+\frac{D(X,Y,p)}{D(a,b,c)}\right\}=0,\\
&\qquad\text{wenn}\quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'.
\end{aligned}
$$

Wir haben hier nur die erste Gleichung (6) und die zweite Gleichung (8) explizite hingeschrieben. Die anderen ergeben sich, wenn man die in den Funktionaldeterminanten vorkommenden Größen durch die entsprechenden gestrichenen ersetzt.

77. Störung eines Gleichgewichtszustandes. Wir wollen sogleich den wichtigen Spezialfall der Störung eines Gleichgewichtszustandes betrachten.

Der Grundzustand soll wieder durch die abhängigen Variablen

$$
\text{(I)}\qquad \boldsymbol{R}\begin{cases} X \\ Y, \\ \end{cases}\quad S,\quad P,\quad F
$$

charakterisiert sein. Der Radiusvektor $\boldsymbol{R}$ eines Teilchens ist nun im Gleichgewichtszustand konstant, gleich seinem Anfangswert $\boldsymbol{R}_0$, und die Projektionen X, Y, Z von $\boldsymbol{R}$ sind ebenfalls gleich ihren Anfangswerten X_0, Y_0, Z_0, d. h.:

$$
X=a,\quad Y=b,\quad Z=c.
$$

Da $\ddot{\boldsymbol{R}} = 0$ ist, reduziert sich die Bewegungsgleichung **76** (II) des Grundzustandes auf die des Gleichgewichts:

$$\text{(II)} \qquad S\nabla P + \nabla\Phi = 0 .$$

Für das in der Kontinuitätsgleichung **76** (III) vorkommende parallelepipedische Produkt ergibt sich der Wert 1, und diese Gleichung reduziert sich auf

$$\text{(III)} \qquad S = S_0 ,$$

d. h. S ist zeitlich konstant. Nach (II) ist dann auch P zeitlich konstant. Die Gleichgewichtsgleichung (II) verlangt, wie wir früher gesehen haben, gegenseitige Homotropie der Größen S, P und Φ. Daraus folgt, daß eine Barotropierelation

$$\text{(IV)} \qquad S = S(P)$$

bestehen muß. Durch Differentiation und Einführung des Barotropiekoeffizienten Γ ergibt sich:

$$\text{(IV')} \qquad \nabla S = \left(\frac{dS}{dP}\right)_{Ph} \nabla P = -S^2 \Gamma \nabla P .$$

Wegen der zeitlichen Konstanz der abhängigen Variablen sind die Gleichungen **76** (VI) und (VIII) identisch erfüllt. Es bleiben noch die Gleichungen **76** (V), (VII) und (IX) zu berücksichtigen, nämlich:

$$\text{(V)} \qquad F(a,b,c) = 0 \quad \text{und} \quad F'(a',b',c') = 0 .$$

$$\text{(VII)} \quad P(a,b,c) - P'(a',b',c') = 0 , \quad \text{wenn} \quad a = a',\ b = b',\ c = c' .$$

$$\text{(IX)} \qquad P(a,b,c) = 0 .$$

Durch Berücksichtigung von $\nabla\boldsymbol{R} = (\nabla\boldsymbol{R})^{-1} = \mathfrak{E}$ und $\dot{\boldsymbol{R}} = \ddot{\boldsymbol{R}} = 0$ werden die Gleichungen **76** (1) bis (10):

$$\text{(1)} \qquad s, \quad p, \quad f .$$

$$\text{(2)} \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} + S\nabla p + s\nabla P + \nabla\varphi = 0 .$$

$$\text{(3)} \qquad s = S\nabla \cdot \boldsymbol{r} = S \operatorname{div} \boldsymbol{r} .$$

$$\text{(4)} \qquad s = -S^2 \gamma p .$$

$$\text{(5)} \quad F(a,b,c) + f(a,b,c,t) = 0 \quad \text{und} \quad F'(a',b',c') + f'(a',b',c',t) = 0 .$$

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} f(a,b,c,t) = 0 , \qquad \frac{\partial}{\partial t} f'(a',b',c',t) = 0 , \\ &\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot \nabla F = 0 , \quad \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot \nabla' F' = 0 , \\ &\qquad \text{wenn} \quad t = 0,\ a = a',\ b = b',\ c = c' . \end{aligned}$$

$$P(a,b,c) + p(a,b,c,t) - P'(a',b',c') - p'(a',b',c',t) = 0, \quad \text{wenn} \quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'. \tag{7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{\partial p'}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \dfrac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right)\cdot \nabla' P' = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{\partial p'}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \dfrac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right)\cdot \nabla P = 0, \\ \text{wenn} \quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'. \end{cases} \tag{8}$$

$$p(a,b,c) = 0. \tag{9}$$

Wenn man s mittels (4) aus den Gleichungen (2) und (3) eliminiert und außerdem ∇P mittels (II) durch $\nabla \Phi$ ersetzt, ergibt sich:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + S\nabla p + \gamma S p \nabla \Phi + \nabla \varphi = 0. \tag{2a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{r} + \gamma S p = 0. \tag{3a}$$

Durch Anwendung der Formel $S\nabla p = \nabla(Sp) - p\nabla S$ und (IV′) ergibt sich eine andere Form der Gleichung (2a):

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla(Sp + \varphi) - (\Gamma - \gamma) S p \nabla \Phi = 0. \tag{2b}$$

Da F, F', P und P' zeitlich konstant sind, können wir in (6) und (8) die Integration nach der Zeit ausführen und erhalten dann die einfacheren Grenzflächenbedingungen:

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\cdot \nabla F = 0. \quad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\cdot \nabla' F' = 0, \tag{6a}$$

$$p - p' - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\cdot \nabla' P' = 0, \quad p - p' - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\cdot \nabla P = 0, \tag{8a}$$

wenn $t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'$.

Die belanglosen Integrationskonstanten sind dabei gleich Null gesetzt.

Der Vollständigkeit halber schreiben wir die obigen Vektorgleichungen auch in voll entwickelter cartesischer Form:

$$\begin{aligned} S\frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= 0, \\ S\frac{\partial P}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= 0, \\ S\frac{\partial P}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} &= 0. \end{aligned} \tag{II′}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + S\frac{\partial p}{\partial a} + s\frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= 0, \\ \ddot{y} + S\frac{\partial p}{\partial b} + s\frac{\partial P}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} &= 0, \\ \ddot{z} + S\frac{\partial p}{\partial c} + s\frac{\partial P}{\partial c} + \frac{\partial \varphi}{\partial c} &= 0. \end{aligned} \tag{2′}$$

(3′)
$$s = S\left(\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c}\right).$$

(2′a)
$$\begin{aligned} \ddot{x} + S\frac{\partial p}{\partial a} + \gamma S p \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= 0, \\ \ddot{y} + S\frac{\partial p}{\partial b} + \gamma S p \frac{\partial \Phi}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} &= 0, \\ \ddot{z} + S\frac{\partial p}{\partial c} + \gamma S p \frac{\partial \Phi}{\partial c} + \frac{\partial \varphi}{\partial c} &= 0. \end{aligned}$$

(3′a)
$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma S p = 0.$$

(2′b)
$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp + \varphi) - (\Gamma - \gamma) S p \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{\partial}{\partial b}(Sp + \varphi) - (\Gamma - \gamma) S p \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= 0, \\ \ddot{z} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp + \varphi) - (\Gamma - \gamma) S p \frac{\partial \Phi}{\partial c} &= 0. \end{aligned}$$

(6′a)
$$\begin{aligned} (x - x')\frac{\partial F}{\partial a} + (y - y')\frac{\partial F}{\partial b} + (z - z')\frac{\partial F}{\partial c} &= 0, \\ (x - x')\frac{\partial F'}{\partial a'} + (y - y')\frac{\partial F'}{\partial b'} + (z - z')\frac{\partial F'}{\partial c'} &= 0, \end{aligned}$$

(8′a)
$$\begin{aligned} p - p' - (x - x')\frac{\partial P'}{\partial a'} - (y - y')\frac{\partial P'}{\partial b'} - (z - z')\frac{\partial P'}{\partial c'} &= 0, \\ p - p' - (x - x')\frac{\partial P}{\partial a} - (y - y')\frac{\partial P}{\partial b} - (z - z')\frac{\partial P}{\partial c} &= 0; \end{aligned}$$

in beiden Fällen mit $t = 0$, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

78. Störung eines stationären horizontalen Stromes. Im Grundzustand soll sich jedes Teilchen parallel der ab-Ebene bewegen, und zwar mit einer zeitlich konstanten Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ (Komponenten U und V). Wir haben also:

(I) $$X = a + U(a, b, c)\,t, \qquad Y = b + V(a, b, c)\,t, \qquad Z = c.$$

Die Anfangskoordinaten sind also wieder mit den Numerierungskoordinaten identisch:

$$t = 0: \quad X_0 = a, \qquad Y_0 = b, \qquad Z_0 = c.$$

Für die Ableitungen der Koordinaten (I) ergibt sich:

$$\dot{X} = U, \qquad \ddot{X} = 0, \qquad \dot{Y} = V, \qquad \ddot{Y} = 0, \qquad \dot{Z} = \ddot{Z} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial a} = 1 + \frac{\partial U}{\partial a} t, && \frac{\partial X}{\partial b} = \frac{\partial U}{\partial b} t, && \frac{\partial X}{\partial c} = \frac{\partial U}{\partial c} t, \\ &\frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial a} t, && \frac{\partial Y}{\partial b} = 1 + \frac{\partial V}{\partial b} t, && \frac{\partial Y}{\partial c} = \frac{\partial V}{\partial c} t, \\ &\frac{\partial Z}{\partial a} = 0, && \frac{\partial Z}{\partial b} = 0, && \frac{\partial Z}{\partial c} = 1, \end{aligned}$$

woraus man für die Funktionaldeterminante den Wert

$$\frac{D(X,Y,Z)}{D(a,b,c)} = 1 + \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\right) t + \left(\frac{\partial U}{\partial a}\,\frac{\partial V}{\partial b} - \frac{\partial V}{\partial a}\,\frac{\partial U}{\partial b}\right) t^2$$

erhält. Da $\ddot{\boldsymbol{R}} = 0$ ist, reduziert sich die Bewegungsgleichung des Grundzustandes auf die Gleichgewichtsgleichung:

$$\text{(II)} \qquad S\nabla P + \nabla\Phi = 0\,,$$

während die Kontinuitätsgleichung

$$S = S_0\left[1 + \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\right) t + \left(\frac{\partial U}{\partial a}\,\frac{\partial V}{\partial b} - \frac{\partial V}{\partial a}\,\frac{\partial U}{\partial b}\right) t^2\right]$$

wird. Wir werden im folgenden annehmen, daß das Massenfeld ebenso wie das Geschwindigkeitsfeld stationär ist. Dann müssen

$$\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U}{\partial a}\,\frac{\partial V}{\partial b} - \frac{\partial V}{\partial a}\,\frac{\partial U}{\partial b} = 0$$

sein, und die Kontinuitätsgleichung nimmt die einfache Form an:

$$\text{(III)} \qquad S = S_0\,.$$

Ebenso wie in **77** ergibt sich eine Barotropierelation:

$$\text{(IV)} \qquad \nabla S = -S^2\Gamma\nabla P.$$

Unter Beachtung von $\nabla\boldsymbol{R} = (\nabla\boldsymbol{R})^{-1} = \mathcal{E}$, wenn $t = 0$, findet man die Grenzflächenbedingungen, wenn $\dot{\boldsymbol{R}}$ durch $\boldsymbol{V}$ ersetzt wird:

$$\text{(V)} \qquad F(a,b,c,t) = 0 \quad \text{und} \quad F'(a',b',c',t) = 0\,.$$

$$\text{(VI)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} F(a,b,c,t) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t} F'(a',b',c',t) = 0\,,\\ &(\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}')\cdot\nabla F = 0\,, \qquad (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}')\cdot\nabla' F' = 0\,,\\ &\text{wenn} \quad t = 0\,,\ a = a',\ b = b',\ c = c'. \end{aligned}$$

$$\text{(VII)} \qquad \begin{aligned} &P(a,b,c,t) - P'(a',b',c',t) = 0\,,\\ &\text{wenn} \quad t = 0\,,\ a = a',\ b = b',\ c = c'. \end{aligned}$$

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P'}{\partial t} - (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}')\cdot\nabla' P' = 0\,,\\ &\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P'}{\partial t} - (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}')\cdot\nabla P = 0\,,\\ &\text{wenn} \quad t = 0\,,\ a = a',\ b = b',\ c = c'. \end{aligned}$$

$$\text{(IX)} \qquad P(a,b,c) = 0\,.$$

Unter Beachtung der Relationen

$$\nabla \boldsymbol{R} = \mathcal{E} + \nabla \boldsymbol{V} t,$$
$$(\nabla \boldsymbol{R})^{-1} = \mathcal{E} - \nabla \boldsymbol{V} t + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} t^2,$$
$$\varphi = \boldsymbol{r} \cdot \nabla \Phi - \boldsymbol{r} \cdot \nabla \boldsymbol{V} \cdot \nabla \Phi t + \boldsymbol{r} \cdot \nabla \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} \cdot \nabla \Phi t^2,$$

bekommt man das entsprechende System von Störungsgleichungen:

$$(1) \qquad \boldsymbol{r} \begin{cases} x \\ y, \quad s, \quad p, \quad f. \\ z \end{cases}$$

$$(2) \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} t + S \nabla p + s \nabla P + \nabla \varphi = 0.$$

$$(3) \qquad s = S(\operatorname{div} \boldsymbol{r} - \nabla \boldsymbol{V} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{r} t + \nabla \boldsymbol{V} \cdot \nabla \boldsymbol{V} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{r} t^2).$$

$$(4) \qquad s = -S^2 \gamma p.$$

$$(5) \quad F(a,b,c,t) + f(a,b,c,t) = 0 \quad \text{und} \quad F'(a',b',c',t) + f'(a',b',c',t) = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(a,b,c,t) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} f'(a',b',c',t) = 0,$$

$$(6) \quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot \nabla F + (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}') \cdot [\nabla f - \nabla \boldsymbol{r} \cdot \nabla F] = 0, \\ &\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot \nabla' F' + (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}') \cdot [\nabla' f' - \nabla' \boldsymbol{r}' \cdot \nabla' F'] = 0, \\ &\qquad \text{wenn} \quad t = 0, \ a = a', \ b = b', \ c = c'. \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{cases} P(a,b,c,t) + p(a,b,c,t) - P'(a',b',c',t) - p'(a',b',c',t) = 0, \\ \qquad \text{wenn} \quad t = 0, \ a = a', \ b = b', \ c = c'. \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot \nabla' P' - (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}') \cdot [\nabla' p' - \nabla' \boldsymbol{r}' \cdot \nabla' P'] = 0, \\ &\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t}\right) \cdot \nabla P - (\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}') \cdot [\nabla p - \nabla \boldsymbol{r} \cdot \nabla P] = 0, \\ &\qquad \text{wenn} \quad t = 0, \ a = a', \ b = b', \ c = c'. \end{aligned}$$

$$(9) \qquad p(a,b,c) = 0.$$

Wenn man hier $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}' = 0$ setzt, erhält man wieder das Schema der Gleichgewichtsstörungen.

79. Lagrangesche Störungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten. Bei der Aufstellung der Störungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten verwenden wir die Größen **30** (11) und **16** (15):

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = T(\dot{\Psi}_1, \dot{\Psi}_2, \dot{\Psi}_3, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, t),$$

$$D = \frac{D(X,Y,Z)}{D(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)},$$

und deren Variationen:

$$\tau = \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_1}\dot{\psi}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_2}\dot{\psi}_2 + \frac{\partial T}{\partial \dot{\Psi}_3}\dot{\psi}_3 + \frac{\partial T}{\partial \Psi_1}\psi_1 + \frac{\partial T}{\partial \Psi_2}\psi_2 + \frac{\partial T}{\partial \Psi_3}\psi_3 ,$$

$$d = \frac{\partial D}{\partial \Psi_1}\psi_1 + \frac{\partial D}{\partial \Psi_2}\psi_2 + \frac{\partial D}{\partial \Psi_3}\psi_3 .$$

Unter Beachtung der Gleichung **75** (8) ergibt sich entsprechend den Formeln **76** (I) bis (IX), (1) bis (9) für den Grundzustand und die kleinen Störungen das folgende Gleichungsschema in allgemeinen Koordinaten.

Für den Grundzustand:

(I)
$$\mathbf{\Psi} \begin{matrix} \Psi_1 \\ \Psi_2, \\ \Psi_3 \end{matrix} \quad S, \quad P, \quad F.$$

(II)
$$\nabla \mathbf{\Psi} \cdot \left(\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\Psi}} T - \nabla_{\Psi} T\right) + S\nabla P + \nabla \Phi = 0 .$$

(III)
$$S = S_0 \frac{D}{D_0} \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial a} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial b} \times \frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial c} .$$

(IV)
$$S = S(a, b, c, P) .$$

(V)
$$F(a, b, c, t) = 0 \quad \text{und} \quad F'(a', b', c', t) = 0 .$$

(VI)
$$\frac{\partial}{\partial t} F(a, b, c, t) = 0 , \qquad \frac{\partial}{\partial t} F'(a', b', c', t) = 0 .$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{\Psi}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \mathbf{\Psi})^{-1} \cdot \nabla F \quad = 0 ,$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{\Psi}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \mathbf{\Psi}')^{-1} \cdot \nabla' F' = 0 ,$$
$$\text{wenn} \quad t = 0 , \; a = a', \; b = b', \; c = c'.$$

(VII)
$$P(a, b, c, t) - P'(a', b', c', t) = 0 ,$$
$$\text{wenn} \quad t = 0 , \; a = a', \; b = b', \; c = c'.$$

(VIII)
$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P'}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{\Psi}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla' \mathbf{\Psi}')^{-1} \cdot \nabla' P' = 0 ,$$
$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P'}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{\Psi}'}{\partial t}\right) \cdot (\nabla \mathbf{\Psi})^{-1} \cdot \nabla P \quad = 0 ,$$
$$\text{wenn} \quad t = 0 , \; a = a', \; b = b', \; c = c'.$$

(IX)
$$P(a, b, c) = 0 .$$

Für die kleinen Störungen:

$$(1)\qquad \psi \quad \begin{matrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{matrix}, \quad s, \quad p, \quad f.$$

$$(2)\quad \nabla\Psi\cdot\left(\frac{d}{dt}\nabla_{\dot\psi}\tau-\nabla_{\psi}\tau\right)+\nabla\psi\cdot\left(\frac{d}{dt}\nabla_{\dot\psi}T-\nabla_{\psi}T\right)+S\nabla p+s\nabla P+\nabla\varphi=0.$$

$$(3)\qquad \frac{s}{S}=\frac{d}{D}+(\nabla\Psi)^{-1}\cdot\nabla\cdot\psi.$$

$$(4)\qquad s=-S^2\gamma p.$$

$$(5)\quad F(a,b,c,t)+f(a,b,c,t)=0 \quad \text{und} \quad F'(a',b',c',t)+f'(a',b',c',t)=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(a,b,c,t)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}f'(a',b',c',t)=0,$$

$$(6)\quad \begin{aligned}&\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla\Psi)^{-1}\cdot\nabla F\\ &\quad+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla\Psi)^{-1}\cdot[\nabla f-\nabla\psi\cdot(\nabla\Psi)^{-1}\cdot\nabla F]=0,\\ &\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla'\Psi')^{-1}\cdot\nabla'F'\\ &\quad+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla'\Psi')^{-1}\cdot[\nabla'f'-\nabla'\psi'\cdot(\nabla'\Psi')^{-1}\cdot\nabla'F']=0,\\ &\qquad \text{wenn}\quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'.\end{aligned}$$

$$(7)\quad \begin{cases}P(a,b,c,t)+p(a,b,c,t)-P'(a',b',c',t)-p'(a',b',c',t)=0,\\ \qquad \text{wenn}\quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'.\end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial p'}{\partial t}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla'\Psi')^{-1}\cdot\nabla'P'\\ &\quad-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla'\Psi')^{-1}\cdot[\nabla'p'-\nabla'\psi'\cdot(\nabla'\Psi')^{-1}\cdot\nabla'P']=0,\\ &\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial p'}{\partial t}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla\Psi)^{-1}\cdot\nabla P\\ &\quad-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\right)\cdot(\nabla\Psi)^{-1}\cdot[\nabla p-\nabla\psi\cdot(\nabla\Psi)^{-1}\cdot\nabla P]=0,\\ &\qquad \text{wenn}\quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'.\end{aligned}$$

$$(9)\qquad p(a,b,c)=0.$$

In den folgenden Paragraphen werden einige spezielle Beispiele behandelt.

80. Erstes Beispiel: Zylinderkoordinaten. Die abhängigen Variablen des Grundzustandes sollen

$$\text{(I)} \qquad \Psi_1 = \mathsf{P}, \ \Psi_2 = \Psi, \ \Psi_3 = Z, \quad S, \quad P, \quad F$$

sein, wo P der Abstand von der Zylinderachse, Ψ der Längenwinkel, d. h. der Winkel der Meridianebene mit einem Ausgangsmeridian, und Z der Abstand von einer Ausgangsebene senkrecht zur Zylinderachse ist. Die Relationen zwischen diesen Koordinaten und den cartesischen sind:

$$X = \mathsf{P}\cos\Psi, \qquad Y = \mathsf{P}\sin\Psi, \qquad Z = Z,$$

woraus sich für die kinetische Energie pro Masseneinheit T, die Hilfsgröße D und deren Variationen τ und d die Ausdrücke

$$T = \tfrac{1}{2}(\dot{\mathsf{P}}^2 + \mathsf{P}^2\dot{\Psi}^2 + \dot{Z}^2), \qquad D = \mathsf{P},$$

$$\tau = \dot{\mathsf{P}}\dot{\varrho} + \mathsf{P}\dot{\Psi}^2\varrho + \mathsf{P}^2\dot{\Psi}\dot{\psi} + \dot{Z}\dot{z}, \qquad d = \varrho$$

ergeben.

Wenn man das Trägheitsglied in den Bewegungsgleichungen dreigliedrig entwickelt, so ergeben sich die Gleichungen **79** (II), (III), (1), (2), (3) in folgender Form:

$$\text{(II)} \quad (\ddot{\mathsf{P}} - \mathsf{P}\dot{\Psi}^2)\nabla\mathsf{P} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathsf{P}^2\dot{\Psi})\nabla\Psi + \ddot{Z}\nabla Z + S\nabla P + \nabla\Phi = 0.$$

$$\text{(III)} \qquad S = S_0 \frac{\mathsf{P}}{\mathsf{P}_0} \frac{D(\mathsf{P}, \Psi, Z)}{D(a, b, c)}.$$

$$\text{(1)} \qquad \psi \begin{cases} \varrho \\ \psi, \quad s, \quad p, \quad f. \\ z \end{cases}$$

$$\text{(2)} \quad \begin{aligned} &(\ddot{\varrho} - \dot{\Psi}^2\varrho - 2\mathsf{P}\dot{\Psi}\dot{\psi})\nabla\mathsf{P} + \frac{\partial}{\partial t}(2\mathsf{P}\dot{\Psi}\varrho + \mathsf{P}^2\dot{\psi})\nabla\Psi + \ddot{z}\nabla Z \\ &\quad + (\ddot{\mathsf{P}} - \mathsf{P}\dot{\Psi}^2)\nabla\varrho + \frac{\partial}{\partial t}(\mathsf{P}^2\dot{\Psi})\nabla\psi + \ddot{Z}\nabla z + S\nabla p + s\nabla P + \nabla\varphi = 0. \end{aligned}$$

$$\text{(3)} \quad \left(\frac{s}{S} - \frac{\varrho}{\mathsf{P}}\right)\frac{D(\mathsf{P}, \Psi, Z)}{D(a, b, c)} = \frac{D(\varrho, \Psi, Z)}{D(a, b, c)} + \frac{D(\mathsf{P}, \psi, Z)}{D(a, b, c)} + \frac{D(\mathsf{P}, \Psi, z)}{D(a, b, c)}$$

Die Piezotropiegleichungen und die Grenzflächenbedingungen bleiben dieselben wie im vorigen Paragraphen, wenn man die neuen Variablen in diese Gleichungen einführt.

81. Anwendung auf den zirkularen Wirbel. Der Grundzustand soll jetzt der schon oft behandelte stationäre zirkulare Wirbel sein. In zylindrischen Koordinaten mit der Wirbelachse als Achse hat dann jedes Teilchen einen konstanten Abstand P von der Wirbelachse, eine

konstante Höhe Z über einer Ebene senkrecht zur Achse und einen linear mit der Zeit wachsenden Längenwinkel Ψ, also:

$$\mathrm{P} = a\,, \qquad \Psi = b + \Omega t\,, \qquad Z = c\,,$$

wo Ω eine Funktion der LAGRANGEschen Numerierungskoordinaten a und c ist: $\Omega = \Omega(a, c)$. Für die Ableitungen ergeben sich die Werte:

$$\dot{\mathrm{P}} = 0\,, \quad \ddot{\mathrm{P}} = 0\,, \quad \dot{\Psi} = \Omega\,, \quad \ddot{\Psi} = 0\,, \quad \dot{Z} = 0\,, \quad \ddot{Z} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial a} = 1\,, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial a} = \frac{\partial \Omega}{\partial a} t\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial a} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial b} = 0\,, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial b} = 1\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial b} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial c} = 0\,, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial c} = \frac{\partial \Omega}{\partial c} t\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial c} = 1\,.$$

Hieraus erkennt man, daß $\nabla \boldsymbol{\Psi}$ für $t = 0$ sich auf den Einheitstensor $\mathfrak{E}$ reduziert.

Das Schema von Grundgleichungen und Störungsgleichungen wird dann in expliziter Form.

Für den Grundzustand:

(I) $$\boldsymbol{\Psi}\left\{\begin{matrix}\mathrm{P} \\ \Psi,\ S,\ P,\ F.\end{matrix}\right.$$

(II) $$-a\Omega^2 + S\frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0\,,$$
$$S\frac{\partial P}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0\,,$$
$$S\frac{\partial P}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0\,.$$

(III) $$S = S_0\,.$$

(IV) $$S = S(a, b, c, P)\,.$$

(V) $$F(a, b, c) = 0 \quad \text{und} \quad F'(a', b', c') = 0\,.$$

(VI) $$(\Omega - \Omega')\frac{\partial F}{\partial b} = 0\,, \quad (\Omega - \Omega')\frac{\partial F'}{\partial b'} = 0\,,$$
wenn $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

(VII) $$P(a, b, c, t) - P'(a', b', c', t) = 0\,,$$
enn $t = 0$, $a = a'$, $b = b'$, $c = c$

(VIII) $$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P'}{\partial t} - (\Omega - \Omega')\frac{\partial P'}{\partial b'} = 0\,,$$
$$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P'}{\partial t} - (\Omega - \Omega')\frac{\partial P}{\partial b} = 0\,,$$
wenn $t = 0$, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

(IX) $$P(a, b, c) = 0\,.$$

Für die kleinen Störungen:

$$\text{(1)} \qquad \begin{array}{l} \varrho \\ \Psi \quad \psi, \quad s, \quad p, \quad f. \end{array}$$

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} \ddot{\varrho}-\Omega^2\varrho-2a\Omega\dot{\psi}+(2a\Omega\dot{\varrho}+a^2\ddot{\psi})\dfrac{\partial\Omega}{\partial a}t-a\Omega^2\dfrac{\partial\varrho}{\partial a}+S\dfrac{\partial p}{\partial a}+s\dfrac{\partial P}{\partial a}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}=0. \\ a^2\ddot{\psi} \qquad +2a\Omega\dot{\varrho} \qquad -a\Omega^2\dfrac{\partial\varrho}{\partial b}+S\dfrac{\partial p}{\partial b}+s\dfrac{\partial P}{\partial b}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}=0, \\ \ddot{z} \qquad +(2a\Omega\dot{\varrho}+a^2\ddot{\psi})\dfrac{\partial\Omega}{\partial c}t-a\Omega^2\dfrac{\partial\varrho}{\partial c}+S\dfrac{\partial p}{\partial c}+s\dfrac{\partial P}{\partial c}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial c}=0. \end{cases}$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{s}{S}=\frac{\varrho}{a}+\frac{\partial\varrho}{\partial a}+\frac{\partial\psi}{\partial b}+\frac{\partial z}{\partial c}-\left(\frac{\partial\varrho}{\partial b}\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right)t.$$

$$\text{(4)} \qquad s=-S^2\gamma p.$$

$$\text{(5)} \quad F(a,b,c,t)+f(a,b,c,t)=0 \quad \text{und} \quad F'(a',b',c',t)+f'(a',b',c',t)=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}f(a,b,c,t)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}f'(a',b',c',t)=0,$$

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\varrho}{\partial t}-\dfrac{\partial\varrho'}{\partial t}\right)\dfrac{\partial F}{\partial a}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}-\dfrac{\partial z'}{\partial t}\right)\dfrac{\partial F}{\partial c}+(\Omega-\Omega')\left[\dfrac{\partial f}{\partial b}-\dfrac{\partial\varrho}{\partial b}\dfrac{\partial F}{\partial a}-\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial F}{\partial c}\right]=0, \\ \left(\dfrac{\partial\varrho}{\partial t}-\dfrac{\partial\varrho'}{\partial t}\right)\dfrac{\partial F'}{\partial a'}+\left(\dfrac{\partial z}{\partial t}-\dfrac{\partial z'}{\partial t}\right)\dfrac{\partial F'}{\partial c'}+(\Omega-\Omega')\left[\dfrac{\partial f'}{\partial b'}-\dfrac{\partial\varrho'}{\partial b'}\dfrac{\partial F'}{\partial a'}-\dfrac{\partial z'}{\partial b'}\dfrac{\partial F'}{\partial c'}\right]=0, \\ \qquad \text{wenn} \quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'. \end{cases}$$

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} P(a,b,c,t)+p(a,b,c,t)-P'(a',b',c',t)-p'(a',b',c',t)=0, \\ \qquad \text{wenn} \quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'. \end{cases}$$

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t}-\dfrac{\partial p'}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi'}{\partial t}\right)\cdot\nabla'P'+\left(\dfrac{\partial P}{\partial t}-\dfrac{\partial P'}{\partial t}\right)\left(\dfrac{\partial\varrho'}{\partial a'}+\dfrac{\partial\psi'}{\partial b'}+\dfrac{\partial z'}{\partial c'}\right) \\ \qquad -(\Omega-\Omega')\left[\dfrac{\partial p'}{\partial b'}-\dfrac{\partial\varrho'}{\partial b'}\dfrac{\partial P'}{\partial a'}-\dfrac{\partial z'}{\partial b'}\dfrac{\partial P'}{\partial c'}+\left(\dfrac{\partial\varrho'}{\partial a'}+\dfrac{\partial z'}{\partial c'}\right)\dfrac{\partial P'}{\partial b'}\right]=0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}-\dfrac{\partial p'}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi'}{\partial t}\right)\cdot\nabla P+\left(\dfrac{\partial P}{\partial t}-\dfrac{\partial P'}{\partial t}\right)\left(\dfrac{\partial\varrho}{\partial a}+\dfrac{\partial\psi}{\partial b}+\dfrac{\partial z}{\partial c}\right) \\ \qquad -(\Omega-\Omega')\left[\dfrac{\partial p}{\partial b}-\dfrac{\partial\varrho}{\partial b}\dfrac{\partial P}{\partial a}-\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial P}{\partial c}+\left(\dfrac{\partial\varrho}{\partial a}+\dfrac{\partial z}{\partial c}\right)\dfrac{\partial P}{\partial b}\right]=0, \\ \qquad \text{wenn} \quad t=0,\ a=a',\ b=b',\ c=c'. \end{cases}$$

$$\text{(9)} \qquad p(a,b,c)=0.$$

Man merke sich, daß die Grenzbedingung (VI) für eine Umdrehungsfläche um die Zylinderachse identisch erfüllt ist. Die Größe φ, die in der Gleichung (2) auftritt, ist durch

$$\varphi=\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial a}+\psi\frac{\partial\Phi}{\partial b}+z\frac{\partial\Phi}{\partial c}-\left(\varrho\frac{\partial\Omega}{\partial a}+z\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial b}t$$

gegeben.

82. Zweites Beispiel: Polarkoordinaten. Die abhängigen Variablen des Grundzustandes sind:

(I) $$\Psi_1 = \Theta, \quad \Psi_2 = \Psi, \quad \Psi_3 = R, \quad S, \quad P, \quad F,$$

wo Θ die Poldistanz, Ψ die geographische Länge und R der Radiusvektor ist. Für die Koordinatentransformation haben wir dann:

$$X = R\sin\Theta\cos\Psi, \qquad Y = R\sin\Theta\sin\Psi, \qquad Z = R\cos\Theta .$$

Die Größen T und D und ihre Variationen werden folglich:

$$T = \tfrac{1}{2}(R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\dot{\Psi}^2\sin^2\Theta + \dot{R}^2),$$

$$\tau = R^2\dot{\Theta}\dot{\theta} + R^2\dot{\Psi}^2\theta\sin\Theta\cos\Theta + R^2\dot{\Psi}\dot{\psi}\sin^2\Theta + \dot{R}\dot{r} + (\dot{\Theta}^2 + \dot{\Psi}^2\sin^2\Theta)Rr,$$

$$D = R^2\sin\Theta, \qquad d = R^2\theta\cos\Theta + 2Rr\sin\Theta .$$

Die Gleichungen **79** (II), (III) und (1), (2), (3) werden dann:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(R^2\dot{\Theta}) - R^2\dot{\Psi}^2\sin\Theta\cos\Theta\right]\nabla\Theta + \frac{\partial}{\partial t}(R^2\dot{\Psi}\sin^2\Theta)\nabla\Psi$$
$$+ (\ddot{R} - R\dot{\Theta}^2 - R\dot{\Psi}^2\sin^2\Theta)\nabla R + S\nabla P + \nabla\Phi = 0 .$$

$$S = S_0\frac{R^2\sin\Theta}{R_0^2\sin\Theta_0}\,\frac{D(\Theta,\Psi,R)}{D(a,b,c)}$$

(1) $$\psi, \quad s, \quad p, \quad f .$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}(R^2\dot{\theta} + 2R\dot{\Theta}r) - R^2\dot{\Psi}^2\theta\cos 2\Theta - R^2\dot{\Psi}\dot{\psi}\sin 2\Theta - R\dot{\Psi}^2 r^2\sin 2\Theta\right]\nabla\Theta$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t}[R^2\dot{\Psi}\theta\sin 2\Theta + R^2\dot{\psi}\sin^2\Theta + 2R\dot{\Psi}r\sin^2\Theta]\nabla\Psi$$
(2) $$+ [-2R\dot{\Theta}\dot{\theta} - R\dot{\Psi}^2\theta\sin 2\Theta - 2R\dot{\Psi}\dot{\psi}\sin^2\Theta + \ddot{r} - (\dot{\Theta}^2 + \dot{\Psi}^2\sin^2\Theta)\,r]\nabla R$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial t}(R^2\dot{\Theta}) - \tfrac{1}{2}R^2\dot{\Psi}^2\sin 2\Theta\right]\nabla\theta + \frac{\partial}{\partial t}[R^2\dot{\Psi}\sin^2\Theta]\nabla\psi$$
$$+ [\ddot{R} - R\dot{\Theta}^2 - R\dot{\Psi}^2\sin^2\Theta]\nabla r + S\nabla p + s\nabla P + \nabla\varphi = 0 .$$

(3) $$\left(\frac{s}{S} - \frac{\theta}{\operatorname{tg}\Theta} - 2\frac{r}{R}\right)\frac{D(\Theta,\Psi,R)}{D(a,b,c)} = \frac{D(\theta,\Psi,R)}{D(a,b,c)} + \frac{D(\Theta,\psi,R)}{D(a,b,c)} + \frac{D(\Theta,\Psi,r)}{D(a,b,c)} .$$

Die übrigen Gleichungen behalten wieder ihre alte Form bei, wenn man die neuen Variablen in sie einführt.

83. Eulersche Störungsgleichungen in cartesischen Koordinaten. Wie im Lagrangeschen Fall kann man auch hier die Gleichungen eines beliebigen Grundzustandes aufstellen und durch Variation derselben die linearisierten Störungsgleichungen für eine dem Grundzustande überlagerte kleine Störungsbewegung bilden. Das Schwerepotential Φ ist,

im Gegensatz zum LAGRANGEschen Fall, nicht zu variieren, denn es hängt nur von den unabhängigen Variablen x, y, z ab. Den LAGRANGEschen Gleichungen entsprechend ergibt sich dann in EULERschen Koordinaten das unten aufgeschriebene Gleichungssystem für den Grundzustand und die kleinen Störungen. Genau wie im LAGRANGEschen Falle sind die Grundgleichungen mit römischen, die Störungsgleichungen mit den entsprechenden arabischen Ziffern numeriert, und zwar haben entsprechende Gleichungen dieselbe Ziffer im LAGRANGEschen und im EULERschen System. Es sind also für Grundzustand bzw. Störung: (I), (1) das Schema der abhängigen Variablen; (II), (2) die Bewegungsgleichung; (III), (3) die Kontinuitätsgleichung; (IV), (4) die Piezotropiegleichung; (V), (VI), (5), (6) die kinematischen, (VII), (7) die dynamische, (VIII), (8) die gemischten Grenzflächenbedingungen und (IX), (9) die Bedingung an einer freien Oberfläche. Die Piezotropiegleichung haben wir in der einfachsten Differentialform geschrieben, wo nur ein einziger von Teilchen zu Teilchen veränderlicher Parameter eliminiert ist.

Für den Grundzustand:

$$\text{(I)} \qquad \boldsymbol{V}\begin{cases} V_x \\ \;\;{}_y \end{cases}, \quad S, \quad P, \quad F.$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V} + S\nabla P + \nabla\Phi = 0.$$

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla S - S\,\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0.$$

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla S + \gamma S^2\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla P\right) = 0.$$

$$\text{(V)} \qquad F(x, y, z, t) = 0.$$

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{V}'\cdot\nabla F = 0.$$

$$\text{(VII)} \qquad P - P' = 0.$$

$$\text{(VIII)} \quad \frac{\partial(P-P')}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla(P-P') = 0, \qquad \frac{\partial(P-P')}{\partial t} + \boldsymbol{V}'\cdot\nabla(P-P') = 0.$$

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla P = 0.$$

Für die kleinen Störungen:

$$\text{(1)} \qquad v_y, \quad s, \quad p, \quad f.$$

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{V} + S\nabla p + s\nabla P = 0.$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla s + \boldsymbol{v}\cdot\nabla S - S\,\mathrm{div}\boldsymbol{v} - s\,\mathrm{div}\boldsymbol{V} = 0$$

(4) $\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla s+\boldsymbol{v}\cdot\nabla S+\gamma S^2\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla p+\boldsymbol{v}\cdot\nabla P\right)+2\gamma Ss\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla P\right)=0.$

(5) $$F(x,y,z,t)+f(x,y,z,t)=0.$$

(6) $$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla f+\boldsymbol{v}\cdot\nabla F=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{V}'\cdot\nabla f+\boldsymbol{v}'\cdot\nabla F=0.$$

(7) $$P+p-P'-p'=0.$$

(8) $$\frac{\partial(p-p')}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla(p-p')+\boldsymbol{v}\cdot\nabla(P-P')=0,$$
$$\frac{\partial(p-p')}{\partial t}+\boldsymbol{V}'\cdot\nabla(p-p')+\boldsymbol{v}'\cdot\nabla(P-P')=0.$$

(9) $$\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla p+\boldsymbol{v}\cdot\nabla P=0.$$

Als Beispiel betrachten wir wieder den wichtigen Spezialfall der Störung eines Gleichgewichtszustandes.

84. Störung eines Gleichgewichtszustandes. Für $\boldsymbol{V}=0$ reduziert sich das oben angegebene Gleichungssystem auf die folgende Form:

(II) $$S\nabla P+\nabla\Phi=0.$$

(III) $$\frac{\partial S}{\partial t}=0.$$

(IV) $$\frac{\partial S}{\partial t}+\gamma S^2\frac{\partial P}{\partial t}=0.$$

(V) $$F(x,y,z,t)=0.$$

(VI) $$\frac{\partial F}{\partial t}=0.$$

(VII) $$P-P'=0.$$

(VIII) $$\frac{\partial}{\partial t}(P-P')=0.$$

(IX) $$\frac{\partial P}{\partial t}=0.$$

(2) $$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+S\nabla p+s\nabla P \quad =0.$$

(3) $$\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla S-S\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}=0.$$

(4) $$\frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla S+\gamma S^2\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla P\right)=0.$$

(5) $$F(x,y,z,t)+f(x,y,z,t)=0.$$

(6) $$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla F=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}'\cdot\nabla F=0.$$

$$P + p - P' - p' = 0. \tag{7}$$

$$\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla (P - P') = 0, \quad \frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla (P - P') = 0. \tag{8}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P = 0. \tag{9}$$

Wenn man schließlich auch die Störung eines stationären horizontalen Stromes untersuchen will, so hat man $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(x, y, z)$ mit den Komponenten $U, V, 0$ in das allgemeine Gleichungssystem einzuführen. Da dieses System in der vektoriellen Schreibweise nur eine einzige Vereinfachung erhält, indem das Glied $\partial \boldsymbol{V}/\partial t$ aus der Bewegungsgleichung des Grundzustandes wegfällt, braucht es hier nicht aufgeschrieben zu werden.

85. EULERsche Störungsgleichungen in allgemeinen Koordinaten. Bei der Aufstellung des entsprechenden Gleichungssystems in allgemeinen Koordinaten verwenden wir die Größen:

$$T = T(V_1, V_2, V_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, t),$$

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}.$$

Durch Variation ergibt sich:

$$\tau = \frac{\partial T}{\partial V_1} v_1 + \frac{\partial T}{\partial V_2} v_2 + \frac{\partial T}{\partial V_3} v_3, \qquad d = 0.$$

Es ergibt sich dann das folgende Gleichungssystem:

$$\boldsymbol{V} \begin{cases} V_1 \\ V_2, \quad S, \quad P, \quad F. \end{cases} \tag{I}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_V T + \boldsymbol{V} \cdot \nabla (\nabla_V T) - \nabla T + S \nabla P + \nabla \Phi = 0. \tag{II}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla S - \frac{S}{D} \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla D \right) - S \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0. \tag{III}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla S + \gamma S^2 \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla P \right) = 0. \tag{IV}$$

$$F(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t) = 0. \tag{V}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{V}' \cdot \nabla F = 0. \tag{VI}$$

$$P - P' = 0. \tag{VII}$$

$$\frac{\partial (P - P')}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla (P - P') = 0, \quad \frac{\partial (P - P')}{\partial t} + \boldsymbol{V}' \cdot \nabla (P - P') = 0. \tag{VIII}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla P = 0. \tag{IX}$$

$$(1) \qquad \ldots, \quad s, \quad p, \quad f.$$

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \nabla_V \tau + \boldsymbol{V} \cdot \nabla(\nabla_V \tau) + \boldsymbol{v} \cdot \nabla(\nabla_V T) - \nabla \tau + S \nabla p + s \nabla P = 0 .$$

$$(3) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla s + \boldsymbol{v} \cdot \nabla S - \frac{s}{D}\left(\frac{\partial D}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla D\right) - \frac{S}{D} \boldsymbol{v} \cdot \nabla D - S \operatorname{div} \boldsymbol{v} - s \operatorname{div} \boldsymbol{V} = 0 .$$

$$(4) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla s + \boldsymbol{v} \cdot \nabla S + \gamma S^2\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla p + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P\right) + 2\gamma S s\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla P\right) = 0 .$$

$$(5) \qquad F(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t) + f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, t) = 0 .$$

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla f + \boldsymbol{v} \cdot \nabla F = 0 , \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{V}' \cdot \nabla f + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla F = 0 .$$

$$(7) \qquad P + p - P' - p' = 0 .$$

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla (p - p') + \boldsymbol{v} \cdot \nabla (P - P') = 0 , \\ &\frac{\partial (p - p')}{\partial t} + \boldsymbol{V}' \cdot \nabla (p - p') + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla (P - P') = 0 . \end{aligned}$$

$$(9) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla p + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P = 0 .$$

Als Beispiel schreiben wir wieder dieses Gleichungssystem in Zylinder- und Polarkoordinaten auf.

86. Erstes Beispiel: *Zylinderkoordinaten.* Die unabhängigen Variablen sind:

$$\psi_1 = \varrho , \qquad \psi_2 = \psi , \qquad \psi_3 = z .$$

Zwischen diesen Koordinaten und den cartesischen bestehen die folgenden Relationen:

$$x = \varrho \cos\psi , \qquad y = \varrho \sin\psi , \qquad z = z .$$

Die Geschwindigkeitskomponenten des Grundzustandes werden:

$$V_\varrho = \dot{\varrho} , \qquad V_\psi = \dot{\psi} , \qquad V_z = \dot{z} .$$

Für T, D und τ ergibt sich folglich:

$$T = \tfrac{1}{2}(V_\varrho^2 + \varrho^2 V_\psi^2 + V_z^2) , \qquad D = \varrho ,$$

$$\tau = V_\varrho v_\varrho + \varrho^2 V_\psi v_\psi + V_z v_z .$$

Wenn man das Trägheitsglied dreigliedrig entwickelt, so nehmen **85** (I) bis (IV) und (1) bis (4) die folgende Form an:

$$(\mathrm{I}) \qquad \boldsymbol{V} \begin{cases} V_\psi , \quad S, \quad P, \quad F. \\ V_z \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned}&\left(\frac{\partial V_\varrho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla V_\varrho-\varrho V_\psi^2\right)\nabla\varrho+\varrho^2\left(\frac{\partial V_\psi}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla V_\psi+\frac{2}{\varrho}V_\varrho V_\psi\right)\nabla\psi\\&\qquad+\left(\frac{\partial V_z}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla V_z\right)\nabla z+S\nabla P+\nabla\Phi=0.\end{aligned}$$

$$\text{(III)}\quad \frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla S-\frac{S}{\varrho}\operatorname{div}(\varrho\boldsymbol{V})=0.$$

$$\text{(IV)}\quad \frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla S+\gamma S^2\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla P\right)=0.$$

$$\text{(1)}\quad v_\psi,\quad s,\quad p,\quad f.$$

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned}&\left(\frac{\partial v_\varrho}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla v_\varrho+\boldsymbol{v}\cdot\nabla V_\varrho-2\varrho V_\psi v_\psi\right)\nabla\varrho\\&+\varrho^2\left[\frac{\partial v_\psi}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla v_\psi+\boldsymbol{v}\cdot\nabla V_\psi+\frac{2}{\varrho}\left(V_\psi v_\varrho+V_\varrho v_\psi\right)\right]\nabla\psi\\&\qquad+\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla v_z+\boldsymbol{v}\cdot\nabla V_z\right)\nabla z+S\nabla p+s\nabla P=0.\end{aligned}$$

$$\text{(3)}\quad \frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla s+\boldsymbol{v}\cdot\nabla S-\frac{S}{\varrho}\operatorname{div}(\varrho\boldsymbol{v})-\frac{s}{\varrho}\operatorname{div}(\varrho\boldsymbol{V})=0.$$

$$\text{(4)}\quad \frac{\partial s}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla s+\boldsymbol{v}\cdot\nabla S+\gamma S^2\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla p+\boldsymbol{v}\cdot\nabla P\right)+2\gamma S s\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla P\right)=0.$$

Die Grenzbedingungen behalten dieselbe Form wie im allgemeinen Fall, diesmal aber mit ϱ, ψ, z als unabhängigen Variablen.

87. Anwendung auf den zirkularen Wirbel. Die abhängigen Variablen werden im Falle eines stationären zirkularen Wirbels:

$$\text{(I)}\quad V_\varrho=0,\quad V_\psi=\Omega(\varrho,z),\quad V_z=0,\quad S,\quad P,\quad F.$$

Führt man dies in das System der Grundgleichungen und der Störungsgleichungen ein, so ergibt sich das folgende Schema von Gleichungen:

$$\text{(II)}\quad -\varrho^2\Omega^2\nabla\varrho+S\nabla P+\nabla\Phi=0.$$

$$\text{(III)}\quad \frac{\partial S}{\partial t}+\Omega\frac{\partial S}{\partial\psi}=0,\quad \text{d. h.}\quad S=S(\varrho,\psi-\Omega t,z,P).$$

$$\text{(IV)}\quad \frac{\partial S}{\partial t}+\Omega\frac{\partial S}{\partial\psi}+\gamma S^2\left(\frac{\partial P}{\partial t}+\Omega\frac{\partial P}{\partial\psi}\right)=0,\quad \text{d. h. für } \gamma\neq0\text{: } P=P(\varrho,\psi-\Omega t,z).$$

$$\text{(V)}\quad F(\varrho,\psi,z,t)=0.$$

$$\text{(VI)}\quad \frac{\partial F}{\partial t}+\Omega\frac{\partial F}{\partial\psi}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial t}+\Omega'\frac{\partial F}{\partial\psi}=0.$$

$$\text{(VII)}\quad P-P'=0.$$

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{\partial(P-P')}{\partial t} + \Omega \frac{\partial(P-P')}{\partial \psi} = 0, \qquad \frac{\partial(P-P')}{\partial t} + \Omega' \frac{\partial(P-P')}{\partial \psi} = 0.$$

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \Omega \frac{\partial P}{\partial \psi} = 0.$$

$$(1) \qquad v_{\psi}, \quad s, \quad p, \quad f.$$

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial v_\varrho}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_\varrho}{\partial \psi} - 2\Omega \varrho v_\psi\right) \nabla \varrho + \varrho^2 \left(\frac{\partial v_\psi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_\psi}{\partial \psi} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \Omega + \frac{2}{\varrho} \Omega v_\varrho\right) \nabla \psi$$
$$+ \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_z}{\partial \psi}\right) \nabla z + S \nabla p + s \nabla P = 0.$$

$$(3) \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + \Omega \frac{\partial s}{\partial \psi} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla S - \frac{S}{\varrho} \operatorname{div}(\varrho \boldsymbol{v}) = 0.$$

$$(4) \qquad \frac{\partial s}{\partial t} + \Omega \frac{\partial s}{\partial \psi} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla S + \gamma S^2 \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \Omega \frac{\partial p}{\partial \psi} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P\right) = 0.$$

$$(5) \qquad F(\varrho, \psi, z, t) + f(\varrho, \psi, z, t) = 0.$$

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \Omega \frac{\partial f}{\partial \psi} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla F = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \Omega' \frac{\partial f}{\partial \psi} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla F = 0.$$

$$(7) \qquad P + p - P' - p' = 0.$$

$$(8) \qquad \frac{\partial(p-p')}{\partial t} + \Omega \frac{\partial(p-p')}{\partial \psi} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla (P - P') = 0,$$
$$\frac{\partial(p-p')}{\partial t} + \Omega' \frac{\partial(p-p')}{\partial \psi} + \boldsymbol{v}' \cdot \nabla (P - P') = 0.$$

$$(9) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \Omega \frac{\partial p}{\partial \psi} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla P = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung und die Piezotropiegleichung des Grundzustandes sind direkt integrabel; die integrierte Form ist rechts in den Gleichungen (III) und (IV) aufgeschrieben.

88. Zweites Beispiel: Polarkoordinaten. Wir haben in diesem Falle:

$$\psi_1 = \theta, \qquad \psi_2 = \psi, \qquad \psi_3 = r,$$

wo:

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \qquad y = r \sin\theta \sin\psi, \qquad z = r \cos\theta.$$

Die Größen T, D und τ werden folglich:

$$T = \tfrac{1}{2}\left(r^2 V_\theta^2 + r^2 V_\psi^2 \sin^2\theta + V_r^2\right), \qquad D = r^2 \sin\theta,$$
$$\tau = r^2 V_\theta v_\theta + r^2 V_\psi v_\psi \sin^2\theta + V_r v_r.$$

Es ergibt sich dann:

(I) $$V\begin{cases} V_\theta \\ {}_\psi \\ V_r \end{cases}, \quad S, \quad P, \quad F.$$

(II)
$$r^2\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla V_\theta + \frac{2}{r}V_\theta V_r - V_\psi^2 \sin\theta\cos\theta\right)\nabla\theta$$
$$+ r^2\sin^2\theta\left(\frac{\partial V_\psi}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla V_\psi + 2V_\theta V_\psi \operatorname{cotg}\theta + \frac{2}{r}V_\psi V_r\right)\nabla\psi$$
$$+\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla V_r - rV_\theta^2 - rV_\psi^2\sin^2\theta\right)\nabla r + S\nabla P + \nabla\Phi = 0.$$

(III) $$\frac{\partial S}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla S - \frac{S}{r^2\sin\theta}\operatorname{div}(r^2\sin\theta\,\boldsymbol{V}) = 0.$$

(IV) $$\frac{\partial \dot{S}}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla S + \gamma S^2\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla P\right) = 0.$$

(1) $$\begin{matrix} v_\theta \\ v_\psi \end{matrix}, \quad s, \quad p, \quad f.$$

(2)
$$r^2\left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla v_\theta + \boldsymbol{v}\cdot\nabla V_\theta + \frac{2}{r}(V_r v_\theta + V_\theta v_r) - 2V_\psi v_\psi \sin\theta\cos\theta\right]\nabla\theta$$
$$+ r^2\sin^2\theta\left[\frac{\partial v_\psi}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla v_\psi + \boldsymbol{v}\cdot\nabla V_\psi + 2(V_\psi v_\theta + V_\theta v_\psi)\operatorname{cotg}\theta + \frac{2}{r}(V_r v_\psi + V_\psi v_r)\right]\nabla\psi$$
$$+\left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla v_r + \boldsymbol{v}\cdot\nabla V_r - 2r V_\theta v_\theta - 2r V_\psi v_\psi \sin^2\theta\right]\nabla r + S\nabla p + s\nabla P = 0.$$

(3) $$\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla s + \boldsymbol{v}\cdot\nabla S - \frac{S}{r^2\sin\theta}\operatorname{div}(r^2\sin\theta\,\boldsymbol{v}) - \frac{s}{r^2\sin\theta}\operatorname{div}(r^2\sin\theta\,\boldsymbol{V}) = 0.$$

(4) $$\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla s + \boldsymbol{v}\cdot\nabla S + \gamma S^2\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla p + \boldsymbol{v}\cdot\nabla P\right) + 2\gamma S s\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \boldsymbol{V}\cdot\nabla P\right) = 0.$$

Die Grenzbedingungen folgen aus den allgemeinen Gleichungen, wenn man θ, ψ, r als unabhängige Variablen benutzt.

Achtes Kapitel.

Einfache Gleichgewichtsstörungen.

89. Gleichungen der Gleichgewichtsstörung in homogenem Schwerkraftfelde. Wir wollen uns jetzt speziellen Integrationsaufgaben zuwenden. Dabei können die Aufgaben, die wir in Angriff nehmen, nach verschiedenen Prinzipien eingeteilt werden.

Ein wichtiges Einteilungsprinzip ist dabei das verwendete Koordinatensystem. Wir beginnen mit Aufgaben, bei denen wir cartesische Koordinaten zugrunde legen können.

Ein anderes Einteilungsprinzip ist die Art des Grundzustandes. Dabei tritt als besonders einfach der Fall des Gleichgewichtszustandes hervor. Jedem Koordinatensystem kann man einen besonders einfachen Gleichgewichtszustand zuordnen, bei dem eine Schar von Koordinatenflächen als Flächen gleichen Druckes auftritt.

Wenn man die Störung einfacher Gleichgewichtszustände studiert hat, kann man zu der Störung einfacher Bewegungszustände übergehen. Dabei kann man wieder den verschiedenen Koordinatensystemen einfache Bewegungszustände zuordnen, bei denen die Stromlinien Koordinatenkurven sind.

Man kann in dieser Weise eine Reihe von mathematisch relativ einfachen Aufgaben formulieren, von denen wir die nächstliegenden behandeln wollen.

Wir beginnen also mit den LAGRANGEschen Störungsgleichungen eines Gleichgewichtszustandes, die in **77** zusammengestellt worden sind; und zwar nehmen wir sofort, der Einfachheit halber, als äußere Kraft eine konstante, längs der negativen Vertikalen gerichtete Schwerkraft an:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = g. \tag{1}$$

Die cartesischen Gleichungen des Grundzustandes **77** (II′) reduzieren sich dann auf:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial b} = 0, \qquad S\frac{\partial P}{\partial c} = -g; \tag{2}$$

die Kontinuitätsgleichung ist identisch erfüllt, und die Piezotropiegleichung ergibt:

$$S = S(c, P). \tag{3}$$

Der Druck und das spezifische Volumen sind also nur von der Vertikalen abhängig.

Die Grenzbedingung an einer starren, unbeweglichen Grenzfläche ist in diesem Gleichgewichtszustande natürlich immer erfüllt. An einer inneren Diskontinuitätsfläche dagegen ist die dynamische Grenzbedingung nur für horizontale Flächen erfüllbar, und zwar erfordert sie:

$$P(c) - P'(c') = 0, \quad \text{wenn } c = c'. \tag{4}$$

Die Störungsgleichungen **77** (2′a) reduzieren sich wegen Gleichung (1), die $\varphi = gz$ ergibt, auf:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + S\frac{\partial p}{\partial a} + g\frac{\partial z}{\partial a} &&= 0, \\ &\ddot{y} + S\frac{\partial p}{\partial b} + g\frac{\partial z}{\partial b} &&= 0, \\ &\ddot{z} + S\frac{\partial p}{\partial c} + g\frac{\partial z}{\partial c} + g\gamma S p &&= 0, \end{aligned} \tag{5a}$$

und die abgeänderte Form **77** (2′b) wird entsprechend:

$$(5\text{b})\qquad \begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp + gz) &&= 0\,,\\ &\ddot{y} + \frac{\partial}{\partial b}(Sp + gz) &&= 0\,,\\ &\ddot{z} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp + gz) - g(\Gamma - \gamma)Sp &&= 0\,, \end{aligned}$$

während die Kontinuitätsgleichung ihre frühere Form

$$(6)\qquad \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma Sp = 0$$

beibehält.

Wenn im Grundzustande nur horizontale Grenzflächen mit der Gleichung

$$(7)\qquad F = c - c_0 = 0 \quad \text{oder} \quad F' = c' - c_0 = 0$$

vorkommen, so reduzieren sich die beiden Grenzbedingungen **77** (6a) auf die eine Gleichung:

$$(8)\qquad z - z' = 0\,, \quad \text{wenn } c = c'.$$

An der inneren Grenzfläche (4) erhalten wir aus **77** (8a) unter Berücksichtigung von (8) die folgende Grenzbedingung:

$$(9)\qquad p - p' = 0\,, \quad \text{wenn } c = c'.$$

In den folgenden Paragraphen diskutieren wir die einfachsten Lösungen dieses Gleichungssystems.

90. Erzwungene Schwingungen. Wir betrachten zunächst eine ganz einfache Flüssigkeitsbewegung. Um möglichst große Vereinfachung zu erzielen, nehmen wir dabei die Flüssigkeit als homogen und inkompressibel an, d. h.: $\Gamma = \gamma = 0$, und sehen von jeder äußeren Kraft ab, d. h. $g = 0$. Die Gleichungen des Grundzustandes zeigen dann, daß der Druck P von den Koordinaten unabhängig ist, und die Störungsgleichungen **89** (5b) und (6) reduzieren sich auf:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp) = 0\,,\\ &\ddot{y} + \frac{\partial}{\partial b}(Sp) = 0\,,\\ &\ddot{z} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp) = 0\,,\\ &\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} = 0\,. \end{aligned}$$

Wir betrachten zuerst eine eindimensionale Störungsbewegung. Da die Gleichungen (1) in den Koordinaten x, y, z völlig symmetrisch sind, können wir in diesem Falle ohne Beschränkung der Allgemeinheit

annehmen, daß die Störungsbewegung in der x-Richtung verläuft. Für $y = z = 0$ ergibt sich aber aus (1), daß die Störung von b und c unabhängig sein muß, und es bleiben nur noch die Gleichungen:

$$\ddot{x} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp) = 0\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial a} = 0\,, \tag{2}$$

mit der Lösung:

$$x = F(t)\,, \qquad p = Q(a_1 - a)\,F''(t)\,. \tag{3}$$

Die ganze Flüssigkeit bewegt sich also wie ein fester Körper, wobei der Störungsdruck p mit dem Abstande von der Ebene $a = a_1$ linear zunimmt. Da der Störungsdruck in dieser Ebene verschwindet, kann sie auch als freie Oberfläche genommen werden. Diese physikalisch uninteressante Bewegung kann auch als Grenzfall einer in der a-Richtung verlaufenden longitudinalen Wellenbewegung gedeutet werden, deren Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich sind.

Wir gehen jetzt zu einer zweidimensionalen Störungsbewegung über, bei der, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $y = 0$ gewählt ist. Die Störung wird dann von b unabhängig, und wir erhalten aus (1):

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp) = 0\,, \\ &\ddot{z} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp) = 0\,, \\ &\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} \quad = 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Durch Elimination findet man leicht, daß die Variablen einer LAPLACEschen Differentialgleichung genügen müssen, die bei der Behandlung komplizierterer Probleme gelöst werden muß. Für unsere Zwecke genügt jedoch eine einfachere Lösung, deren Form sich sofort aus der Tatsache ergibt, daß die Gleichungen (1) konstante Koeffizienten besitzen und folglich durch Exponentialfunktionen befriedigt werden, die bei komplexen Exponenten eine reelle exponentiell-trigonometrische Form annehmen. Wir versuchen folglich eine einfach-harmonische Lösung der Form[1]:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= A\,e^{\lambda c}\cos(\mu a - \nu t)\,, \\ z &= C\,e^{\lambda c}\sin(\mu a - \nu t)\,, \\ Sp &= D\,e^{\lambda c}\sin(\mu a - \nu t)\,, \end{aligned} \right. \tag{5}$$

[1] Es sei darauf hingewiesen, daß diese Ausdrücke, wie auch die folgenden ähnlichen Ausdrücke, den Bedingungen 75 (5) nicht genügen. Sie stellen aber nichtsdestoweniger eine mögliche Lösung dar, wie man sofort durch Übergang zu den EULERschen Gleichungen erkennt. Aus den am Ende von Abschnitt 33 angegebenen Gründen ziehen wir es jedoch vor, das LAGRANGEsche Gleichungssystem beizubehalten.

d. h. eine Wellenbewegung, deren Wellenlänge L, Periode T und Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ die folgenden sind:

$$L = \frac{2\pi}{\mu}, \qquad T = \frac{2\pi}{\nu}, \qquad \omega = \frac{\;}{\mu} = \frac{\;}{T}. \tag{6}$$

Beim Einsetzen der Ansätze (5) in die Gleichungen (4) fallen die trigonometrischen Faktoren fort, und es ergibt sich das folgende lineare, homogene Gleichungssystem zur Bestimmung der drei konstanten Amplitudenfaktoren A, C, D:

$$\begin{cases} -\nu^2 A \qquad\qquad + \mu D = 0, \\ \qquad\quad -\nu^2 C + \lambda D = 0, \\ -\mu A + \lambda C \qquad\qquad = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Damit die Amplituden nicht identisch verschwinden, muß die Determinante der Koeffizienten gleich Null sein. Dies ergibt:

$$\nu^2 (\lambda^2 - \mu^2) = 0. \tag{8}$$

Da nun $\nu = 0$ überhaupt keine Bewegung gibt, ist $\lambda = \pm\mu$ die einzige nichttriviale Lösung. Diese beiden Werte von λ ergeben dann zusammen mit den Gleichungen (7) die folgenden Werte der Amplituden, ausgedrückt durch die als gegeben anzusehende Horizontalamplitude A:

$$\lambda = \mu, \qquad C = A, \qquad D = \frac{\nu^2}{\mu} A. \tag{9}$$

$$\lambda' = -\mu, \qquad C' = -A', \qquad D' = \frac{\nu^2}{\mu} A'. \tag{10}$$

Es wird sich übrigens als vorteilhaft erweisen, $A' = -A$ zu wählen. In (5) eingesetzt, ergeben sich zwei verschiedene Lösungen, die zu (9) bzw. (10) gehören:

$$\begin{aligned} x &= A e^{\mu c} \cos(\mu a - \nu t), \\ z &= A e^{\mu c} \sin(\mu a - \nu t), \\ p &= Q A \frac{\nu^2}{\mu} e^{\mu c} \sin(\mu a - \nu t); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} x' &= -A e^{-\mu c} \cos(\mu a - \nu t), \\ z' &= A e^{-\mu c} \sin(\mu a - \nu t), \\ p' &= -Q A \frac{\nu^2}{\mu} e^{-\mu c} \sin(\mu a - \nu t). \end{aligned} \tag{12}$$

Wir betrachten zunächst die Gleichungen (11). Sie stellen eine *gemischt longitudinale und transversale* Welle dar; eine materielle horizontale Linie schwingt während der Bewegung mit sinusförmigem Wellenprofil. Jedes Teilchen beschreibt in positiver Richtung eine Kreisbahn:

$$x^2 + z^2 = A^2 e^{2\mu c}, \tag{13}$$

deren Radius $r = A e^{\mu c}$ mit abnehmendem c, d. h. nach abwärts, exponentiell abnimmt. Das Teilchen bewegt sich folglich scheinbar

unter dem Einfluß einer gegen das Zentrum der Kreisbahn gerichteten Anziehungskraft, vom Betrag $\nu^2 r$, die der Zentrifugalkraft $v^2/r = \nu^2 r$ das Gleichgewicht hält.

Die Integration der Stromliniengleichung ergibt:

$$e^{\mu c} \sin(\mu a - \nu t) = K, \tag{14}$$

also Stromlinien vom konkav-parabolischen Typus IA (s. S. 79).

Durch Superposition von zwei Wellen mit gleicher Amplitude, aber entgegengesetzter Fortpflanzungsgeschwindigkeit, ergeben sich in der üblichen Weise stehende Schwingungen, deren Stromlinienbild ebenfalls durch (14) dargestellt wird.

Die somit beschriebene Störungsbewegung ist eine im Innern der Flüssigkeit mögliche Bewegung. Die Flüssigkeit darf allerdings nicht unbegrenzte Ausdehnung nach oben besitzen, weil die Störungen für ein positiv unendliches c über alle Grenzen wachsen. Wir können aber die Flüssigkeit an einer wellenförmigen Fläche enden lassen, wenn wir nur dafür sorgen, daß die Vertikalverschiebung der Teilchen dieser Fläche und der Druck, der von oben auf sie ausgeübt wird, immer noch dieselben wie vorher bleiben. Dies ist der Fall für eine wie ein Wellenblech erstarrte Fläche von derselben Wellenlänge wie die der Störung, wenn diese Fläche außerdem noch in der Richtung der Wellenfortpflanzung mit der Geschwindigkeit $\tilde{\omega} = \nu/\mu$ gezogen wird. Der Bequemlichkeit halber legen wir die Koordinatenebene $c = 0$ in die mittlere Höhe dieses Wellenblechs. Die Flüssigkeitsteilchen an der Fläche sind dann gezwungen, die Vertikalverschiebungen $z = A \sin(\mu a - \nu t)$ auszuführen, und die tieferliegenden Teilchen führen zwangsweise die nach unten zu abklingende Störungsbewegung (11) aus.

Die Lösung (12) stellt eine Wellenbewegung dar, die, von der entgegengesetzten Phase abgesehen, in bezug auf die Ebene $c = 0$ ein Spiegelbild der eben betrachteten Bewegung ist. Sie stellt somit die erzwungene Schwingung dar, welche die Flüssigkeit oberhalb des Wellenblechs infolge der Bewegung desselben ausführen muß. Es ist wichtig zu beachten, daß die Vertikalverschiebungen zu beiden Seiten der Fläche gleichgerichtet sind, während die Horizontalverschiebungen und die Drucke entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wegen des Drucksprunges an der Fläche kann diese niemals entfernt werden.

Schließlich betrachten wir eine dreidimensionale Störungsbewegung der einfach-harmonischen Form:

$$\left\{\begin{aligned} x &= A e^{\varkappa b + \lambda c} \cos(\mu a - \nu t), \\ y &= B e^{\varkappa b + \lambda c} \sin(\mu a - \nu t), \\ z &= C e^{\varkappa b + \lambda c} \sin(\mu a - \nu t), \\ Sp &= D e^{\varkappa b + \lambda c} \sin(\mu a - \nu t). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Durch Einführung dieser Ansätze in das Gleichungssystem (1) erhalten wir die folgenden linearen, homogenen Gleichungen zur Bestimmung der Amplitudenfaktoren A, B, C, D:

$$\begin{aligned} -\nu^2 A \qquad\qquad\qquad &+ \mu D = 0, \\ -\nu^2 B \qquad\quad &+ \varkappa D = 0, \\ -\nu^2 C &+ \lambda D = 0, \\ -\mu A + \varkappa B + \lambda C \qquad &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Das Verschwinden der Determinante der Koeffizienten ergibt:

$$\nu^4(\lambda^2 + \varkappa^2 - \mu^2) = 0, \tag{17}$$

wobei nur die Wurzeln des zweiten Faktors von Bedeutung sind. Wenn wir

$$\varkappa = \mu \sin\varphi$$

setzen, wo φ einen beliebigen Winkel bedeutet, so sind diese Wurzeln:

$$\lambda = \pm\mu\cos\varphi, \tag{17'}$$

und die zugehörigen Amplituden ergeben sich aus (16) zu:

$$B = A\sin\varphi, \qquad C = \pm A\cos\varphi, \qquad D = \frac{\nu^2}{\mu} A. \tag{18}$$

Damit erhält man zwei verschiedene Lösungen der Form (15):

$$\begin{aligned} x &= A\, e^{\mu(b\sin\varphi \pm c\cos\varphi)} \cos(\mu a - \nu t), \\ y &= A \sin\varphi\, e^{\mu(b\sin\varphi \pm c\cos\varphi)} \sin(\mu a - \nu t), \\ z &= \pm A \cos\varphi\, e^{\mu(b\sin\varphi \pm c\cos\varphi)} \sin(\mu a - \nu t), \\ p &= QA\frac{\nu^2}{\mu} e^{\mu(b\sin\varphi \pm c\cos\varphi)} \sin(\mu a - \nu t). \end{aligned} \tag{19}$$

Da $y\cos\varphi \mp z\sin\varphi = 0$ ist, liegt auch hier im Grunde genommen eine *zweidimensionale* Störungsbewegung vor, die sich in Ebenen parallel zur Ebene $b\cos\varphi \mp c\sin\varphi = 0$ abspielt. Durch die Fortbewegung eines Wellenbleches der Gleichung

$$y\sin\varphi \pm z\cos\varphi = A\sin(\mu a - \nu t)$$

wird die Flüssigkeit beiderseits dieser Fläche gezwungen, die mit der Entfernung vom Wellenblech exponentiell abklingende Störungsbewegung (19) auszuführen. Für $\varphi = 0$ reduziert sich diese Bewegung speziell auf die oben betrachteten Störungen (11) und (12). Die Lösungen (19) unterscheiden sich folglich von (11) und (12) nur durch eine andere Orientierung der Bewegung relativ zu den Achsen. Man wird am Ende des nächsten Abschnittes den Nutzen dieser allgemeinen Lösung (19) erkennen.

Bisher ist φ und damit auch $\varkappa$ reell angenommen worden. Ist aber $\varkappa$ imaginär, $\varkappa = i\,\bar{\varkappa}$, so kann man b in das trigonometrische Glied hineinziehen und hat also Integrale der Form

$$e^{\lambda c}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\mu a + \bar{\varkappa} b - \nu t)$$

zu studieren. Dies ist aber nichts anderes als eine zweidimensionale Wellenlösung (5) mit der Fortpflanzungsrichtung senkrecht zur Geraden $\mu a + \bar{\varkappa} b = 0$ und mit der Wellenzahl $\sqrt{\mu^2 + \bar{\varkappa}^2}$.

Wünscht man jedoch eine Welle, die sich in Richtung der a-Achse fortpflanzt, so superponiert man der eben angegebenen Welle die entsprechende mit negativem b, die sich also senkrecht zur Geraden $\mu a - \bar{\varkappa} b = 0$ fortpflanzt. Die resultierende Welle, die mit stehenden Schwingungen längs der b-Achse verbunden ist („schwappende Wellen"), würde man auch aus (19) erhalten können durch Einführung von $\varphi = i\bar{\varphi}$ und Weglassen des imaginären Teiles der somit komplex gewordenen Integrale.

91. Reine Schwerewellen. Wir betrachten jetzt einen anderen, seit langem bekannten Fall der Gleichgewichtsstörung.

Wir nehmen wieder die Flüssigkeit homogen und inkompressibel an, vernachlässigen aber nicht mehr die Schwere. Die Integration der Gleichung des Grundzustandes ergibt dann:

$$P = P_0 - \varrho g (c - c_0)\,.$$

Eine eindimensionale Störungsbewegung, die z. B. in der z-Richtung verläuft, ist durch eine uninteressante Lösung von ähnlicher Form wie **90** (3) gegeben. Eine in der ab-Ebene enthaltene zweidimensionale Störungsbewegung wird auch durch Lösungen der Form **90** (11) und (12) bestimmt, da die Schwere dann überhaupt nicht eingreifen kann. Erst wenn sich die zweidimensionale Störungsbewegung in einer Vertikalebene abspielt, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als die ac-Ebene gewählt werden kann, erhalten wir etwas Neues. Die Störungsgleichungen werden dann:

$$(1)\qquad \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{\partial}{\partial a}(Sp + gz) = 0\,, \\ \ddot{z} + \dfrac{\partial}{\partial c}(Sp + gz) = 0\,, \\ \dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{\partial z}{\partial c} \qquad\qquad = 0\,. \end{cases}$$

Sie können wieder durch den einfach-harmonischen Lösungsansatz **90** (5) befriedigt werden, falls die Konstanten der Lösung die folgenden Relationen erfüllen:

$$(2)\qquad \lambda = \pm\mu\,,\quad C = \pm A\,,\quad D = \left(\frac{\nu^2}{\mu} \mp g\right)A\,.$$

Dementsprechend erhalten wir zwei verschiedene Lösungen, nämlich:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= A\,e^{\mu c}\cos(\mu a - \nu t)\,, \\ z &= A\,e^{\mu c}\sin(\mu a - \nu t)\,, \\ p &= QA\left(\frac{\nu^2}{\mu} - g\right)e^{\mu c}\sin(\mu a - \nu t)\,; \end{aligned}$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} x' &= -A\,e^{-\mu c}\cos(\mu a - \nu t)\,, \\ z' &= A\,e^{-\mu c}\sin(\mu a - \nu t)\,, \\ p' &= -QA\left(\frac{\nu^2}{\mu} + g\right)e^{-\mu c}\sin(\mu a - \nu t)\,. \end{aligned}$$

Von dem Druckamplitudenfaktor abgesehen, sind also die Lösungen identisch mit denjenigen der erzwungenen Schwingungen **90** (11) und (12). Das kinematische Bild der Wellenbewegung bleibt folglich ungeändert: die Teilchen beschreiben also Kreise in positiver Richtung im Falle (3), in negativer im Falle (4). Wieder kann die Flüssigkeit mit der Störungsbewegung (3) nach oben durch ein Wellenblech abgegrenzt werden, das sich mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit fortbewegt. Hier kann jedoch der Störungsdruck p gegen diese starre bewegte Grenzfläche verschwinden, was bei den erzwungenen Schwingungen niemals vorkommen könnte, und zwar muß dann $\frac{\nu^2}{\mu} - g = 0$ sein, d. h. das Wellenblech muß die Geschwindigkeit

$$(5)\qquad \tilde{\omega} = \frac{\nu}{\mu} = \pm\sqrt{\frac{g}{\mu}} = \pm\sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

besitzen.

Da $p = 0$ eben die Grenzbedingung an einer freien Oberfläche ist, kann man also in diesem Falle das Wellenblech wegnehmen und erhält somit durch (3) die Wellenstörung einer unendlichen Flüssigkeitsschicht mit freier Oberfläche. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist durch Gleichung (5) gegeben, welche die bekannte STOKES*sche Fortpflanzungsgeschwindigkeit* von Oberflächenwellen auf tiefem Wasser darstellt: *sie ist also der Quadratwurzel aus der Wellenlänge proportional.*

In diesem Falle verschwindet übrigens der Störungsdruck nicht nur an der freien Oberfläche, sondern in der ganzen Flüssigkeit. Dies gilt natürlich nur für den LAGRANGEschen Störungsdruck eines bewegten Teilchens, während dagegen der EULERsche Störungsdruck in einem und demselben geometrischen Punkte bei dieser Wellenbewegung Änderungen aufweist.

Da $\nu^2 r = \mu g r$, wo r der Radius der Kreisbahn ist, so bewegt sich jedes Teilchen wie unter dem Einfluß einer gegen das Zentrum gerichteten Anziehungskraft vom absoluten Betrag $\mu g r$.

Die Lösung (4) stellt die Störungsbewegung einer unbegrenzten Flüssigkeitsschicht oberhalb des bewegten Wellenbleches dar. Wegen der Relativität der Bewegung kann man auch der ganzen Flüssigkeit eine Bewegung entgegengesetzt gleich derjenigen des Wellenbleches erteilen und erhält somit den Fall einer Flüssigkeit, die über einen gewellten Boden hinströmt. Die Lösung (4) kann folglich auch als die störende Einwirkung von Gebirgen auf einen hinüberwehenden Windstrom gedeutet werden.

Wir betrachten wieder den Fall, daß ein horizontal bewegtes Wellenblech zwei unbegrenzte Flüssigkeiten in $c = 0$ trennt und ihnen die Störungsbewegungen (3) und (4) erteilt. Kinematisch schließen sich die beiden Bewegungen vollkommen aneinander an, denn an der Grenzfläche $c = 0$ besteht dieselbe Vertikalverschiebung, $z = z'$. Wenn außerdem auch noch der Störungsdruck beiderseits der Grenzfläche derselbe wäre, so könnte man das Wellenblech wegnehmen. Gleichheit der Störungsdrucke läßt sich allerdings für zwei Flüssigkeiten derselben Dichte nicht erreichen; wenn aber die obere Flüssigkeit eine von Q verschiedene Dichte Q' besitzt, so ergibt sich aus der Grenzbedingung $p = p'$ für $c = 0$:

$$Q\left(\frac{\nu^2}{\mu} - g\right) = -Q'\left(\frac{\nu^2}{\mu} + g\right). \tag{6}$$

Die Wellen an der Diskontinuitätsfläche zwischen zwei unbegrenzten Flüssigkeitsschichten haben folglich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\tilde{\omega} = \frac{\nu}{\mu} = \pm\sqrt{\frac{Q - Q'}{Q + Q'}\,\frac{g}{\mu}} \tag{6'}$$

Setzt man die Dichte der oberen Schicht gleich Null, so ergibt sich wieder die Formel (5).

Ist die obere Schicht die schwerere, $Q' > Q$, so werden die Werte von $\tilde{\omega}$ und damit auch von ν imaginär, und die Störung wächst mit der Zeit exponentiell an; entsprechend ist der Gleichgewichtszustand instabil, und zwar *statisch instabil.*

Das allgemeine Integral von (1) ist durch eine Linearkombination der partikulären Lösungen (3) und (4) mit zwei verschiedenen Konstanten A gegeben:

$$\begin{aligned} x &= (A_1 e^{\mu c} - A_2 e^{-\mu c}) \cos(\mu a - \nu t), \\ z &= (A_1 e^{\mu c} + A_2 e^{-\mu c}) \sin(\mu a - \nu t), \\ p &= Q\left[A_1\left(\frac{\nu^2}{\mu} - g\right) e^{\mu c} - A_2\left(\frac{\nu^2}{\mu} + g\right) e^{-\mu c}\right] \sin(\mu a - \nu t) \end{aligned} \tag{7}$$

Die noch zur Verfügung stehenden willkürlichen Konstanten können so gewählt werden, daß die Grenzbedingungen sowohl an einem festen Boden in endlicher Tiefe wie auch an einer freien Oberfläche erfüllt werden. Am festen Boden $c = c_0$ gilt nach **89** (8) die Grenzbedingung $z = 0$, die erfüllt wird, wenn man

$$\tfrac{1}{2} A = A_1 e^{\mu c_0} = -A_2 e^{-\mu c_0}$$

als neue Konstante einführt. Mit Hilfe der hyperbolischen Funktionen:

$$\cosh \mu (c - c_0) = \frac{e^{\mu(c-c_0)} + e^{-\mu(c-c_0)}}{}, \qquad \sinh \mu (c - c_0) = \frac{e^{\mu(c-c_0)} - e^{-\mu(c-c_0)}}{}$$

bringt man dann die Ausdrücke (7) auf die Form:

$$(7') \quad \begin{aligned} x &= A \cosh \mu (c - c_0) \cos (\mu a - \nu t), \\ z &= A \sinh \mu (c - c_0) \sin (\mu a - \nu t), \\ p &= \varrho A \left[\frac{\nu^2}{\mu} \cosh \mu (c - c_0) - g \sinh \mu (c - c_0)\right] \sin (\mu a - \nu t). \end{aligned}$$

Verlangt man außerdem, daß die Teilchen $c = c_1$ eine freie Oberfläche bilden sollen, so muß der Störungsdruck p für diese Teilchen verschwinden, d. h. es muß

$$(8) \qquad \frac{\nu^2}{\mu} \cosh \mu (c_1 - c_0) = g \sinh \mu (c_1 - c_0)$$

oder

$$(8') \qquad \tilde{\omega} = \pm \sqrt{\frac{g}{\mu} \operatorname{tgh} \mu (c_1 - c_0)}$$

sein. Für unendliche Tiefe der Flüssigkeit, $c_1 - c_0 = \infty$, wird der hyperbolische Tangens gleich 1, und man erhält die Formel (5) wieder.

Die Bahnen der Teilchen ergeben sich aus (7′) zu:

$$(9) \qquad \frac{}{A^2 \cosh^2 \mu (c - c_0)} + \frac{}{A^2 \sinh^2 \mu (c - c_0)} = 1;$$

sie sind also nicht mehr Kreise, wie im Falle unendlicher Tiefe, sondern Ellipsen, deren große Achse horizontal und deren kleine Achse vertikal liegt und deren konstanter Brennpunktsabstand gleich $2A$ ist. Die kleine Achse wird am Boden gleich Null, hier schwingen die Teilchen längs gerader horizontaler Linienelemente der Länge $2A$. Die Umlaufsrichtung der Teilchen in ihren Bahnen ist positiv.

Durch Integration der Stromliniengleichung ergibt sich:

$$(10) \qquad \sinh \mu (c - c_0) \sin (\mu a - \nu t) = K,$$

also Stromlinien des konkav-parabolischen Typus IB, S. 79.

Wenn die Tiefe der Flüssigkeit relativ zur Wellenlänge sehr klein ist, wird $\mu (c - c_0)$ eine kleine Größe, und man kann angenähert den

hyperbolischen Sinus durch sein Argument und den hyperbolischen Kosinus durch 1 ersetzen. Die elliptischen Bahnen werden dann unendlich flach, und die Stromlinien flachen sich auch unten zu einem nahezu horizontalen Verlauf ab, um dann scharf nach oben umzubiegen, wodurch sie angenähert eine rektanguläre Form erhalten. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (8′) wird schließlich *von der Wellenlänge unabhängig*, indem sie sich auf die bekannte LAGRANGE*sche Fortpflanzungsgeschwindigkeit* von sog. *langen Wellen* auf seichtem Wasser reduziert:

$$\tilde{\omega} = \pm\sqrt{g(c_1 - c_0)}\,. \tag{11}$$

Hiernach ist *die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Fallgeschwindigkeit eines Körpers, der eine Höhe gleich der halben Schichttiefe durchfallen hat.* Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für alle Wellenlängen dieselbe ist, kann man aus einer beliebigen Anzahl von Sinuswellen verschiedener Wellenlängen eine zusammengesetzte Welle beliebigen Wellenprofils bilden, die sich mit derselben Fortpflanzungsgeschwindigkeit und unverändertem Wellenprofil fortpflanzt. Für die wesentlich nur in Frage kommende x-Komponente erhält man dann die Lösung in der Form:

$$x = F_1(a - \tilde{\omega} t)\,. \tag{12}$$

die man auch direkt aus den Störungsgleichungen ableiten kann, nachdem man die Bewegungsgleichung für die Vertikale durch die Gleichgewichtsgleichung ersetzt hat. Auf diese wichtige *quasistatische Methode* werden wir später zurückkommen (Kap. X).

Die untenstehende Tabelle gibt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (8′) in Abhängigkeit von der Schichtdicke $c_1 - c_0$ und der Wellenlänge $L = 2\pi/\mu$. Die letzte Spalte, wo L gleich unendlich ist, gibt die LAGRANGEsche Fortpflanzungsgeschwindigkeit (11), und die letzte Zeile, wo $c_1 - c_0$ gleich unendlich ist, gibt die STOKESsche Fortpflanzungsgeschwindigkeit (5).

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der reinen Schwerewellen.

$c_1 - c_0$ m \ L m	0	1	10	100	500	1000	5000	10000	100000	1000000	∞ (LAGRANGE)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
10	0	1	4	9	10	10	10	10	10	10	10
100	0	1	4	12	26	29	31	31	31	31	31
1000	0	1	4	12	28	39	81	93	99	99	99
10000	0	1	4	12	28	39	88	125	295	313	313
∞ (STOKES)	0	1	4	12	28	39	88	125	394	1250	∞

Wir wollen schließlich kurz die Störungsbewegung angeben, die sich in parallelen, zur Richtung der Schwerkraft geneigten Ebenen abspielt. Der Lösung **90** (19) entsprechend ergibt sich hier:

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
x &= A\, e^{\mu(b\sin\varphi \pm c\cos\varphi)} \cos(\mu a - \nu t)\,,\\
y &= A \sin\varphi\, e^{\mu(b\sin\varphi \pm c\cos\varphi)} \sin(\mu a - \nu t)\,,\\
z &= \pm A \cos\varphi\, e^{\mu(b\sin\varphi \pm c\cos\varphi)} \sin(\mu a - \nu t)\,,\\
p &= QA\left(\frac{\nu^2}{\mu} - g\cos\varphi\right) e^{\mu(b\sin\varphi \pm c\cos\varphi)} \sin(\mu a - \nu t)\,.
\end{aligned}
$$

Da die Bewegung parallel zur Ebene $b\cos\varphi \mp c\sin\varphi = 0$ verläuft, kann man diese als starr annehmen. Wählt man das obere Vorzeichen, so erhält man den Fall der Fortpflanzung von Wasserwellen längs einer schrägen Küste, die den Winkel $90° - \varphi$ mit der Horizontalebene bildet. Wegen des Verschwindens von p an der freien Oberfläche muß dann $\frac{\nu^2}{\mu} - g\cos\varphi = 0$ sein, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist durch

$$
(14)\qquad \tilde{\omega} = \frac{\nu}{\mu} = \sqrt{\frac{g\cos\varphi}{\mu}}
$$

gegeben. Diese von STOKES gefundenen Wellen (13) werden gewöhnlich *Randwellen* genannt, weil in der Oberfläche die Amplituden an der Küste am größten sind, wobei sie mit dem Abstand von der Küste exponentiell abnehmen.

Für $\varphi = 0$ erhält man hieraus wieder die STOKESsche Formel (5).

92. Schwerewellen in mehreren Schichten. Ausgehend von der Grundlösung (7) des vorigen Abschnittes für eine beliebige homogene inkompressible Schicht, kann man zu dem zusammengesetzten Falle übergehen, daß beliebig viele solcher Schichten übereinandergelagert sind. Wir wollen uns hier nicht mit allen Einzelheiten der Rechnung aufhalten, da wir sie im Abschnitt **100** für flüssige Schichten mit allgemeineren Eigenschaften durchführen werden. Einige spezielle Formeln schreiben wir jedoch zum Vergleich mit den unten abzuleitenden allgemeineren auf.

Wenn zwei Schichten übereinandergelagert sind, die sowohl unten wie oben durch starre horizontale Grenzflächen $c = c_0$ und $c = c_2$ begrenzt sind, so gilt für die untere Schicht die Lösung **91** (7′) und für die obere Schicht die entsprechende Lösung mit gestrichenen Buchstaben und mit c_2 an Stelle von c_0. Die Grenzbedingung $z = z'$ an der inneren Grenzfläche $c = c_1$ wird dann erfüllt durch Einführung einer neuen Konstanten A_0:

$$
A_0 = A \sinh\mu(c_1 - c_0) = A' \sinh\mu(c_1 - c_2)\,.
$$

Die vollständige Lösung wird dann:

$$x = \frac{A_0}{\sinh\mu(c_1 - c_0)} \cosh\mu(c - c_0) \cos(\mu a - \nu t),$$

$$(1) \qquad \frac{A_0}{\sinh\mu(c_1 - c_0)} \sinh\mu(c - c_0) \sin(\mu a - \nu t),$$

$$p = \frac{Q A_0}{\sinh\mu(c_1 - c_0)} \left[\frac{\nu^2}{\mu} \cosh\mu(c - c_0) - g \sinh\mu(c - c_0)\right] \sin(\mu a - \nu t);$$

$$x' = \frac{A_0}{\sinh\mu(c_1 - c_2)} \cosh\mu(c - c_2) \cos(\mu a - \nu t),$$

$$(2) \qquad z' = \frac{A_0}{\sinh\mu(c_1 - c_2)} \sinh\mu(c - c_2) \sin(\mu a - \nu t),$$

$$p' = \frac{Q' A_0}{\sinh\mu(c_1 - c_2)} \left[\frac{\nu^2}{\mu} \cosh\mu(c - c_2) - g \sinh\mu(c - c_2)\right] \sin(\mu a - \nu t).$$

Es wären hier in (2) eigentlich a und c mit gestrichenen Buchstaben zu schreiben; wir wählen jedoch ein für allemal $a' \equiv a$ und $c' \equiv c$.

Man findet leicht, daß die Stromlinien in der unteren Schicht vom konkav-parabolischen Typus IB, S. 79, und in der oberen vom konvex-parabolischen Typus IIC sind.

Die Kontinuität des Druckes an der inneren Grenzfläche $c = c_1$ bedingt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$(3) \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{g}{\mu} \frac{Q - Q'}{Q \operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0) + Q' \operatorname{ctgh}\mu(c_2 - c_1)} = \frac{g}{\mu} \frac{S' - S}{S' \operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0) + S \operatorname{ctgh}\mu(c_2 - c_1)},$$

die sich bei unendlicher Mächtigkeit beider Schichten auf **91** (6'), bei verschwindender Dichte der oberen Schicht auf **91** (8') reduziert.

Ist die obere Schicht von unendlicher Mächtigkeit, die untere aber klein im Vergleich zur Wellenlänge, so reduziert sich die Formel auf:

$$(3\text{a}) \qquad \tilde{\omega}^2 = \frac{Q - Q'}{Q} g (c_1 - c_0) = \frac{S' - S}{S'} g (c_1 - c_0).$$

Sind beide Schichttiefen im Vergleich zur Wellenlänge klein, so reduziert sich die Formel (3) auf:

$$(3\text{b}) \qquad \tilde{\omega}^2 = g \frac{(Q - Q')(c_2 - c_1)(c_1 - c_0)}{Q(c_2 - c_1) + Q'(c_1 - c_0)} = g \frac{(S' - S)(c_2 - c_1)(c_1 - c_0)}{S'(c_2 - c_1) + S(c_1 - c_0)}.$$

Fortpflanzung der inneren Schwerewellen (m/sec).

$c_1 - c_0$ m	$\frac{Q-Q'}{Q} = \frac{S'-S}{S'} \left(= \frac{\theta'-\theta}{\theta'}\right)$									
	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,5	(LAGRANGE) 1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3
10	0	0	1	1	1	2	3	5	7	10
100	1	1	2	3	4	7	10	14	22	31
1000	3	4	7	10	14	22	31	45	70	99
10000	10	14	22	31	45	70	99	142	221	313

Bei verschwindender Dichte der oberen Schicht reduzieren sich (3a) und (3b) wieder auf die LAGRANGEsche Formel **91** (11), und bei sehr kleinem Dichtesprung an der Grenzfläche schreibt sich (3b) angenähert:

$$(3\,b')\qquad \bar{\omega}^2 = g\,\frac{(Q-Q')\,(c_2-c_1)\,(c_1-c_0)}{Q\,(c_2-c_0)} = g\,\frac{(S'-S)\,(c_2-c_1)\,(c_1-c_0)}{S'(c_2-c_0)}$$

Setzt man hier $c_2 = \infty$, so erhält man wieder die Formel (3a).

Da die Formeln (3b) und (3b′) zu viele unabhängige Variable enthalten, begnügen wir uns hier mit einem Tabulieren der Fortpflanzungsgeschwindigkeit (3a) als Funktion der Schichtmächtigkeit $c_1 - c_0$ der unteren Schicht und des Verhältnisses $(Q - Q')/Q$ oder $(S' - S)/S'$. Wenn wir später unten zu kompressiblen Medien übergehen, werden wir dieselbe Formel in **101** (24′b) wiederfinden. In diesem Fall können wir auch, wie in der Tabelle angegeben, das Verhältnis $(S' - S)/S'$ durch das entsprechende Verhältnis zwischen den Temperaturen $(\theta' - \theta)/\theta'$ ersetzen.

Ist die obere Grenzfläche $c = c_2$ eine freie Oberfläche, so gilt immer noch die Lösung (1) für die untere Schicht; für die obere muß man jedoch auf die allgemeine Lösung **91** (7) zurückgreifen. Unter Berücksichtigung der Grenzflächenbedingungen $z = z'$ für $c = c_1$ und $p' = 0$ für $c = c_2$ schreibt sich diese Lösung in der Form:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x' &= A_0\,\frac{\mu g \cosh\mu(c-c_2) + \nu^2 \sinh\mu(c-c_2)}{\mu g \sinh\mu(c_1-c_2) + \nu^2\cosh\mu(c_1-c_2)}\cos(\mu a - \nu t)\,,\\ &\quad A_0\,\frac{\mu g \sinh\mu(c-c_2) + \nu^2\cosh\mu(c-c_2)}{\mu g\sinh\mu(c_1-c_2) + \nu^2\cosh\mu(c_1-c_2)}\sin(\mu a - \nu t)\,,\\ p' &= Q' A_0\,\frac{1}{\mu}\,\frac{(\nu^4 - \mu^2 g^2)\sinh\mu(c-c_2)}{\mu g\sinh\mu(c_1-c_2) + \nu^2\cosh\mu(c_1-c_2)}\sin(\mu a - \nu t)\,. \end{aligned}$$

Für die Stromlinien in der oberen Schicht findet man die Gleichung:

$$(5)\qquad [\mu g \sinh\mu(c-c_2) + \nu^2\cosh\mu(c-c_2)]\sin(\mu a - \nu t) = K\,.$$

Hier tritt die Eigentümlichkeit auf, daß der Klammerausdruck links für ein im Endlichen gelegenes Niveau verschwindet. Solange dieses Niveau außerhalb der Schicht fällt, erhalten wir konkav-parabolische Stromlinien vom Typus IA. Wenn es aber innerhalb der Schicht fällt, so ergeben sich konkav-parabolische Stromlinien vom Typus IB oberhalb des Niveaus, dagegen konvex-parabolische Stromlinien vom Typus IIC unterhalb.

Aus der Gleichheit des Druckes beiderseits der inneren Grenzfläche folgt schließlich:

$$(6)\quad Q[\mu g - \nu^2\,\mathrm{ctgh}\,\mu(c_1-c_0)]\,[\mu g - \nu^2\,\mathrm{ctgh}\,\mu(c_2-c_1)] = Q'(\mu^2 g^2 - \nu^4)\,,$$

oder nach $\bar{\omega}^2$ aufgelöst:

$$(6')\quad \bar{\omega}^2 = \frac{g}{2\mu}\,\frac{1}{Q\alpha\alpha' + Q'}\left\{Q(\alpha+\alpha') \pm \sqrt{Q^2(\alpha-\alpha')^2 + 4Q'[Q(\alpha\alpha'-1)+Q']}\right\},$$

wo man zur Vereinfachung

$$\alpha = \operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0)\,, \qquad \alpha' = \operatorname{ctgh}\mu(c_2 - c_1)$$

gesetzt hat. Wir erhalten also zwei verschiedene, reelle Werte von $\tilde{\omega}^2$. Um die Bedeutung derselben besser übersehen zu können, nehmen wir zuerst an, daß der Dichtesprung an der inneren Grenzfläche sehr klein ist. Der Wurzelausdruck von (6′) kann dann entwickelt werden, und es ergeben sich in erster Näherung die beiden Lösungen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \tilde{\omega}^2 &= \frac{g}{\mu}\left[\operatorname{tgh}\mu(c_2 - c_0) - \frac{(Q - Q')\operatorname{sech}^2\mu(c_2 - c_0)}{Q\operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0) + Q'\operatorname{ctgh}\mu(c_2 - c_1)}\right], \\ \tilde{\omega}^2 &= \frac{g}{\mu}\,\frac{Q - Q'}{Q\operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0) + Q'\operatorname{ctgh}\mu(c_2 - c_1)}\,. \end{aligned}$$

Die erste Formel ist im wesentlichen dieselbe wie die Formel **91** (8′) für eine einzige Schicht von der Tiefe $c_2 - c_0$; nur *bewirkt der Dichtesprung eine kleine Verminderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.* Die entsprechende Welle nennen wir die *äußere Welle.* Wie aus den Integralen zu ersehen ist, nimmt die Vertikalamplitude in diesem Falle stetig nach oben zu; *die freie Oberfläche schwingt folglich mit derselben Phase wie die innere Grenzfläche, aber mit größerer Amplitude.*

Die zweite Formel (7) dagegen stimmt mit (3) überein, welche die innere Wellenbewegung zweier Schichten zwischen starren Grenzflächen entspricht. Entsprechend nennen wir diese Welle die *innere Welle.* Wie aus den Integralen hervorgeht, gibt es in diesem Falle *in der oberen Schicht immer eine Horizontalebene, wo die Vertikalbewegung Null ist,* und zwar liegt diese ziemlich nahe der Oberfläche. *Die innere Grenzfläche und die freie Oberfläche schwingen folglich mit entgegengesetzter Phase, wobei die Amplitude der inneren Grenzfläche die größere ist.*

Wenn eine oder beide Schichten von unendlicher Mächtigkeit sind, vereinfacht sich die Gleichung (6) ganz wesentlich, indem $\mu g - \nu^2$ als gemeinsamer Faktor auf beiden Seiten der Gleichung heraustritt. Die entsprechende äußere Welle hat also die STOKESsche Fortpflanzungsgeschwindigkeit; wenn z. B. die untere Schicht von unendlicher Mächtigkeit ist, ergibt sich aus (1) und (4) für diese Welle die Lösung:

$$(8)\quad x = A\,e^{\mu c}\cos(\mu a - \nu t)\,, \qquad z = A\,e^{\mu c}\sin(\mu a - \nu t)\,, \qquad p = 0\,,$$

also eine reine Schwerewelle. Da der Störungsdruck überall verschwindet, wird die innere Grenzfläche belanglos, und es kann in einer beliebigen Höhe eine freie Oberfläche eingeführt werden. Eine Verallgemeinerung dieser Lösung werden wir später in Abschnitt **96** kennenlernen.

Für die innere Welle ergibt sich in diesem Falle die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$(9)\qquad \tilde{\omega}^2 = \frac{g}{\mu}\,\frac{Q - Q'}{Q\operatorname{ctgh}\mu(c_2 - c_1) + Q'}\,,$$

die sich auf **91** (6′) reduziert, wenn die obere Schicht auch von unendlicher Mächtigkeit ist.

Schließlich betrachten wir noch den Fall, wo drei homogene inkompressible Schichten übereinandergelagert sind, wobei die untere und die obere als von unendlicher Mächtigkeit vorausgesetzt werden. Wir bezeichnen Größen, die sich bzw. auf die untere, mittlere und obere Schicht beziehen, durch die hoch angebrachten Indices I, II, III und wählen die Diskontinuitätsflächen in den Niveaus $c = -\frac{c_0}{2}$ und $c = \frac{c_0}{2}$.

Für die untere Schicht hat man eine Lösung der Form **91** (3), für die mittlere die allgemeine Lösung **91** (7) und für die obere die Lösung **91** (4). Die Anwendung der Grenzflächenbedingungen:

$$
(10) \qquad \left.\begin{aligned} z^I &= z^{II}, \\ p^I &= p^{II}, \end{aligned}\right\} \text{wenn } c = -\frac{c_0}{2} \qquad \left.\begin{aligned} z^{II} &= z^{III}, \\ p^{II} &= p^{III}, \end{aligned}\right\} \text{wenn } c = \frac{c_0}{2}
$$

ergibt nach einiger Rechnung die Frequenzengleichung:

$$
(11) \qquad \begin{aligned} &\nu^4 [(Q^I+Q^{II})(Q^{II}+Q^{III})\, e^{\mu c_0} + (Q^I-Q^{II})(Q^{II}-Q^{III})\, e^{-\mu c_0}] \\ &-2\nu^2 \mu g Q^{II}(Q^I-Q^{III})\, e^{\mu c_0} + \mu^2 g^2 (Q^I-Q^{II})(Q^{II}-Q^{III})(e^{\mu c_0}-e^{-\mu c_0}) = 0, \end{aligned}
$$

oder, nach ν^2 aufgelöst:

$$
(11') \qquad \begin{aligned} \nu^2 = \frac{\mu g}{(Q^I+Q^{II})(Q^{II}+Q^{III})\, e^{\mu c_0} + (Q^I-Q^{II})(Q^{II}-Q^{III})\, e^{-\mu c_0}} \Big\{ Q^{II}(Q^I-Q^{III})\, e^{\mu c_0} \\ \pm \sqrt{(Q^{II^2}-Q^I Q^{III})^2 e^{2\mu c_0} + 2(Q^{II^2}+Q^I Q^{III})(Q^I-Q^{II})(Q^{II}-Q^{III}) + (Q^I-Q^{II})^2 (Q^{II}-Q^{III})^2 e^{-2\mu c_0}} \Big\}. \end{aligned}
$$

Man sieht leicht, daß der Nenner immer positiv ist. Eine stabile Wellenbewegung liegt nur dann vor, wenn beide Wurzeln (11′) positiv sind. Dann ist auch ihre Summe und ihr Produkt größer als Null, und man erhält aus (11) als Stabilitätsbedingung:

$$
(12) \qquad Q^I - Q^{III} > 0, \qquad (Q^I - Q^{II})(Q^{II} - Q^{III}) > 0,
$$

oder auch:

$$
(12') \qquad Q^I > Q^{II} > Q^{III}.
$$

Ist aber diese *statische* Stabilität nicht vorhanden, so wird einer der Werte (11′) von ν^2 negativ, und die dazugehörigen Amplituden wachsen mit der Zeit exponentiell an.

Auf die allgemeine Diskussion der Wellenbewegung in drei Schichten[1] wollen wir nicht eingehen, sondern wir begnügen uns damit, einige Spezialfälle zu betrachten:

1. $c_0 = 0$. Die Frequenzengleichung (11) hat dann die Lösungen:

$$
(13) \qquad \frac{Q^I - Q^{III}}{Q^I + Q^{III}}, \qquad \nu^2 = 0,
$$

[1] Für mehrere Einzelheiten sei hingewiesen auf die Abhandlung von Dr. B. Haurwitz: „Zur Theorie der Wellenbewegungen in Luft und Wasser“, Veröff. Geoph. Inst. Leipzig 1931.

von denen die erste uns schon bekannt ist, **91** (6′). Dasselbe Resultat ergibt sich übrigens auch, wenn $Q^{II} = Q^{I}$ oder $Q^{II} = Q^{III}$ angenommen wird.

2. $Q^{III} = 0$. Es liegt dann der Fall zweier Schichten mit freier Oberfläche vor, wobei die obere Schicht von der Höhe c_0, die untere von unendlicher Mächtigkeit ist. Die Frequenzengleichung (11) reduziert sich auf die schon oben angegebenen Wurzeln der äußeren und der inneren Wellen:

$$(14) \qquad \nu^2 = \mu g, \qquad \nu^2 = \mu g \frac{Q^{I} - Q^{II}}{Q^{I} \operatorname{ctgh} \mu c_0 + Q^{II}}.$$

3. Schließlich nehmen wir c_0 als klein an. Ersetzt man dann in der Frequenzengleichung $e^{\pm \mu c_0}$ durch $1 \pm \mu c_0$, so ergeben sich die folgenden angenäherten Werte der Frequenzen:

$$(15) \quad \nu^2 = \mu g \frac{Q^{I} - Q^{III}}{Q^{I} + Q^{III}} \left[1 + \mu c_0 \left\{ \frac{2(Q^{I} + Q^{III})^2 - (Q^{I} - Q^{III})^2}{2 Q^{II} (Q^{I} - Q^{III})^2 (Q^{I} + Q^{III})} (Q^{II\,2} + Q^{I} Q^{III}) - \frac{4 Q^{I} Q^{III}}{(Q^{I} - Q^{III})^2} \right\} \right],$$

$$(16) \quad \nu^2 = \mu g \frac{\mu c_0}{(Q^{I} + Q^{III})(Q^{I} - Q^{III}) Q^{II}} \left\{ (Q^{I} + Q^{III})(Q^{II\,2} + Q^{I} Q^{III}) - 4 Q^{I} Q^{II} Q^{III} \right\}.$$

Für $c_0 \to 0$ geht der Ausdruck (15) in die erste Formel (13) über; zu Wellentälern (-bergen) der einen Diskontinuitätsfläche gehören Wellentäler (-berge) der anderen. Für $c_0 \to 0$ geht die der Gleichung (16) entsprechende Bewegung in den Ruhezustand über; in diesem Falle haben die beiden Diskontinuitätsflächen entgegengesetzte Phase, wie man durch einfaches Nachrechnen bestätigen kann.

93. Elastische Wellen. Zu einem anderen einfachen Wellentypus gelangen wir, wenn wir die Schwere vernachlässigen und die Flüssigkeit homogen annehmen, jetzt aber die Kompressibilität berücksichtigen, wodurch γ von Null verschieden, und zwar konstant wird. Obgleich keine Schwere vorhanden ist, nennen wir im Folgenden die c- oder z-Achse vertikal und die beiden anderen Achsen horizontal. Die Gleichungen des Grundzustandes **89** (2) geben dann einen überall konstanten Druck P, und die Störungsgleichungen **89** (5b) und (6) ergeben:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial a}(S p) = 0, \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial b}(S p) = 0, \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial c}(S p) = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma S p = 0. \end{aligned}$$

Da die Koordinaten x, y, z hier gleichwertig sind, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß eine eindimensionale

Störungsbewegung in der x-Richtung stattfindet. Nach (1) wird sie dann von b und c unabhängig, und diese Gleichungen reduzieren sich auf:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp) &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial a} + \gamma S p \quad &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination des Druckes p ergibt sich hieraus:

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2 x}{\partial a^2},$$

also die bekannte Gleichung der schwingenden Saite oder der ebenen Welle, deren allgemeines Integral durch

$$(4)\qquad x = F_1(a - \tilde{\omega}_L t) + F_2(a + \tilde{\omega}_L t)$$

gegeben ist, mit F_1 und F_2 als beliebigen Funktionen. Die Lösung stellt zwei Wellenzüge reiner Longitudinalwellen dar, von denen der eine sich in der positiven und der andere in der negativen a-Richtung fortpflanzt, und zwar mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$(5)\qquad \tilde{\omega}_L = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

die, nach der Definition von γ, die LAPLACE*sche Schallgeschwindigkeit* ist. Sie ist also, wie die LAGRANGEsche Fortpflanzungsgeschwindigkeit langer Wellen, *von der Wellenlänge unabhängig,* aber statt durch die Tiefe ist sie dagegen durch die innere Elastizität des Mediums gegeben.

Mit dem Ausdruck (4) für x ergibt sich aus (2) für den Störungsdruck:

$$(6)\qquad p = -\frac{1}{\gamma} Q[F_1'(a - \tilde{\omega}_L t) + F_2'(a + \tilde{\omega}_L t)].$$

Wenn man in (4) und (6) γ gegen Null konvergieren läßt, so ergibt sich durch Grenzübergang für $\gamma = 0$ die Lösung **90** (3) mit unendlicher Wellenlänge und Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Wir gehen jetzt zu einer zweidimensionalen Störungsbewegung über. Nach (1) spielt sich diese in einer Ebene ab, und da alle Ebenen gleichwertig sind, wählen wir die ac-Ebene als Störungsebene und erhalten somit aus (1):

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp) \quad &= 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp) \quad &= 0, \\ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma S p &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination findet man, daß die Variablen die Differentialgleichung der schwingenden Membran befriedigen, z. B. für die x-Koordinate geschrieben:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial c^2}\right). \tag{8}$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten in der ac-Ebene läßt sich hieraus z. B. das Problem der ebenen Ausbreitung des Schalles von einer punktförmigen Schallquelle aus lösen. Wir werden aber darauf nicht eingehen. Dagegen wollen wir eine einfach-harmonische Lösung der Form **90** (5) etwas näher betrachten. Durch Substitution jenes Ansatzes in die Gleichungen (7) ergeben sich für die Konstanten der Wellenlösung drei lineare homogene Gleichungen, die für

$$\lambda = \pm\sqrt{\mu^2 - \gamma\nu^2}, \qquad C = \pm\sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2}}\, A, \qquad D = \frac{\nu}{\mu} A \tag{9}$$

befriedigt werden. Dementsprechend erhalten wir zwei verschiedene Lösungen der einfach-harmonischen Form:

$$\left\{\begin{aligned} x &= A\, e^{\sqrt{\mu^2 - \gamma\nu^2}\, c} \cos(\mu a - \nu t), \\ z &= \sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2}}\, A\, e^{\sqrt{\mu^2 - \gamma\nu^2}\, c} \sin(\mu a - \nu t), \\ p &= QA \frac{\nu^2}{\mu}\, e^{\sqrt{\mu^2 - \gamma\nu^2}\, c} \sin(\mu a - \nu t); \end{aligned}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= -A\, e^{-\sqrt{\mu^2 - \gamma\nu^2}\, c} \cos(\mu a - \nu t), \\ z &= \sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2}}\, A\, e^{-\sqrt{\mu^2 - \gamma\nu^2}\, c} \sin(\mu a - \nu t), \\ p &= -QA \frac{\nu^2}{\mu}\, e^{-\sqrt{\mu^2 - \gamma\nu^2}\, c} \sin(\mu a - \nu t). \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Diese Wellenbewegung gestaltet sich wesentlich verschieden, je nachdem $\mu^2 - \gamma\nu^2 \gtreqless 0$ ist.

Für $\mu^2 - \gamma\nu^2 > 0$, d. h. $\tilde{\omega} < \tilde{\omega}_L$, also für Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner als die LAPLACEsche, ist die Bewegung angenähert dieselbe wie die erzwungenen Schwingungen in inkompressiblen Medien **90** (11), (12); nur sind der vertikale Amplitudenfaktor und der Exponent, der die Abnahme der Amplituden mit der Entfernung von der Fläche $c = 0$ angibt, mit dem Faktor $\sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2}}$ multipliziert. Die Bahn eines Teilchens ist also hier eine Ellipse mit vertikaler kleiner und horizontaler großer Achse. Die Achsen nehmen nach oben bzw. unten langsamer ab, als im Falle der Inkompressibilität. Diese Störungsbewegungen können also durch Fortbewegung eines Wellenbleches mit der Gleichung

$$z = \sqrt{1 - \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2}}\, A \sin(\mu a - \nu t)$$

realisiert werden. Wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Wellenbleches steigern, tritt die Wirkung der Kompressibilität stärker hervor: die Exzentrizität der elliptischen Bahnen wird immer größer und die Achsen nehmen langsamer nach oben oder unten ab, bis wir die Schallgeschwindigkeit erreicht haben, $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_L$. Dann tritt die reine Longitudinalbewegung mit überall konstanter Amplitude und entgegengesetzter Phase beiderseits der jetzt horizontalen Grenzfläche in Erscheinung. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge unabhängig ist, kann man von dieser einfachen Sinuswelle durch Summation über alle Wellenlängen wieder zu der allgemeinen Wellenlösung (4) beliebigen Profiles gelangen.

Wenn schließlich das Wellenblech mit Überschallgeschwindigkeit fortbewegt wird, $\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_L$, werden die Integrale (10) und (11) komplex. Da die Koeffizienten des ursprünglichen Differentialgleichungssystems (7) reell sind, muß aber dann sowohl der reelle wie auch der imaginäre Teil der Integrale für sich eine Lösung darstellen. Diese sind nun die folgenden:

$$(12)\quad \begin{cases} x = A\cos\left(\mu c\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\right)\cos(\mu a - \nu t), \\ z = -\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\, A\sin\left(\mu c\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\right)\sin(\mu a - \nu t), \\ p = QA\dfrac{\nu^2}{\mu}\cos\left(\mu c\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\right)\sin(\mu a - \nu t); \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} x = A\sin\left(\mu c\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\right)\cos(\mu a - \nu t), \\ z = \sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\, A\cos\left(\mu c\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\right)\sin(\mu a - \nu t), \\ p = QA\dfrac{\nu^2}{\mu}\sin\left(\mu c\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\right)\sin(\mu a - \nu t). \end{cases}$$

Wir brauchen nur die erste dieser Lösungen zu betrachten; denn ersetzt man c durch $c + \dfrac{\pi}{2\mu\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}}$, so geht die zweite Lösung in die erste über. Diese stellt nun eine typische *zellulare Wellenbewegung* dar, da die Vertikalbewegung an den äquidistanten Horizontalebenen $c = \dfrac{n\pi}{\mu\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}}$ (n ganzzahlig) verschwindet. Diese können folglich als starre Wände angenommen werden.

Die Bahnen der Teilchen sind Ellipsen:

$$(14)\quad \frac{x^2}{A^2\cos^2\left(\mu c\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\right)} + \frac{z^2}{A^2\left(\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1\right)\sin^2\left(\mu c\sqrt{\dfrac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2} - 1}\right)} = 1,$$

die an den solidifiierbaren Horizontalebenen in horizontale und in der Zellenmitte in vertikale Linienelemente ausarten. In der Nähe der horizontalen Zellenwände ist die große Achse der Ellipse entsprechend horizontal und in der Nähe der Zellenmitte ist sie vertikal; der Übergang mit kreisförmiger Bahn findet in einer Höhe statt, die sich aus der Gleichung

$$\operatorname{ctg}\left(\mu c\sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2}-1}\right) = \pm\sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2}-1}$$

ergibt.

Die Gleichung der Stromlinien ist:

(15) $$\sin\left(\mu c\sqrt{\frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}_L^2}-\ [illegible]}\right)\sin(\mu a - \nu t) = K;$$

es liegen also hyperbolische Stromlinien vom Typus IV A (S. 79) vor.

Diese zellulare Wellenbewegung läßt sich übrigens aus zwei gleichen longitudinalen Sinuswellen zusammensetzen, deren Fortpflanzungsrichtungen in der ac-Ebene liegen und die Winkel φ und $-\varphi$ mit der a-Achse bilden. Wenn die Koordinaten in diesen beiden Richtungen mit ξ' und ξ'' bezeichnet werden, so haben wir:

(16) $$\begin{aligned} \xi' &= A'\cos\mu(a + c\operatorname{tg}\varphi - \tilde{\omega}t), \\ \xi'' &= A'\cos\mu(a - c\operatorname{tg}\varphi - \tilde{\omega}t). \end{aligned}$$

Die Wellenzahl ist hier gleich $\mu\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \mu/\cos\varphi$ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleich $\tilde{\omega}\cos\varphi$. Die Komponenten der Summe dieser Wellenbewegungen längs der a- und der c-Achse sind nun:

(17) $$\begin{cases} x = (\xi' + \xi'')\cos\varphi = 2A'\cos\varphi\cos(\mu c\operatorname{tg}\varphi)\cos\mu(a - \tilde{\omega}t), \\ z = (\xi' - \xi'')\sin\varphi = -2A'\sin\varphi\sin(\mu c\operatorname{tg}\varphi)\sin\mu(a - \tilde{\omega}t), \end{cases}$$

die für $2A'\cos\varphi = A$ und $\cos\varphi = \tilde{\omega}_L/\tilde{\omega}$ mit der Lösung (12) überein stimmen. Dann haben aber die Wellen (16) die LAPLACEsche Schallgeschwindigkeit, und deren Summe bewegt sich folglich mit Überschallgeschwindigkeit längs der a-Achse.

94. Allgemeine Wellenlösung. In den vorigen Abschnitten haben wir einige einfache Resultate, teils über reine Schwerewellen, teils über die rein elastischen Longitudinalwellen, abgeleitet. Diese reinen Wellen existieren aber in der Wirklichkeit nie. Denn wir können nie das Schwerefeld aufheben, und es existiert keine absolute Inkompressibilität. Alle wirklichen Wellen sind deshalb gemischte Schwere- und Elastizitätswellen, wenn auch in den Grenzfällen einerseits die elastische und andererseits die gravitationelle Fortpflanzungsenergie völlig zu verschwinden scheint. Bei den großen atmosphärischen Störungen trifft

dies jedoch nicht mehr zu. Deshalb müssen wir auf die realen Wellen eingehen, die gemischter Art sind.

In dem obigen Referat über die bekannten einfachen Wellenformen sind wir in einem Punkte von der gewöhnlichen Darstellungsform abgewichen. Wir haben keinen Gebrauch von beliebten mathematischen Hilfsgrößen, wie Potentialen oder Stromfunktionen, gemacht. Um die allgemeineren Wellen erfolgreich diskutieren zu können, erweist sich der Verzicht auf diese Hilfsmittel gerade als eine notwendige Bedingung.

Wir haben das Gleichungssystem **89** (5b) und (6) zu integrieren. Da die Koeffizienten Γ und γ nur Funktionen der Vertikalen c sind, müssen die anderen unabhängigen Variablen a, b und t exponentiell in die Lösungen eingehen. Wir wollen jetzt eine in der a-Richtung periodische Wellenlösung betrachten. Sollte dann auch b trigonometrisch in die Lösung eingehen, so wissen wir nach **93** (16) und (17), daß sich diese dreidimensionale Lösung aus zwei zweidimensionalen zusammensetzen läßt, die sich in der ab-Ebene in zwei zur a-Achse symmetrisch gelegenen Richtungen fortpflanzen. Wenn b andererseits rein exponentiell eingeht, so sind die Stromflächen in der bc-Ebene gewöhnlich gekrümmt. Zur Befriedigung der Grenzflächenbedingungen ist es dann notwendig, daß die Grenzflächen der Flüssigkeit dieselbe Krümmung besitzen. Da wir aber vorläufig nur horizontale Grenzflächen betrachten wollen, genügt es also, *das von b unabhängige Gleichungssystem zu untersuchen.* Die zweite Gleichung **89** (5b) ergibt dann $\ddot{y} = 0$, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y = 0$ wählen. Die anderen Gleichungen werden dann:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + g\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial (Sp)}{\partial a} &&= 0\,, \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial (Sp)}{\partial c} - g(\Gamma - \gamma)\, Sp &&= 0\,, \\ &\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma Sp &&= 0\,. \end{aligned}$$

Wir versuchen jetzt, dieses System durch eine Wellenlösung der Form

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= A(c)\cos(\mu a - \nu t)\,, \\ z &= C(c)\sin(\mu a - \nu t)\,, \\ Sp &= D(c)\sin(\mu a - \nu t) \end{aligned} \right.$$

zu befriedigen, wo die Amplituden nicht mehr Exponentialfunktionen, sondern beliebige Funktionen von c sind. Die Bedeutung dieser Lösung geht schon aus **22** (5) und (10) hervor. In das System (1) eingesetzt, fällt der trigonometrische Faktor heraus, und wir erhalten ein System

von drei gewöhnlichen homogenen Differentialgleichungen zur Bestimmung der Amplituden A, C, D als Funktionen von c:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
-\nu^2 A + g\mu C + \mu D &= 0\,,\\
-\nu^2 C + gC' + D' - g(\Gamma - \gamma) D &= 0\,,\\
-\mu A + C' + \gamma D &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Durch Elimination zweier Amplituden erhalten wir die Differentialgleichung der dritten, nämlich bzw.:

$$
(4\text{a}) \quad A'' + \left[-g\Gamma + \frac{g^2(\Gamma'-\gamma')}{\nu^2 - g^2(\Gamma-\gamma)}\right] A' + \left[-\mu^2 + \gamma\nu^2 + \frac{\mu^2}{\nu^2} g^2(\Gamma-\gamma) - \frac{g\nu^2(\Gamma'-\gamma')}{\nu^2 - g^2(\Gamma-\gamma)}\right] A = 0
$$

$$
(4\text{b}) \quad C'' + \left[-g\Gamma + \frac{\gamma'\nu^2}{\mu^2 - \gamma\nu^2}\right] C' + \left[-\mu^2 + \gamma\nu^2 + \frac{\mu^2}{\nu^2} g^2(\Gamma-\gamma) - \frac{g\mu^2\gamma'}{\mu^2 - \gamma\nu^2}\right] C = 0\,.
$$

$$
(4\text{c}) \quad D'' - g\Gamma D' + \left[-\mu^2 + \gamma\nu^2 + \frac{\mu^2}{\nu^2} g^2(\Gamma-\gamma) - g\Gamma'\right] D = 0\,.
$$

Je nach den Umständen ist es vorteilhaft, die eine oder die andere dieser Gleichungen zu verwenden. Wenn eine der Größen A, C oder D hieraus gefunden ist, so ergeben sich die beiden anderen Amplituden aus den folgenden Gleichungen:

$$
(5\text{a}) \qquad C = \frac{\nu^2}{\mu} \frac{A' - g(\Gamma-\gamma) A}{\nu^2 - g^2(\Gamma-\gamma)} \qquad D = \frac{\nu^2}{\mu} \frac{-gA' + \nu^2 A}{\nu^2 - g^2(\Gamma-\gamma)}\,,
$$

$$
(5\text{b}) \qquad A = \mu \frac{C' - g\gamma C}{\mu^2 - \gamma\nu^2} \qquad D = \frac{\nu^2 C' - g\mu^2 C}{\mu^2 - \gamma\nu^2}\,,
$$

$$
(5\text{c}) \qquad A = \mu \frac{gD' + (\nu^2 - g^2\Gamma) D}{\nu^4 - g^2\mu^2}\,, \qquad C = \frac{\nu^2 D' + g(\mu^2 - \Gamma\nu^2) D}{\nu^4 - g^2\mu^2}\,.
$$

Es wird nicht möglich sein, bei dieser Gelegenheit das Gleichungssystem (4) und (5) in voller Allgemeinheit zu diskutieren. Wir müssen uns darauf beschränken, die einfachsten Spezialfälle herauszugreifen, die sich mit recht einfachen mathematischen Hilfsmitteln bewältigen lassen. Diese sind die folgenden:

(I) *Die Ausartungen des Gleichungssystems* (5), *wenn eine der Ampliduten verschwindet.* Dann wird der Zähler in einem der Ausdrücke (5) gleich Null, und eine nicht identisch verschwindende Lösung ergibt sich nur dann, wenn der entsprechende Nenner auch gleich Null ist. Es sind deshalb die folgenden Fälle zu betrachten:

a) $A = 0$, $\mu = 0$: Dann verschwindet nicht nur die x-Komponente der Störung, sondern auch die a-Koordinate fällt heraus. Wir haben folglich *vertikale Schwingungen* oder *vertikal sich fortpflanzende Wellen.*

b) $A = 0$, $\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma) = 0$: Dies gibt den Fall der *Transversalwellen* mit der ganz bestimmten *Transversalfrequenz*: $\nu = \nu_T = \pm g\sqrt{\Gamma - \gamma}\,.$

c) $C = 0$, $\mu^2 - \gamma\nu^2 = 0$: Es liegen also *Longitudinalwellen* mit der LAPLACE*schen Fortpflanzungsgeschwindigkeit*: $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_L = \pm\sqrt{\frac{1}{\gamma}}$ vor.

d) $D = 0$, $\nu^4 - g^2\mu^2 = 0$: Es liegen also *Schwerewellen* mit der STOKES*schen Fortpflanzungsgeschwindigkeit*: $\tilde{\omega} = \pm\sqrt{\frac{g}{\mu}}$ vor.

(II) *Die Parameter Γ und γ sind Konstanten.* Die Gleichungen (4) erhalten dann konstante Koeffizienten und reduzieren sich außerdem auf eine einzige Gleichung, die wir nur für die Horizontalamplitude aufzuschreiben brauchen:

$$A'' - g\Gamma A' + \left[-\mu^2 + \gamma\nu^2 + g^2(\Gamma - \gamma)\frac{\mu^2}{\nu^2}\right]A = 0. \tag{6}$$

Die physikalische Bedeutung der Annahme eines konstanten Γ und γ geht aus **28** hervor.

(III) *Die reziproken Werte der Parameter Γ und γ sind lineare Funktionen von c.* Das entspricht nach **28** einer Atmosphäre mit linearem Temperaturfelde.

Diese drei Spezialfälle sollen in den folgenden Paragraphen zur Darstellung kommen.

95. Vertikalschwingungen und Transversalwellen eines isothermen Mediums. Wir betrachten zuerst die Fälle der Ausartung **94** (I) a und b, wo die Horizontalamplitude gleich Null ist, d. h. wir betrachten entweder vertikale Schwingungen mit $\mu = 0$ oder Transversalwellen mit der Transversalfrequenz $\nu = \pm g\sqrt{\Gamma - \gamma}$. Um eine möglichst große Vereinfachung zu erzielen, setzen wir sofort Konstanz der zwei Parameter des Mediums Γ und γ voraus, d. h. das Medium soll isotherm sein. Die komplizierteren Fälle mit variablen Parametern werden erst später in **103** zur Darstellung kommen.

A. Vertikalschwingungen. Aus **94** (4b) und (5b) ergibt sich für $A = 0$, $\mu = 0$:

$$\begin{cases} C'' - g\Gamma C' + \gamma\nu^2 C = 0, \\ D = -\frac{1}{\gamma}C'. \end{cases} \tag{1}$$

Die Lösung ist durch die Exponentialfunktion gegeben und lautet:

$$C_0 e^{\lambda c}, \qquad D = -\frac{\lambda}{\gamma}C_0 e^{\lambda c}, \tag{2}$$

wo der Exponent λ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - g\Gamma\lambda + \gamma\nu^2 = 0 \tag{3}$$

ist, d. h.:

(4) $$\lambda = \tfrac{1}{2} g\Gamma \pm \eta ,$$

wo:

(5) $$\eta^2 = \tfrac{1}{4} g^2 \Gamma^2 - \gamma \nu^2 .$$

Der erste Exponentialfaktor $e^{\frac{1}{2} g\Gamma c}$ hängt nur von dem Barotropiekoeffizienten ab und gibt eine e-fache Zunahme der Amplituden für jede Höhenstufe vom Betrage $2H_H$, wo $H_H = 1/(g\Gamma)$ die Höhe der homogenen Atmosphäre ist.

Der zweite Exponentialfaktor $e^{\pm \eta c}$ hängt dagegen auch von dem Piezotropiekoeffizienten und der Frequenz ab und gibt eine nichtzellulare oder eine zellulare Wellenbewegung, je nachdem ob $\eta^2 \gtrless 0$ ist.

Den beiden Wurzeln (4) entsprechend, gibt es zwei verschiedene Lösungen von (1). Für $\eta^2 > 0$ sind diese:

(6) $$z = C_0 e^{(\frac{1}{2} g\Gamma + \eta) c} \sin \nu t , \qquad Sp = -\frac{C_0}{\gamma} (\tfrac{1}{2} g\Gamma + \eta)\, e^{(\frac{1}{2} g\Gamma + \eta) c} \sin \nu t ,$$

(6′) $$z' = C_0 e^{(\frac{1}{2} g\Gamma - \eta) c} \sin \nu t , \qquad Sp' = -\frac{C_0}{\gamma} (\tfrac{1}{2} g\Gamma - \eta)\, e^{(\frac{1}{2} g\Gamma - \eta) c} \sin \nu t .$$

Versetzen wir die als starr gedachte Horizontalebene $c = 0$ in stehende Schwingungen: $z = C_0 \sin \nu t$, so wird die Flüssigkeit unterhalb dieser Ebene gezwungen, die Schwingung (6) auszuführen, und die Flüssigkeit oberhalb die Schwingung (6′). Der zweite Exponentialfaktor $e^{\pm \eta c}$ bewirkt ein Abklingen der Schwingung von der Ebene $c = 0$ ab; da aber $\frac{1}{2} g\Gamma > \eta$ ist, wachsen die Amplituden in der oberen Schicht trotzdem mit c über alle Grenzen. An der starren Ebene $c = 0$ ist $z = z'$, die kinematische Grenzflächenbedingung ist also erfüllt. Der Druck hat aber gewöhnlich einen Sprung an dieser Fläche. Nur für den kritischen Wert $\eta = 0$ ist auch der Druck stetig. Dann braucht die Ebene $c = 0$ nicht mehr starr zu sein; die Flüssigkeit als Ganzes führt die nichtzellulare Schwingung

(7) $$z = C_0 e^{\frac{1}{2} g\Gamma c} \sin \nu t , \qquad Sp = -\frac{C_0}{\gamma} \frac{1}{2} g\Gamma e^{\frac{1}{2} g\Gamma c} \sin \nu t$$

aus, mit nach oben unbegrenzt wachsender Amplitude. Da $Q = Q_0 e^{-g\Gamma c}$, ist aber die kinetische Energie $\frac{1}{2} Q \dot{z}^2$ überall dieselbe. Die *Frequenz* dieser *Eigenschwingung* der Flüssigkeit ist nach (5) durch

(8) $$\nu = \frac{1}{2} g\Gamma \sqrt{\frac{1}{\gamma}} = \frac{\tilde{\omega}_L}{2H_H}$$

gegeben, und die entsprechende *Eigenperiode* wird:

(9) $$T = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{4\pi H_H}{\tilde{\omega}_L} ,$$

d. h. *in der isothermen Atmosphäre mit adiabatischer Kompressibilität gibt es eine Eigenperiode gleich der Zeit, die eine Schallwelle nötig hat,*

um die Strecke $4\pi H_H$ *zurückzulegen,* wo H_H die Höhe der homogenen Atmosphäre ist.

Da $H_H = 8000$ m und $\tilde{\omega}_L = 332$ m/sec ist, beträgt die Eigenperiode 5,0 Min.

Für $\eta^2 < 0$ setzen wir $\eta = i\zeta$, wo ζ reell ist. Die Integrale (6) und (6') werden dann konjugiert komplex, und man hat sowohl den reellen wie auch den imaginären Teil als unabhängige Lösungen von (1). Wir schreiben nur den imaginären Teil auf:

$$(10)\quad z = C_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \sin\zeta c \sin\nu t\,, \qquad Sp = -\frac{C_0}{\gamma} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left(\tfrac{1}{2} g \Gamma \sin\zeta c + \zeta \cos\zeta c\right) \sin\nu t\,.$$

z verschwindet also an den äquidistanten Horizontalebenen $c = n\pi/\zeta$; wir haben eine stehende vertikale Schwingung zwischen diesen solidifiierbaren Ebenen. Der Druck verschwindet in einer Höhe c_D, die durch

$$(11)\qquad \operatorname{ctg} 2\pi \frac{c_D}{H} = -\frac{H}{4\pi H_B}$$

gegeben ist, wo $H = 2\pi/\zeta$ die doppelte Zellenhöhe darstellt. Diese Höhe c_D liegt immer in der oberen Hälfte der Zelle, und zwar um so tiefer, je kleiner die Zellenhöhe im Vergleich zur Höhe der homogenen Atmosphäre ist. Da die Flüssigkeit oberhalb der Ebene (11) entfernt werden kann, erhalten wir hierdurch auch die Vertikalschwingungen einer Flüssigkeitsschicht mit freier Oberfläche.

Die stehende Schwingung (10) kann auch in zwei sich vertikal nach oben und unten fortpflanzende Wellen zerlegt werden:

$$(12)\qquad \begin{aligned} z &= C_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \cos(\zeta c - \nu t)\,, \\ Sp &= -\frac{C_0}{\gamma} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left[\tfrac{1}{2} g \Gamma \cos(\zeta c - \nu t) - \zeta \sin(\zeta c - \nu t)\right], \end{aligned}$$

deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch

$$(13)\qquad \tilde{\omega} = \frac{\nu}{\zeta} = \pm\tilde{\omega}_L \sqrt{1 + \left(\frac{H}{4\pi H_B}\right)^2} = \pm\frac{\tilde{\omega}_L}{\sin 2\pi \frac{c_D}{H}}$$

gegeben ist. Es liegt also Überschallgeschwindigkeit vor; wenn aber die Wellenlänge H im Vergleich zur Höhe der homogenen Atmosphäre klein ist, wird die Schallgeschwindigkeit nur wenig überschritten.

Die kinetische Energie pro Wellenlänge, die $\frac{1}{2} Q \dot{z}^2$ proportional ist, bleibt beim Fortschreiten der Wellen konstant, d. h. die Dichteänderung pro Wellenlänge ist zu klein, um eine merkbare Reflexion bewirken zu können.

B. Transversalwellen. In den Gleichungen **94** (4b) und (5b) sind in diesem Falle Γ und γ konstant, $A = 0$ und die Transversalfrequenz $\nu = g\sqrt{\Gamma - \gamma}$ einzuführen. Es ergibt sich dann:

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} C'' - g\Gamma C' + g^2\gamma(\Gamma - \gamma)\, C &= 0\,, \\ C' - g\gamma C &= 0\,, \\ gC + D &= 0\,. \end{aligned} \right.$$

Die einzige Lösung dieses Systems ist:

$$(15) \qquad C = C_0 e^{g\gamma c}\,, \qquad D = -g\, C_0 e^{g\gamma c}$$

Die Änderung der Amplituden mit der Höhe hängt nur von dem Piezotropiekoeffizienten ab; für den Spezialfall der Inkompressibilität ergeben sich konstante Amplituden.

Durch Übergang zu den entsprechenden Integralen ergibt sich für die Wellenlösung:

$$(16) \qquad z = C_0 e^{g\gamma c} \sin(\mu a - \nu t)\,, \qquad Sp = -g\, C_0 e^{g\gamma c} \sin(\mu a - \nu t)$$

und für die stehende Schwingung:

$$(16') \qquad z = C_0 e^{g\gamma c} \cos\mu a \sin\nu t\,, \qquad Sp = -g C_0 e^{g\gamma c} \cos\mu a \sin\nu t\,.$$

Wenn die Ebene $c = 0$ in stehende Schwingungen: $z = C_0 \cos\mu a \sin\nu t$ versetzt wird, so führt die Flüssigkeit zwangsweise die Schwingung (16′) mit nach oben unbegrenzt wachsenden Amplituden aus. Die Frequenz dieser Schwingung ist dabei von μ unabhängig und nur durch die Stabilität des Mediums bestimmt:

$$(17) \qquad \nu = \nu_T = g\sqrt{\Gamma}$$

Die entsprechende *Transversalperiode* wird:

$$(18) \qquad T = T_T = \frac{2\pi}{\nu_T} = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\frac{1}{\Gamma - \gamma}}\,.$$

Im Falle der Inkompressibilität, $\gamma = 0$, findet man, wenn man wieder $H_H = 1/(g\Gamma)$ einführt:

$$(18a) \qquad T_T = 2\pi \sqrt{\frac{H_H}{g}}\,,$$

d. h. *in einer inkompressiblen Atmosphäre, welche die Massenverteilung der isothermen hätte, wäre die Transversalperiode gleich derjenigen eines Pendels der Länge H_H*, wo H_H die Höhe der homogenen Atmosphäre ist[1].

Bei adiabatischer Kompressibilität hat man $\gamma = \frac{1}{\varkappa}\Gamma$, also $\nu^2 = g^2 \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \Gamma$, wodurch sich ergibt, wenn man H_A einführt:

$$(18b) \qquad = 2\pi \sqrt{\frac{H_A}{g}}\,,$$

[1] Vgl. die Abhandlung von Lord RAYLEIGH: „Investigation of the Character of the Equilibrium of an Incompressible Heavy Fluid of Variable Density", Proc. Lond. Math. Soc. 1883.

d. h. *in der isothermen Atmosphäre mit adiabatischer Kompressibilität ist die Transversalperiode gleich derjenigen eines Pendels der Länge H_A*, wo H_A die Höhe der adiabatischen Atmosphäre ist.

Da $H_H = 8000$ m ist, würde ein inkompressibles Medium von der Massenverteilung der isothermen Atmosphäre eine *Transversalperiode von 3 Minuten* haben. Bedeutend größere Γ-Werte mit entsprechend kürzeren Transversalperioden würde man bei heterogenen Salzlösungen erhalten können. Für die isotherme Atmosphäre mit adiabatischer Kompressibilität hat man $H_A = 27850$ m und eine *Transversalperiode von 5,6 Min.*

Die Amplituden wachsen unbegrenzt nach oben, und es ist keine verfügbare Konstante vorhanden, um die Einführung einer starren oder freien Oberfläche zu ermöglichen. Nun verschwindet aber der Zähler von **94** (5a) nicht nur für $A = 0$, sondern auch für $A' = g(\Gamma - \gamma)A$. Dies gibt die folgende Lösung:

$$
\begin{aligned}
A &= A_0 e^{g(\Gamma-\gamma)c}, \\
C &= A_0 \frac{\mu^2 - g^2\gamma(\Gamma-\gamma)}{\mu g(\Gamma - 2\gamma)} e^{g(\Gamma-\gamma)c}, \\
D &= A_0 \frac{-\mu^2 + g^2(\Gamma-\gamma)^2}{\mu(\Gamma - 2\gamma)} e^{g(\Gamma-\gamma)c},
\end{aligned} \tag{19}
$$

wo C und D durch Integration der bei gegebenem A inhomogenen Gleichungen erster Ordnung **94** (5b) und (5c) gefunden sind. Es liegt auch hier Transversalfrequenz vor, und die Amplituden wachsen nach oben wieder unbegrenzt, aber nach einem anderen Gesetz als früher, da der Exponent, als dem Quadrate der Transversalfrequenz proportional, nur von der Stabilität des Mediums abhängt.

Durch eine lineare Kombination der beiden Lösungen (15) und (19) könnte man Integrale erhalten, die nach Belieben mit einer starren oder einer freien Oberfläche vereinbar sind. Die Amplituden bleiben dann unterhalb dieser Fläche endlich; die Welle ist aber jetzt keine reine Transversalwelle mehr.

96. Verallgemeinerte Schwere- und Schallwellen in einem heterogenen kompressiblen Medium. Wir betrachten jetzt die weiteren Fälle **94** (I) d und c der Ausartung des Gleichungssystems **94** (4) und (5).

A. Verallgemeinerte Schwerewellen. Bei verschwindender Druckamplitude, $D = 0$, fallen nach **94** (3) Γ und γ aus der Lösung gänzlich heraus. Die Wellenenergie muß deshalb rein gravitationeller Art sein, und die Lösung muß dementsprechend verallgemeinerte Schwerewellen darstellen, wie auch die inneren Parameter des Mediums beschaffen sind. Wie wir schon in **94** gesehen haben, pflanzen sich diese

Wellen mit der STOKESschen Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Ober flächenwellen auf tiefem Wasser fort:

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{g}{\mu}} \tag{1}$$

Das System **94** (3) lautet für $D = 0$ und $\nu^2 = \mu g$:

$$\begin{aligned} -A + C &= 0, \\ C' - \mu C &= 0, \\ -\mu A + C' &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Die zweite Gleichung gibt: $C = C_0 e^{\mu c}$, woraus folgt: $A = C_0 e^{\mu c}$. Das vollständige Integral wird somit:

$$x = C_0 e^{\mu c} \cos(\mu a - \nu t), \qquad z = C_0 e^{\mu c} \sin(\mu a - \nu t). \tag{3}$$

Da der Störungsdruck überall gleich Null ist, kann man in beliebiger Höhe eine freie Oberfläche einführen, und die Lösung stellt somit eine Welle in einer unendlichen Flüssigkeitsschicht mit freier Oberfläche dar. Es ist sehr bemerkenswert, daß man identisch dieselbe Lösung und dieselben Bahnen der Teilchen findet, wie im Falle einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit von unendlicher Tiefe mit freier Oberfläche, **91**.

Die STOKESsche Fortpflanzungsgeschwindigkeit tritt ganz allgemein dann auf, wenn der Zähler in den Ausdrücken **94** (5c) verschwindet, d. h. wenn $D' + (\mu - g\Gamma) D = 0$ ist. Außer für $D = 0$ trifft dies auch für $D = S D_0 e^{-\mu c}$ zu. Mit diesem Werte von D ergeben sich durch Integration der Gleichungen **94** (5a) und (5b) die entsprechenden Ausdrücke von A und C. Die vollständige Lösung ist:

$$\begin{aligned} A &= D_0 e^{\mu c} \int \left(-\frac{\mu}{g} + \Gamma - \gamma \right) S e^{-2\mu c} dc, \\ C &= \mu D_0 e^{\mu c} \int \left(\frac{\mu}{g} - \gamma \right) S e^{-2\mu c} dc, \\ D &= S D_0 e^{-\mu c}. \end{aligned} \tag{4}$$

Sie unterscheidet sich von der obigen Lösung durch *die elliptische Bahn der Teilchen* und dadurch, *daß der Störungsdruck nicht mehr gleich Null ist.* Durch lineare Kombination der beiden Lösungen erhält man den allgemeinsten Wellentypus, der sich mit der STOKESschen Geschwindigkeit fortpflanzt. Wir wollen uns aber nicht auf eine Diskussion dieser Welle einlassen, sondern begnügen uns mit einem Hinweis auf **98**, wo der Spezialfall eines isothermen Mediums näher untersucht wird.

B. Verallgemeinerte Schallwellen. Bei verschwindender Vertikalamplitude, $C = 0$, bewegen sich die Teilchen horizontal, so daß die Wellenenergie rein elastisch ist. Die Lösung muß also verallgemeinerte

Schallwellen ergeben, da sie sich, wie schon oben in **94** gezeigt, mit der LAPLACEschen Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\bar{\omega}_L = \tag{5}$$

fortbewegen. Hieraus folgt schon, daß γ eine Konstante sein muß.

Das System **94** (3) lautet in diesem Falle:

$$\begin{aligned} D' - g(\Gamma - \gamma)\, D &= 0\,, \\ -\mu A + \gamma D &= 0\,, \end{aligned} \tag{6}$$

mit der Lösung:

$$D = S K_0\, e^{-g\gamma c}\,, \qquad A = \frac{\gamma}{\mu}\, S K_0\, e^{-g\gamma c}\,. \tag{7}$$

Die entsprechenden Integrale sind folglich:

$$x = \frac{\gamma}{\mu} S K_0 e^{-g\gamma c} \cos(\mu a - \nu t)\,, \qquad p = K_0 e^{-g\gamma c} \sin(\mu a - \nu t)\,. \tag{7'}$$

Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge unabhängig ist, kann man in der üblichen Weise von dieser Sinuswelle zu einer Welle von beliebigem Profil übergehen. Diese wird sich insofern von den gewöhnlichen Schallwellen unterscheiden, *als die Amplituden A und D nicht mehr konstant, sondern Funktionen der Höhe sind,* und zwar wachsen sie nach oben unbegrenzt, da der Faktor $S e^{-g\gamma c}$ für den Fall der Stabilität nach oben zunimmt. Wenn man unendliche Amplituden vermeiden will, kann man die Flüssigkeit oberhalb einer starren Ebene $c = c_1$ entfernen, und soll außerdem noch p überall endlich sein, so muß man die Flüssigkeit unterhalb einer anderen starren Ebene $c = c_0$ ebenfalls entfernen.

Wie oben bei den verallgemeinerten Schwerewellen findet man auch hier einen anderen, nicht-longitudinalen Wellentypus, der sich mit der LAPLACEschen Schallgeschwindigkeit fortpflanzt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{C_0}{\mu} e^{g(\Gamma - \gamma)} \int [\mu^2 - g^2 \gamma (\Gamma - \gamma)]\, e^{-g(\Gamma - 2\gamma) c}\, dc\,, \\ C &= C_0 e^{g\gamma c}\,, \\ D &= C_0 (\mu^2 - g^2 \gamma^2) \frac{1}{\gamma} e^{g(\Gamma - \gamma) c} \int e^{-g(\Gamma - 2\gamma) c}\, dc\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Durch lineare Kombination der beiden Lösungen (7) und (8) ergibt sich schließlich die allgemeinste Welle, die sich mit der LAPLACEschen Schallgeschwindigkeit fortpflanzt und die in **98** für den Spezialfall der Isothermie näher untersucht wird.

97. Die Wellenlösung für ein isothermes Medium. Wenn wir jetzt zu der allgemeinen Wellenlösung für den Fall **94** (II) der Störung eines isothermen Gleichgewichtes übergehen, so erfüllen die Wellen-

amplituden A, C, D dieselbe Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, die nach **94** (6) die folgende Form hat:

$$(1)\qquad A'' - g\Gamma A' + \left[-\mu^2 + \gamma\nu^2 + g^2(\Gamma - \gamma\right. \qquad \cdot 0.$$

Die Lösung ist also durch die Exponentialfunktion gegeben:

$$(2)\qquad A = A_0 e^{\lambda c},$$

wo λ eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(3)\qquad \lambda^2 - g\Gamma\lambda - \mu^2 + \gamma\nu^2 + g^2(\Gamma - \gamma)\frac{\mu^2}{\nu^2} = 0$$

ist. Setzt man:

$$(4)\qquad \lambda = \tfrac{1}{2} g\Gamma \pm \eta,$$

so hat man:

$$(5)\qquad \eta^2 = \tfrac{1}{4} g^2\Gamma^2 + \mu^2 - \gamma\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)\frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Als Spezialfall ergibt sich hieraus für $\mu = 0$ der entsprechende Ausdruck **95** (5) für den Fall einer vertikalen Schwingung.

Die exponentielle Lösung (2) setzt sich also aus zwei Exponentialfaktoren zusammen. Der erste Faktor $e^{\frac{1}{2}g\Gamma c}$ hängt nur von dem Barotropiekoeffizienten des Mediums ab und bleibt bei allen Bewegungsformen derselbe. Er gibt in allen Höhen die gleiche kinetische Energie und hat zur Folge, daß sich die Amplituden vergrößern, wenn man in dünnere Luft hinaufkommt, und zwar ergibt sich die e-fache Zunahme für ein Höhenintervall von $2H_H$, d. h. für 16000 m.

Der zweite Exponentialfaktor $e^{\pm\eta c}$ hängt dagegen von der Bewegungsform und dem Piezotropiekoeffizienten ab und kann unter Umständen die Änderung der Amplituden mit der Höhe so stark beeinflussen, daß er für die ganze Bewegungsform bestimmend wird. Wenn $\eta^2 > 0$ und folglich η reell ist, bewirkt dieser Faktor eine monotone exponentielle Änderung der Amplituden mit der Höhe, und zwar kann er die Wirkung des ersten Exponentialfaktors sogar übertreffen, sei es, daß er im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne wie dieser wirkt.

Wenn $\eta^2 = 0$ ist, d. h. für

$$(6)\qquad \tfrac{1}{4} g^2\Gamma^2 + \mu^2 - \gamma\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)\frac{\mu^2}{\nu^2} = 0,$$

wird $\lambda = \frac{1}{2} g\Gamma$ eine Doppelwurzel der Gleichung (3), und das Integral von (1) nimmt dann bekanntlich die folgende Form an:

$$(7)\qquad A = (A_0 + A_1 c)\, e^{\frac{1}{2}g\Gamma c}.$$

Wenn schließlich $\eta^2 < 0$ und η folglich imaginär ist, setzen wir $\eta = i\zeta$, wo jetzt ζ reell ist, und erhalten:

$$(8)\qquad \zeta^2 = -\tfrac{1}{4} g^2\Gamma^2 - \mu^2 + \gamma\nu^2 + g^2(\Gamma - \gamma)\frac{\quad}{\nu^2}$$

Von dem komplexen Integral spaltet sich der folgende reelle Teil ab:

$$A = A_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \sin(\zeta c + \varepsilon)\,, \tag{9}$$

d. h. die Amplitude verschwindet in äquidistanten Horizontalebenen. Wir haben den Fall der *typischen zellularen Wellenbewegung*[1], wobei

$$H = \frac{2\pi}{\zeta} \tag{10}$$

die doppelte Zellenhöhe darstellt.

Um die verschiedenen vorkommenden Bewegungsformen in ihrer Abhängigkeit von den Wellenparametern μ und ν bestimmen zu können, muß zunächst die Beziehung zwischen diesen Größen und den Parametern η und ζ näher untersucht werden. Zu diesem Zweck schreiben wir η^2 und ζ^2 in der unten gegebenen speziellen Form als Summe von zwei Gliedern, einem quadratischen und einem Produktglied, und zwar ist das letztere Glied aus den Ausdrücken gebildet, die bei der Ausartung des Gleichungssystems der Amplituden verschwinden:

$$\eta^2 = \frac{1}{g^2}\left[(\nu^2 - \tfrac{1}{2}\Gamma g^2)^2 - \frac{1}{\nu^2}[\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)](\nu^4 - g^2\mu^2)\right], \tag{11}$$

$$\eta^2 = g^2(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)^2 + \frac{1}{\nu^2}(\mu^2 - \gamma\nu^2)[\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)], \tag{11'}$$

$$\eta^2 = g^2\left(\tfrac{1}{2}\Gamma - \frac{\mu^2}{\nu^2}\right)^2 + \frac{1}{\nu^4}(\mu^2 - \gamma\nu^2)(\nu^4 - g^2\mu^2), \tag{11''}$$

$$\zeta^2 = \frac{1}{\nu^2}(\mu^2 - \gamma\nu^2)[-\nu^2 + g^2(\Gamma - \gamma)] - g^2(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)^2. \tag{11'a}$$

Wir betrachten diese Größen in einem $\mu^2\nu^2$-Diagramm, wobei wir nur den ersten Quadranten zu berücksichtigen brauchen. Geraden durch den Anfangspunkt, $\nu^2/\mu^2 = $ konst., sind Kurven gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Man sieht sofort, daß in diesem Diagramm $\eta^2 = $ konst. und $\zeta^2 = $ konst. eine Schar von Hyperbeln darstellen, die sämtlich durch den Koordinatenanfangspunkt gehen (Abb. 38).

Für den speziellen Wert

$$\eta^2 = g^2(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)^2 \tag{12}$$

artet nach (11′) *die Hyperbel in zwei Geraden aus*:

$$\left\{\begin{aligned} \mu^2 - \gamma\nu^2 &= 0\,, \\ \nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma) &= 0\,, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

welche der LAPLACEschen Schallgeschwindigkeit bzw. der Transversalfrequenz entsprechen (L bzw. T in der Abb. 38).

[1] Vgl. die Abhandlung von A. E. H. LOVE: „Wave-Motion in a Heterogeneous Heavy Liquid", Proc. Lond. Math. Soc. 1891, wo der Fall der Inkompressibilität $\gamma = 0$ behandelt wird.

Die LAPLACE*sche Gerade* trennt das *Unterschallgebiet,* wo:

(14a) $$\mu^2 - \gamma\nu^2 > 0$$

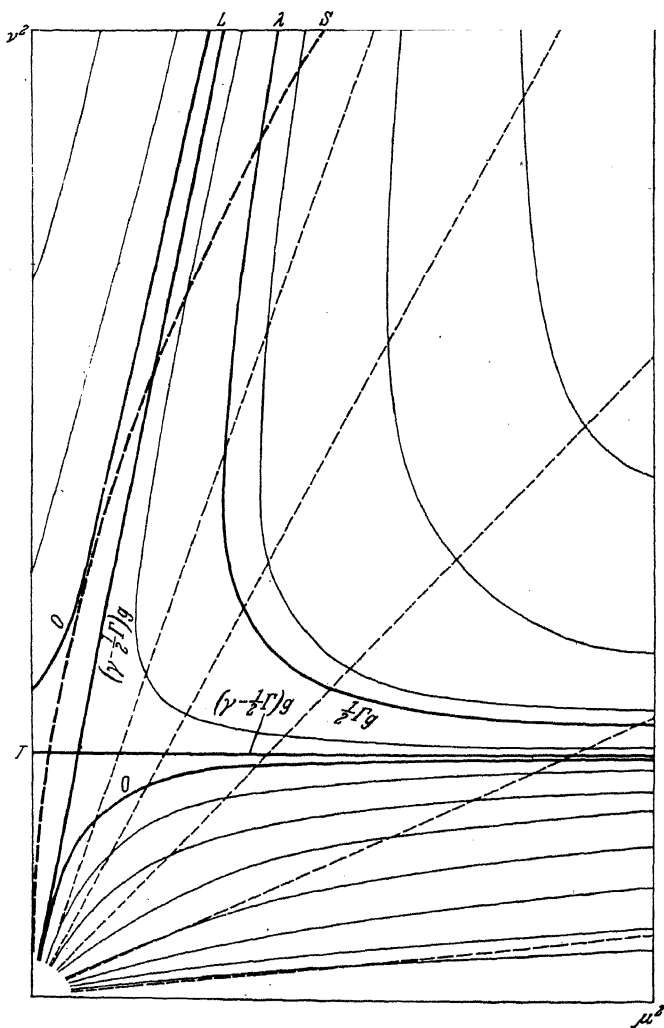



Abb. 38. Kurven η^2 = konst. in einem $\mu^2\nu^2$-Diagramm.

von dem *Überschallgebiet,* wo:

(14b) $$\mu^2 - \gamma\nu^2 < 0\,.$$

Das letztere Gebiet existiert für inkompressible Medien nicht.

Die *Gerade der Transversalfrequenz* trennt das *Hochfrequenzgebiet*, wo:

(15a) $$\nu^2 > g^2(\Gamma - \gamma)$$

von dem *Tieffrequenzgebiet*, wo:

(15b) $$\nu^2 < g^2(\Gamma - \gamma) .$$

Wir haben folglich vier charakteristische Gebiete: Unterschallgebiet mit Hochfrequenz, Unterschallgebiet mit Tieffrequenz, Überschallgebiet mit Hochfrequenz und Überschallgebiet mit Tieffrequenz.

Die Gerade der Transversalfrequenz ist gemeinsame Asymptote sämtlicher Hyperbeln (11); man kann deshalb dieser Frequenz bei jedem Wert von η oder ζ beliebig nahe kommen, wenn man μ nur hinreichend groß wählt.

Die zweite Asymptote der Hyperbeln ist zur LAPLACEschen Geraden parallel und liegt für Werte von η^2 größer als $g^2(\gamma - \frac{1}{2}\Gamma)^2$ im Unterschallgebiet, für kleinere η^2 im Überschallgebiet.

Es ist wichtig zu entscheiden, ob es außer der LAPLACEschen Geraden noch andere Hyperbeläste gibt, deren η-Wert allein durch die inneren Konstanten des Mediums gegeben ist. Dies ist erstens der Fall für die *kritische Hyperbel* (0 in der Abb. 38), $\eta^2 = \zeta^2 = 0$, mit der Gleichung:

(16) $$(\mu^2 - \gamma\nu^2)[\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)] + g^2(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)^2\nu^2 = 0 .$$

Sie verläuft im Unterschall-Tieffrequenz- und im Überschall-Hochfrequenzgebiet, und trennt das Gebiet der reellen η von demjenigen der reellen ζ.

Eine andere solche Hyperbel ist diejenige, deren η-Wert sich dadurch ergibt, daß die Glieder mit μ und ν in (5) verschwinden. Dieser η-Wert,

(17) $$\eta^2 = \tfrac{1}{4}g^2\Gamma^2 ,$$

ist durch den Barotropiekoeffizienten allein definiert. Der entsprechende Hyperbelast verläuft im Unterschall-Hochfrequenzgebiet und trennt das Gebiet:

(17a) $$\eta^2 > \tfrac{1}{4}g^2\Gamma^2 ,$$

wo die beiden Wurzeln λ verschiedenes Vorzeichen haben, von dem Gebiete:

(17b) $$\eta^2 < \tfrac{1}{4}g^2\Gamma^2 ,$$

wo diese Wurzeln gleiches Vorzeichen haben. Da für diese Hyperbel einer der λ-Werte verschwindet, wollen wir sie im folgenden durch $\lambda = 0$ bezeichnen.

Die gegenseitige Lage der drei ausgezeichneten Hyperbeln, der ausgearteten, der kritischen und der Hyperbel $\lambda = 0$, ändert sich mit den inneren Konstanten Γ und γ des Mediums.

Das Aussehen des Hyperbelfeldes in den verschiedenen Fällen geht aus den Abb. 39 hervor. Hier bezeichnet λ die Hyperbel $\lambda = 0$, d. h. $\eta = \frac{1}{2} g \Gamma$, 0 die kritische Hyperbel $\eta^2 = 0$, T die Gerade der Transversalfrequenz $\eta = |g(\gamma - \frac{1}{2}\Gamma)|$, L die Laplacesche Gerade $\mu^2 - \gamma \nu^2 = 0$

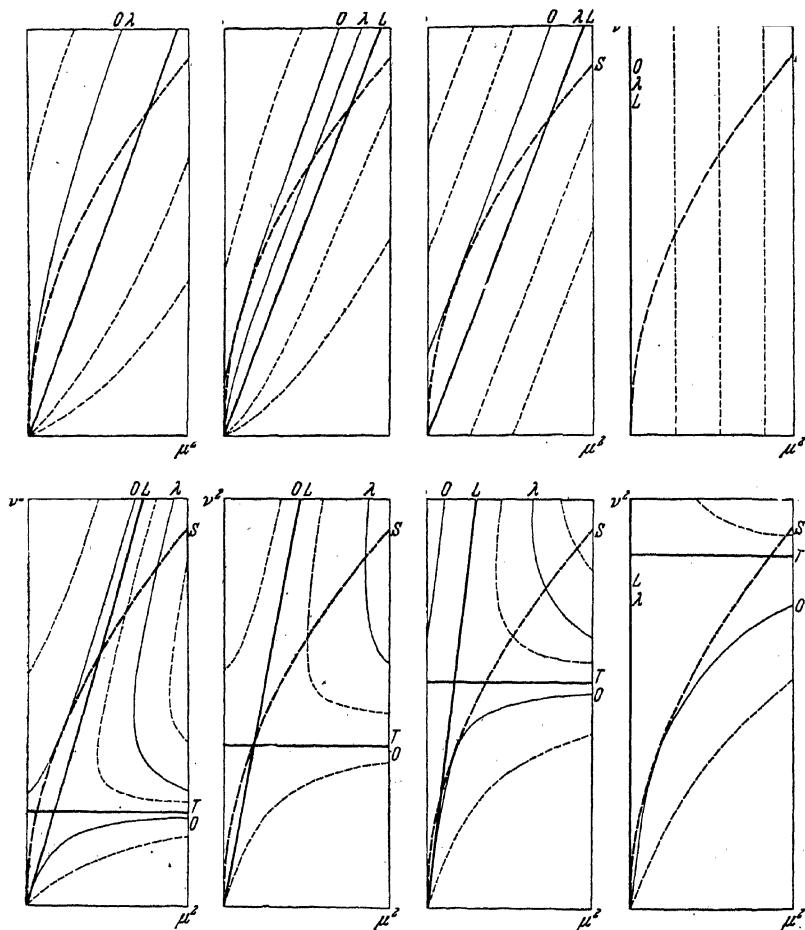



Abb. 39. η-Kurven für verschiedene Stabilitätsverhältnisse.

und S die Parabel $\nu^4 - g^2 \mu^2 = 0$, die der KESschen Fortpflanzungsgeschwindigkeit entspricht. Die acht Figuren entsprechen den verschiedenen Fällen:

$$\gamma > \Gamma = 0, \quad \gamma > \Gamma > 0, \quad \Gamma > 0, \quad \gamma = \Gamma = 0;$$
$$\gamma > \tfrac{1}{2}\Gamma, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}\Gamma, \quad \gamma < \tfrac{1}{2}\Gamma, \quad \gamma = 0.$$

In der Nähe des Koordinatenanfangspunktes, d. h. für kleine μ^2 und ν^2 oder für große Wellenlängen und Perioden, ist es schwierig, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus dem Diagramme abzulesen. Man kann aber hier die Tangentenrichtungen der η-Kurven bestimmen und findet dadurch:

$$= \frac{\nu}{\mu} = g \sqrt{\frac{\Gamma - \gamma}{\frac{1}{4} g^2 \Gamma^2 - \eta^2}} \,. \tag{18}$$

Dieser Wert ist brauchbar unter der Voraussetzung, daß die Periode im Vergleich zur Transversalperiode und die Wellenlänge im Vergleich zur charakteristischen Länge $H_H = 1/(g\Gamma)$ groß ist.

Der kritische Wert $\eta^2 = \zeta^2 = 0$ gibt

(19)

als Fortpflanzungsgeschwindigkeit beim Übergang zur zellularen Bewegung. Für die Atmosphäre ergibt dies 298 m/sec, also einen Wert, der zwischen der NEWTONschen Schallgeschwindigkeit $1/\sqrt{\Gamma} = 280$ m/sec und der LAPLACEschen $1/\sqrt{\gamma} = 332$ m/sec gelegen ist.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der langen zellularen Wellen ergibt sich der Wert:

$$\tilde{\omega} = g \sqrt{\frac{\Gamma - \gamma}{\frac{1}{4} g^2 \Gamma^2 + \zeta^2}} \,, \tag{20}$$

der bei zunehmendem ζ^2, d. h. bei abnehmender Zellenhöhe, immer abnimmt.

98. Wellen in einer isothermen Schicht unendlicher Mächtigkeit. Das allgemeinste Integral der Amplitudengleichung **97** (1) ist durch die Summe von zwei partikulären Integralen der Form **97** (2) mit $\lambda = \frac{1}{2} g\Gamma + \eta$ bzw. $\lambda = \frac{1}{2} g\Gamma - \eta$ und zwei Integrationskonstanten A_1 und A_2 gegeben. Die entsprechenden Ausdrücke von C und D ergeben sich dann aus **94** (5a), und wir erhalten:

$$\begin{cases} A = e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} [A_1 e^{\eta c} + A_2 e^{-\eta c}] \,, \\ C = \dfrac{\nu^2}{\mu} \dfrac{e^{\frac{1}{2} g \Gamma c}}{\nu^2 - g^2 (\Gamma - \gamma)} \left\{ \left[g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma) + \eta \right] A_1 e^{\eta c} + \left[g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma) - \eta \right] A_2 e^{-\eta c} \right\} , \\ D = g \dfrac{\nu^2}{\mu} \dfrac{e^{\frac{1}{2} g \Gamma c}}{\nu^2 - g^2 (\Gamma - \gamma)} \left\{ \left[g\left(\dfrac{\nu^2}{g^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma \right) - \eta \right] A_1 e^{\eta c} + \left[g\left(\dfrac{\nu^2}{g^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma \right) + \eta \right] A_2 e^{-\eta c} \right\} . \end{cases} \tag{1}$$

Wenn eine der willkürlichen Konstanten A_1 und A_2 gleich Null ist, erhält man hieraus die Lösungen in **96** für den Spezialfall der Isothermie, d. h. entweder die druckfreien STOKESschen Wellen oder die longitudinalen LAPLACEschen Wellen. Wenn A_1 und A_2 beide von Null verschieden sind, erhält man allgemeinere Wellen, die hier für den

Fall einer unendlichen Schichtdicke untersucht werden sollen. Zu diesem Zweck wählen wir entweder die freie Oberfläche in $c = \infty$ oder den starren Boden in $c = -\infty$. Wenn wir η positiv annehmen, ergibt sich im ersteren Falle aus (1):

$$g\left(\frac{\nu^2}{g^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) - \eta = 0, \tag{2}$$

und im letzteren Falle:

$$g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma) - \eta = 0. \tag{3}$$

Die somit gegebenen Werte von η führen wir in **97** (11) bzw. (11′) ein und erhalten die STOKES*sche Fortpflanzungsgeschwindigkeit:*

$$\nu^4 - g^2\mu^2 = 0, \tag{4}$$

als Bedingung für die freie Oberfläche in unendlicher Höhe, und die LAPLACE*sche Schallgeschwindigkeit:*

$$\mu^2 - \gamma\nu^2 = 0, \tag{5}$$

als Bedingung für den starren Boden in unendlicher Tiefe, beides unter dem übrigens bedeutungslosen Vorbehalt, daß nicht gleichzeitig Transversalfrequenz vorliegt.

A. Wellen mit STOKES*scher Fortpflanzungsgeschwindigkeit.* In diesem Falle reduziert sich (1) auf:

$$\left\{\begin{aligned} A &= A_1 e^{(g\Gamma - \mu)c} + A_2 e^{\mu c}, \\ C &= -\frac{\mu - g\gamma}{\mu - g(\Gamma - \gamma)} A_1 e^{(g\Gamma - \mu)c} + A_2 e^{\mu c}, \\ D &= 2g\frac{\mu - \tfrac{1}{2}g\Gamma}{\mu - g(\Gamma - \gamma)} A_1 e^{(g\Gamma - \mu)c}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Setzt man die Integrationskonstante $A_1 = 0$, so erhält man wieder die Formeln der gewöhnlichen druckfreien Schwerewellen, die, wie wir in **96** gesehen haben, nicht nur für ein isothermes, sondern auch für ein ganz beliebiges Medium Gültigkeit besitzen.

Bei der allgemeineren Lösung (6) ist aber der Druck nicht mehr Null und die Orbitalumläufe sind nicht mehr kreisförmig.

Führt man eine starre Grenzfläche in $c = 0$ ein, und berücksichtigt man die Grenzflächenbedingung, so kann (6) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_0}{-\tfrac{1}{2}g\Gamma}\{[\mu - g(\Gamma - \gamma)]\, e^{(g\Gamma - \mu)c} + (\mu - g\gamma)\, e^{\mu c}\}, \\ C &= \frac{\mu - g\gamma}{\mu - \tfrac{1}{2}g\Gamma} A_0[-e^{(g\Gamma - \mu)c} + e^{\mu c}], \\ D &= 2g\, A_0 e^{(g\Gamma - \mu)c}. \end{aligned} \tag{6'}$$

Die Amplitude D bleibt endlich in unendlicher Höhe[1] nur für:

$$\mu \geqq g\Gamma \quad \text{oder} \quad \tilde{\omega} \leqq \sqrt{\frac{1}{\Gamma}},$$

d. h. für Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nicht größer als die NEWTONsche.

Ist aber $\mu < g\Gamma$, so verschwinden alle Amplituden in unendlicher Tiefe, und man bekommt in diesem Falle eine mögliche Wellenbewegung unterhalb der starren Ebene $c = 0$.

Die Gleichung der Stromlinien wird:

$$e^{\mu c}\left[1 - e^{(g\Gamma - 2\mu)c}\right]^{\frac{\mu}{\mu - g\gamma}} \sin(\mu a - \nu t) = K, \tag{7}$$

mit einem neutralen Punkte in der Höhe $c = c_A$, die durch

$$e^{(g\Gamma - 2\mu)c_A} = -\frac{\mu - g\gamma}{\mu - g(\Gamma - \gamma)} \tag{8}$$

gegeben ist.

Es erweist sich als zweckmäßig, die Diskussion dieser Gleichungen für zwei Fälle getrennt durchzuführen, je nachdem der Piezotropiekoeffizient größer oder kleiner als der halbe Barotropiekoeffizient ist, $\gamma \gtrless \frac{1}{2}\Gamma$. Im ersteren Fall wollen wir von *starker Kompressibilität* sprechen, im letzteren von *schwacher Kompressibilität.*

Im Falle der starken Kompressibilität ergeben sich bei zunehmender Frequenz die folgenden Stromlinientypen:

Wenn

$$0 < \nu^2 < g^2(\Gamma - \gamma), \tag{9a}$$

sind die Stromlinien oberhalb $c = 0$ vom konvex-parabolischen Typus II B, S. 79, unterhalb $c = 0$ vom konkav-parabolischen Typus I C. Die Tangenten in den Knotenpunkten sind vertikal oder horizontal, je nachdem ob $\nu^2 \gtrless \frac{1}{2}g^2\gamma$ ist. Unterhalb $c = 0$ haben wir ein Beispiel einer zellularen Wellenbewegung mit unendlich tiefen Zellen. Sie wird möglich durch die unterhalb der unbeweglichen Ebene vorkommenden Expansionen und Kontraktionen, die besonders in der Umgebung der Knotenpunkte stark konzentriert sind. Auf diese Lokalisierung der Kompressionen und Expansionen muß die Überschallgeschwindigkeit zurückgeführt werden.

[1] Die Grenzbedingung an einer freien Oberfläche in unendlicher Höhe fordert $P = 0$ und $p = 0$. Nach dem Prinzip der kleinen Störung muß aber p gegen P klein sein. Da nun das Verhältnis zwischen p und P der Größe Sp proportional ist, folgt unmittelbar, daß die Amplitude D von Sp in unendlicher Höhe nicht unendlich werden darf.

Wenn

(9b) $$g^2(\Gamma - \gamma) < \nu^2 < g^2\gamma,$$

bleiben die Stromlinien unterhalb $c = 0$ wie früher, oberhalb gehen sie jedoch in den hyperbolischen Typus IV B über. Der hyperbolische Punkt kommt, wenn ν^2 mit dem Wert $g^2(\Gamma - \gamma)$ beginnend anwächst, vom Unendlichen her, erreicht für $\nu^2 = \frac{1}{2}g^2\Gamma$ das Minimum:

$$c_A = \frac{1}{g(\gamma - \frac{1}{2}\Gamma)},$$

und rückt, wenn sich ν^2 dem Werte $g^2\gamma$ nähert, wieder ins Unendliche.

Wenn $\nu^2 = g^2\gamma$ ist, d. h. im Schnittpunkt der STOKESschen Parabel mit der LAPLACEschen Geraden, reduziert sich die Lösung auf reine Longitudinalwellen mit horizontalen geraden Stromlinien.

Wenn endlich

(9c) $$g^2\gamma < \nu^2,$$

werden die Stromlinien oberhalb $c = 0$ konkav-parabolisch I B, unterhalb $c = 0$ konvex-parabolisch II C.

Im Falle der schwachen Kompressibilität, mit Einschluß der Inkompressibilität, gilt entsprechend folgendes:

Wenn

(9′a) $$0 < \nu^2 < g^2\gamma,$$

sind die Stromlinien oberhalb $c = 0$ vom konvex-parabolischen Typus II B, unterhalb $c = 0$ vom konkav-parabolischen Typus I C, wie für den Fall der starken Kompressibilität.

Für $\nu^2 = g^2\gamma$ sind die Stromlinien horizontale Geraden.

Wenn

(9′b) $$g^2\gamma < \nu^2 < g^2(\Gamma - \gamma),$$

sind die Stromlinien oberhalb $c = 0$ vom konkav-parabolischen Typus I B, unterhalb $c = 0$ vom elliptischen Typus III C, mit einem elliptischen Punkte, der, wenn ν^2 von $g^2\gamma$ bis $g^2(\Gamma - \gamma)$ wächst, von $-\infty$ kommt, die maximale Höhe:

$$c_A = -\frac{1}{g(\frac{1}{2}\Gamma - \gamma)}$$

bei $\nu^2 = \frac{1}{2}g^2\Gamma$ erreicht und wieder nach $-\infty$ zurückkehrt. Die Notwendigkeit der geschlossenen Stromlinien im unteren Gebiet sieht man unmittelbar ein im Inkompressibilitätsfall, wo die Solenoidalbedingung erfüllt sein muß; dieser kann als ein erstes Beispiel einer elliptisch zellularen Wellenbewegung angesehen werden.

Wenn endlich

$$g^2(\Gamma - \gamma) < \nu^2, \tag{9'c}$$

werden die Stromlinien wie früher oberhalb $c = 0$ konkav-parabolisch I B, unterhalb $c = 0$ konvex-parabolisch II C.

B. Wellen mit LAPLACE*scher Schallgeschwindigkeit.* In diesem Falle reduziert sich (1) auf:

$$\begin{aligned} A &= A_1 e^{g(\Gamma-\gamma)c} + A_2 e^{g\gamma c}, \\ C &= \frac{\nu^2}{\mu} \frac{2g(\gamma - \frac{1}{2}\Gamma)}{\nu^2 \quad g^2(\Gamma-\gamma)} A_2 e^{g\gamma c}, \\ D &= \frac{\nu^2}{\mu}\left[A_1 e^{g(\Gamma-\gamma)c} + \frac{\nu^2 - g^2\gamma}{\nu^2 - g^2(\Gamma-\gamma)} A_2 e^{g\gamma c}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Setzt man die Integrationskonstante A_2 gleich Null, so erhält man wieder die Formeln der gewöhnlichen LAPLACEschen Longitudinalwellen.

Führt man dagegen eine freie Oberfläche in $c = 0$ ein, und berücksichtigt man die Grenzflächenbedingung, so läßt sich (10) in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_0}{\gamma - \frac{1}{2}\Gamma}\{-(\nu^2 - g^2\gamma) e^{g(\Gamma-\gamma)c} + [\nu^2 - g^2(\Gamma-\gamma)] e^{g\gamma c}\}, \\ & \cdot 2g \frac{\nu^2}{\mu} A_0 e^{g\gamma c}, \\ D &= \frac{\nu^2}{\mu} \frac{\nu^2 - g^2\gamma}{\gamma - \frac{1}{2}\Gamma} A_0[-e^{g(\Gamma-\gamma)c} + e^{g\gamma c}]. \end{aligned} \tag{10'}$$

Diese Lösung stellt verallgemeinerte Schallwellen unterhalb einer freien Oberfläche dar.

Im Falle der starken Kompressibilität ist $\gamma > \Gamma - \gamma$; in großer Tiefe wird deshalb das Exponentialglied $e^{g(\Gamma-\gamma)c}$ gegenüber dem anderen Glied überwiegen, und man erhält dort angenähert die rein longitudinalen Schallwellen. In der Nähe der freien Oberfläche werden aber die Wellen mehr den Charakter von Schwerewellen haben. Dieser Übergang von Schallwellen zu Oberflächenwellen ist je nach der Frequenz verschieden, wie aus der folgenden Diskussion der Stromlinien hervorgeht.

Im Falle der schwachen Kompressibilität, $\gamma < \Gamma - \gamma$, überwiegt dagegen das Exponentialglied $e^{g\gamma c}$ in großer Tiefe. Wellen von longitudinalem Charakter können dann unter einer freien Oberfläche überhaupt nicht auftreten.

Die Stromlinien sind durch die zweifach exponentielle Gleichung

$$e^{\frac{\nu^2 - g^2(\Gamma-\gamma)}{2g(\gamma-\frac{1}{2}\Gamma)}\gamma c + \frac{\nu^2 - g^2\gamma}{4g^2(\gamma-\frac{1}{2}\Gamma)^2}\gamma e^{-2g(\gamma-\frac{1}{2}\Gamma)c}} \sin(\mu a - \nu t) = K \tag{11}$$

gegeben mit einem neutralen Punkte in der Höhe $c = c_A$, die durch

$$e^{2g(\gamma - \frac{1}{2}\Gamma) c_A} = \frac{\nu^2 - g^2\gamma}{\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)} \tag{12}$$

gegeben ist.

Im Falle starker Kompressibilität ergeben sich nun die folgenden Stromlinientypen:

Wenn

$$0 < \nu^2 < \nu_T^2 = g^2(\Gamma - \gamma), \tag{13a}$$

sind die Stromlinien vom elliptischen Typus III D mit dem elliptischen Punkte oberhalb der freien Oberfläche, und zwar am tiefsten für $\nu = 0$ und im Unendlichen für $\nu = \nu_T$.

Wenn

$$\nu_T^2 < \nu^2 < g^2\gamma, \tag{13b}$$

verlaufen die Stromlinien konkav-parabolisch I D, wobei der neutrale Punkt jetzt ins imaginäre Gebiet gerückt ist.

Für $\nu^2 = g^2\gamma$, d. h. im Schnittpunkte der LAPLACEschen mit der STOKESschen Kurve, ergeben sich reine Oberflächenwellen.

Ist endlich

$$g^2\gamma < \nu^2, \tag{13c}$$

so sind die Stromlinien vom hyperbolischen Typus IV D mit dem neutralen Punkte unterhalb der freien Oberfläche; von $-\infty$ kommend, nähert er sich der Oberfläche für wachsendes ν, um diese für unendliches ν zu erreichen.

Den hier vorkommenden Wellentypen sind die folgenden Merkmale eigentümlich:

Wenn

$$\nu^2 < g^2\gamma,$$

so ist die Horizontalbewegung in allen Punkten einer beliebigen Vertikalen gleichgerichtet.

Wenn

$$\nu^2 > g^2\gamma,$$

so hat man in den oberen Punkten der Vertikalen entgegengesetzte Horizontalbewegung wie in den unteren.

Im ersteren Falle hat man das leichtverständliche Verhalten, daß sich die Druckmaxima unter den Wellenbergen und die Druckminima unter den Wellentälern befinden, also unterhalb der Stellen, wo das Gewicht der darüberliegenden Massen am größten bzw. am kleinsten ist. Im letzteren Falle befinden sich dagegen die Druckmaxima unter den Wellentälern, wo die Beschleunigung nach oben am größten ist, und die Druckminima unter den Wellenbergen, wo die Beschleunigung nach unten am größten ist. Daraus ergibt sich auch

sofort in den oberen Teilen der Schicht die entgegengesetzte Horizontalbewegung wie in den unteren.

Im Falle schwacher Kompressibilität hat man für

$$0 < \nu^2 < g^2 \gamma \tag{13'a}$$

den elliptischen Typus III D mit dem neutralen Punkte unterhalb der Oberfläche; für

$$g^2 \gamma < \nu^2 < \nu_T^2 \tag{13'b}$$

den konvex-parabolischen Typus II D und für

$$\nu_T^2 < \nu^2 \tag{13'c}$$

den hyperbolischen Typus IV D mit dem neutralen Punkte oberhalb der freien Oberfläche.

99. Wellen in einer isothermen Schicht endlicher Mächtigkeit. In diesem Falle führen wir eine starre Grenzfläche in der Höhe $c = 0$ ein. Durch Anwendung der Grenzflächenbedingung $C(0) = 0$ ergibt sich dann aus dem allgemeinen Integral **98** (1) bei geeigneter Wahl des konstanten Faktors:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu A_0}{\mu^2 - \gamma \nu^2} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ \cosh \eta c - g\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) \frac{1}{\eta} \sinh \eta c \right\}, \\ C &= A_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \frac{1}{\eta} \sinh \eta c, \\ D &= \frac{\nu^2 A_0}{\mu^2 - \gamma \nu^2} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ \cosh \eta c - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) \frac{1}{\eta} \sinh \eta c \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Ausdrücke gelten, solange $\eta^2 > 0$ ist. Wenn η^2 gegen Null konvergiert, kann man im Limes $\cosh \eta c$ durch 1 und $\sinh \eta c$ durch das Argument ηc ersetzen. Die Formeln werden dann:

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\mu A_0}{\mu^2 - \gamma \nu^2} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ 1 - g\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) c \right\}, \\ C &= A_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} c, \\ D &= \frac{\nu^2 A_0}{\mu^2 - \gamma \nu^2} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ 1 - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) c \right\}. \end{aligned} \right. \tag{1'}$$

Wenn endlich $\eta^2 < 0$ ist, führen wir $\eta = i\zeta$ ein. Wegen

$$\cosh \eta c = \cos \zeta c, \qquad \frac{1}{\eta} \sinh \eta c = \frac{1}{\zeta} \sin \zeta c$$

wird die Lösung (1):

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\mu A_0}{\mu^2 - \gamma \nu^2} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ \cos \zeta c - g\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) \frac{1}{\zeta} \sin \zeta c \right\}, \\ C &= A_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \frac{1}{\zeta} \sin \zeta c, \\ D &= \frac{\nu^2 A_0}{\mu^2 - \gamma \nu^2} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ \cos \zeta c - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) \frac{1}{\zeta} \sin \zeta c \right\}. \end{aligned} \right. \tag{1''}$$

Wenn man in diesen Formeln ζ gegen Null konvergieren läßt, kommt man genau so zu (1′), wie wenn man in (1) η gegen Null konvergieren läßt.

Unter Beachtung von **22** (12) findet man als Gleichung der Stromlinien in den drei Fällen:

$$(2)\qquad e^{\frac{\mu^2}{\mu^2-\gamma\nu^2}(\frac{1}{2}\Gamma-\gamma)gc}\left[\frac{1}{\eta}\sinh\eta c\right]^{\frac{\mu^2}{\mu^2-\gamma\nu^2}}\sin(\mu a-\nu t)=K,$$

$$(2')\qquad e^{\frac{\mu^2}{\mu^2-\gamma\nu^2}(\frac{1}{2}\Gamma-\gamma)gc}\,c^{\frac{\mu^2}{\mu^2-\gamma\nu^2}}\sin(\mu a-\nu t)=K,$$

$$(2'')\qquad e^{\frac{\mu^2}{\mu^2-\gamma\nu^2}(\frac{1}{2}\Gamma-\gamma)gc}\left[\frac{1}{\zeta}\sin\zeta c\right]^{\frac{\mu^2}{\mu^2-\gamma\nu^2}}\sin(\mu a-\nu t)=K.$$

Das Niveau c_A, wo die Horizontalamplitude verschwindet, ist bzw. durch die Gleichungen

$$(3)\quad \operatorname{tgh}\eta c_A=\frac{\eta}{g(\gamma-\frac{1}{2}\Gamma)},\qquad c_A=\frac{1}{g(\gamma-\frac{1}{2}\Gamma)},\qquad \operatorname{tg}\zeta c_A=\frac{\zeta}{g(\gamma-\frac{1}{2}\Gamma)}$$

gegeben. Gleichzeitig ist das Niveau c_D, wo die Druckamplitude verschwindet, durch die ähnlich gebauten Formeln

$$(4)\quad \operatorname{tgh}\eta c_D=\frac{\eta}{g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}-\frac{1}{2}\Gamma\right)},\qquad c_D=\frac{1}{g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}-\frac{1}{2}\Gamma\right)},\qquad \operatorname{tg}\zeta c_D=\frac{\zeta}{g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}-\frac{1}{2}\Gamma\right)}$$

gegeben.

Da sämtliche Gleichungen (2), (2′), (2″) in Wirklichkeit nur verschiedene Formen ein und derselben Gleichung sind, und da dasselbe für die Gleichungen (3) und (4) gilt, können wir die Diskussion gemeinschaftlich führen, indem wir aus (2) die horizontalen Geraden $K=0$ und $K=\infty$ bestimmen, aus (3) die Lage des neutralen Punktes des Stromliniensystems und aus (4) die Niveaus, wo eine freie Oberfläche möglich ist.

Im Unterschallgebiet findet man die folgenden horizontalen Geraden:

$K=0$ aus den Gleichungen (2) und (2′), wenn $c=0$,

$K=0$ aus Gleichung (2″), wenn $c=n\frac{H}{2}$, $(n=0,\pm 1,\ldots)$,

$K=\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$ aus den Gleichungen (2) und (2′) für $c=\infty$, wenn $g(\frac{1}{2}\Gamma-\gamma)+\eta\lesseqgtr 0$,

$K=$ aus den Gleichungen (2) und (2′) für $c=-\infty$, wenn $g(\frac{1}{2}\Gamma-\gamma)-\eta\gtreqless 0$.

Im Überschallgebiet findet man die folgenden horizontalen Geraden:

$K=\infty$ aus den Gleichungen (2) und (2′), wenn $c=0$,

$K=\infty$ aus Gleichung (2″), wenn $c=n\frac{H}{2}$,

$K=\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$ aus den Gleichungen (2) und (2′) für $c=\infty$, wenn $g(\frac{1}{2}\Gamma-\gamma)+\eta\gtreqless 0$,

$K=\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$ aus den Gleichungen (2) und (2′) für $c=-\infty$, wenn $g(\frac{1}{2}\Gamma-\gamma)-\eta\lesseqgtr 0$.

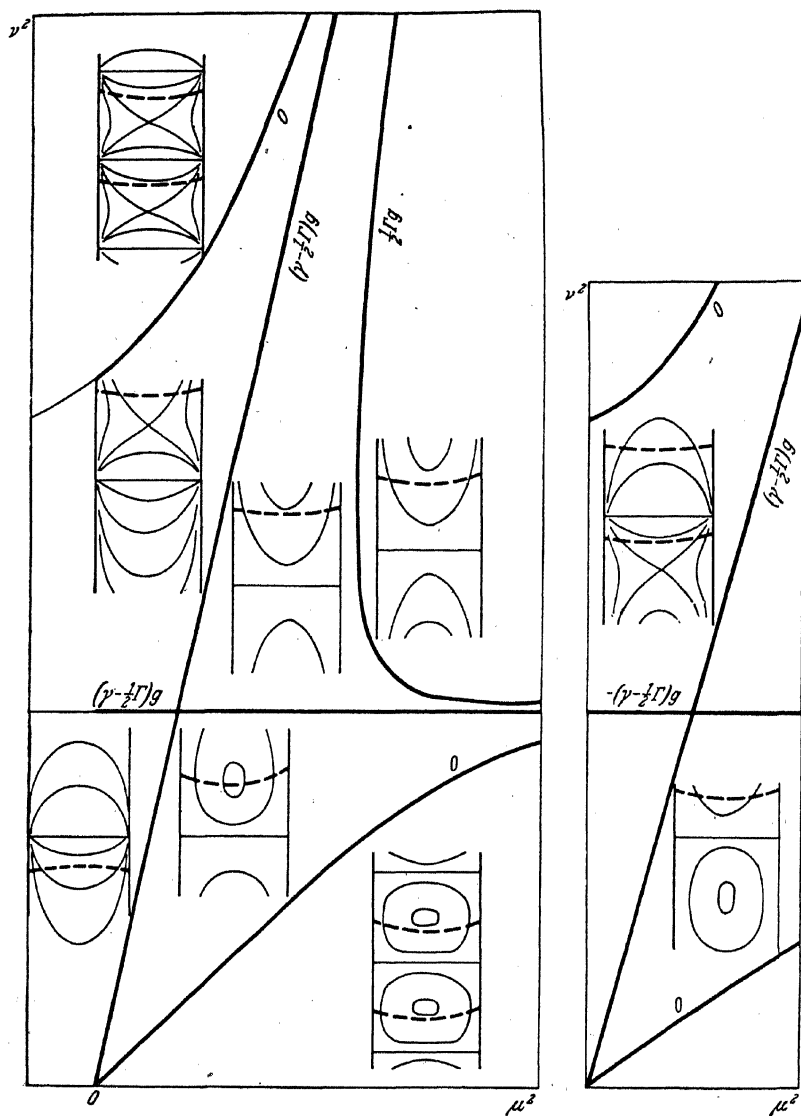



Abb. 40. Stromlinientypen in verschiedenen Gebieten des $\mu^2\nu^2$-Diagramms.

Dies gibt folgende Typen von Stromlinien (Abb. 40):

1. Unterschall-Hochfrequenzgebiet: Oberhalb $c = 0$ sind die Stromlinien vom Typus I B, unterhalb vom Typus II C. Unterhalb $c = 0$

ist die Lösung nur brauchbar für $\eta < \frac{1}{2} g \Gamma$, d. h. nur für Punkte innerhalb der Hyperbel $\lambda = 0$.

2. *Überschall-Tieffrequenzgebiet:* Die Stromlinien sind oberhalb $c = 0$ vom Typus II B, unterhalb vom Typus I C, mit vertikalen bzw. horizontalen Tangenten in den Knotenpunkten, je nachdem, ob $\mu^2 - \frac{1}{2}\gamma\nu^2 \gtrless 0$ ist.

3. *Unterschall-Tieffrequenzgebiet:* Unterhalb der kritischen Hyperbel sind die Stromlinien vom Typus III A (*elliptisch zellulare Wellenbewegung*). Oberhalb der kritischen Hyperbel sind sie bei starker Kompressibilität oberhalb des Niveaus $c = 0$ vom Typus III B und unterhalb dieses Niveaus vom Typus II C; bei schwacher Kompressibilität, einschließlich Inkompressibilität, dagegen oberhalb $c = 0$ vom Typus I B und unterhalb $c = 0$ vom Typus III C (rechts in der Abbildung).

4. *Überschall-Hochfrequenzgebiet:* Links der kritischen Hyperbel sind die Stromlinien vom Typus IV A (*hyperbolisch zellulare Wellenbewegung*), mit vertikalen bzw. horizontalen Tangenten in den Knotenpunkten, je nachdem $\mu^2 - \frac{1}{2}\gamma\nu^2 \gtrless 0$. Rechts der kritischen Hyperbel hat man bei starker Kompressibilität den Typus IV B oberhalb und den Typus I C unterhalb des Niveaus $c = 0$, bei schwacher Kompressibilität dagegen II B oberhalb und IV C unterhalb $c = 0$ (rechts in der Abbildung).

Sowohl aus den Stromlinien wie aus den Gleichungen (3) erkennt man, daß *neutrale Punkte* nur im Unterschall-Tieffrequenz- und im Überschall-Hochfrequenzgebiet möglich sind. Die dritte Gleichung (3), welche sich auf die elliptische oder hyperbolisch zellulare Bewegung bezieht, läßt sich schreiben:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{c_A}{H} = 2\pi \frac{\Gamma}{\gamma - \frac{1}{2}\Gamma} \frac{H_H}{H}$$

Ist $H_H/H = \infty$, so wird $|c_A| = H/4$, d. h. der singuläre Punkt fällt in die Mitte der Zelle. Für kleinere Werte von H_H/H liegt der neutrale Punkt bei starker Kompressibilität unterhalb, bei schwacher oberhalb der Zellenmitte.

Schließlich untersuchen wir auch die Bedingungen für die Existenz einer *freien Oberfläche.*

Aus **97** (11″) sieht man sofort, daß die Gleichung (4) keine Lösung hat, wenn

$$(\mu^2 - \gamma\nu^2)(\nu^4 - g^2\mu^2) > 0 .$$

Eine freie Oberfläche ist also im Gebiet zwischen der STOKESschen Parabel und der LAPLACEschen Geraden unmöglich.

Wir betrachten zuerst reelle η, d. h. die erste Formel (4). Dann wird $c_D \gtrless 0$, je nachdem ob $\frac{\mu^2}{\nu^2} \gtrless \frac{1}{2}\Gamma$ ist, d. h. $\tilde{\omega} \lesseqgtr \sqrt{\frac{2}{\Gamma}}$. Bei starker Kompressibilität sind im Überschallgebiet nichtzellulare Lösungen mit freier Oberfläche oberhalb $c = 0$ nur dann möglich, wenn

$\tilde{\omega} = \frac{\nu}{\mu} < \sqrt{\frac{2}{\Gamma}}$ ist; bei schwacher Kompressibilität gibt es im Überschallgebiet überhaupt keine nichtzellularen Lösungen. Im Unterschallgebiet ergeben sich bei starker Kompressibilität immer Lösungen

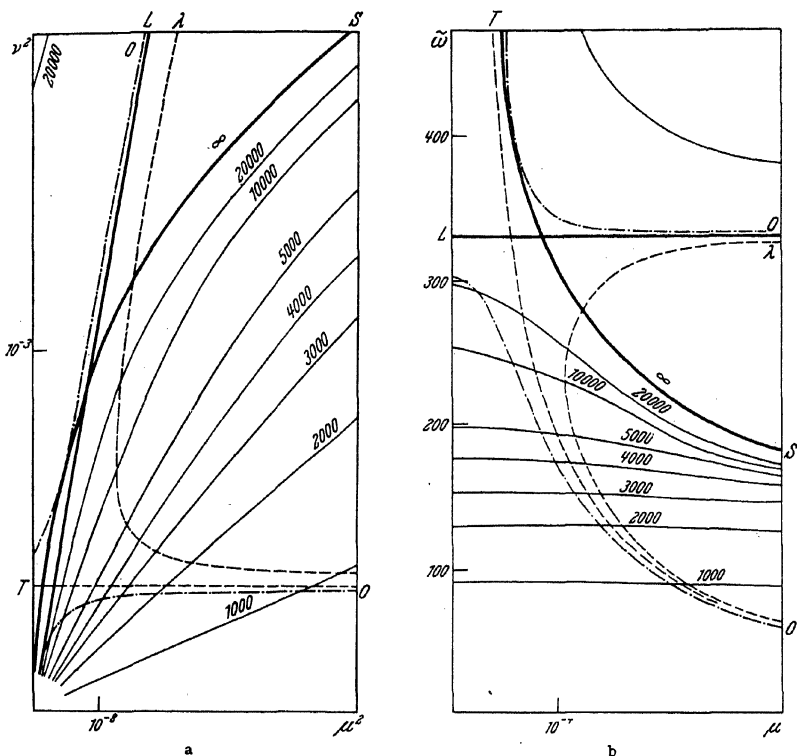



Abb. 41 a u. b. Kurven c_D = konst. im $\mu^2\nu^2$- und im $\mu\tilde{\omega}$-Diagramm.

mit freier Oberfläche oberhalb $c = 0$, bei schwacher Kompressibilität nur, wenn $\tilde{\omega} < \sqrt{\frac{2}{\Gamma}}$ ist.

Für den Fall imaginärer η, also bei zellularen Bewegungen, ergibt sich in jeder Zelle ein Niveau c_D = konst.; es gibt also immer Lösungen mit freier Oberfläche, und zwar liegt diese Oberfläche bei elliptisch zellularer Bewegung unterhalb, bei hyperbolisch zellularer Bewegung oberhalb des neutralen Punktes.

Im $\mu^2\nu^2$-Diagramm kann man die Kurven

$$c_D = \text{konst.}$$

einzeichnen und bekommt in dieser Weise zusammengehörige Werte von μ, ν und $\tilde{\omega} = \nu/\mu$ bei der Wellenbewegung einer endlichen Schicht

der Dicke c_D mit freier Oberfläche. Für unendliches c_D ergeben sich, wie schon früher gezeigt, die LAPLACEsche Gerade und die STOKESsche Parabel; und wenn c_D groß ist, schmiegen sich die Kurven $c_D =$ konst. an Stücke dieser zwei Kurven an. Da man, um physikalisch brauchbare Lösungen zu erhalten, c_D immer oberhalb der starren Fläche annehmen muß, ergeben sich beim Grenzübergang nicht die ganzen LAPLACEschen und STOKESschen Kurven.

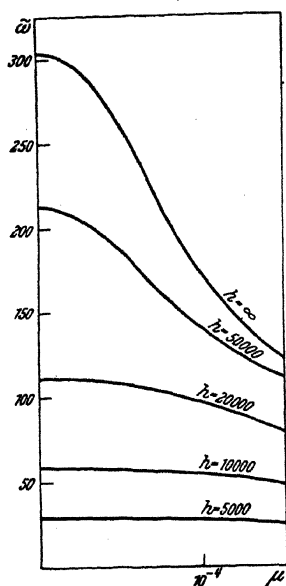



Abb. 42. Kurven $h = \frac{H}{2} =$ konst.

Die Kurven $c_D =$ konst. sind teils in einem $\mu^2\nu^2$-Diagramm eingezeichnet (Abb. 41a) und teils in einem $\mu\tilde{\omega}$-Diagramm (Abb. 41b). Aus der Abb. 41a sieht man, daß die einzelnen Kurven in der Nähe des Koordinatenursprunges angenähert gradlinig und in großem Abstand parabelähnlich sind.

Bei gegebener Schichtdicke kann man durch graphische Interpolation aus dem Diagramm 41a zusammengehörige Werte von μ und ν direkt gewinnen und mit Hilfe des Diagrammes Abb. 40 den allgemeinen Verlauf der Stromlinien finden. Aus der Abb. 41b findet man entsprechend zusammengehörige Werte von μ und $\tilde{\omega}$. Für den Fall, daß sich eine Flüssigkeit zwischen zwei starren Grenzflächen bewegt, kann man in derselben Weise das Diagramm Abb. 42 benutzen.

Man sieht unmittelbar, daß sich bei großem μ, d. h. für sehr hohe Zellen, die Transversalperiode T_T ergeben wird. Bei zunehmender Verhältniszahl L/H nimmt die Periode immer zu. Für einen Kubus, $H = L$, wird $\zeta = \mu$ und stellt in der $\mu^2\nu^2$-Ebene eine Hyperbel dar mit der horizontalen Geraden $\nu^2 = \frac{1}{2}g^2(\Gamma - \gamma)$ als Asymptote, die in der Mitte zwischen der Abszissenachse und der Geraden der Transversalperiode liegt. *Die Schwingungsdauer isothermer Luft in einem Kubus ist also gleich* $\sqrt{2}\,T_T$ *oder 7,9 Min, wenn die Seitenlänge klein im Vergleich zur Höhe* $H_H = 8000$ *m der homogenen Atmosphäre ist.* Im Grenzfall unendlich flacher Zellen ergibt sich schließlich aus **97** (20), wenn $\tilde{\omega} = L/T$ und $\zeta = 2\pi/H$ eingeführt werden:

$$T = \frac{L}{H}\,\frac{1}{g}\sqrt{\frac{4\pi^2 + \frac{1}{4}g^2\Gamma^2H^2}{\Gamma - \gamma}}\,; \tag{5}$$

die Schwingungsdauer ist also der Verhältniszahl L/H direkt proportional.

Einen wichtigen Grenzfall im Falle der freien Oberfläche hat man, wenn die Flüssigkeitsschicht so dünn ist, daß man in den Formeln (1) oder (1'') die Sinusse durch die Argumente und die Kosinusse durch 1 ersetzen kann. In diesem Falle der langen oder *quasistatischen* Wellen ergibt sich in erster Näherung:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\mu A_0}{\mu^2 - \gamma \nu^2} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} [1 - g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma) c], \\
C &= A_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} c, \qquad (6) \\
D &= \frac{\nu^2 A_0}{\mu^2 - \gamma \nu^2} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left[1 - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) c\right].
\end{aligned}
$$

Aus Gleichung (4) ergibt sich in derselben Weise als Frequenzengleichung:

$$1 - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) c_D = 0. \qquad (7)$$

Durch Auflösung nach $\tilde{\omega}$ folgt:

$$= \frac{\nu}{\mu} = \pm \sqrt{\frac{g c_D}{1 + \frac{1}{2} g \Gamma c_D}}. \qquad (7')$$

Im Falle der Homogenität, $\Gamma = 0$, erhält man wieder die bekannte LAGRANGEsche Formel $\tilde{\omega} = \pm\sqrt{g c_D}$. Für $\Gamma > 0$ ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit immer kleiner als die LAGRANGEsche.

100. Ein System von *n* isothermen Schichten. Nachdem wir jetzt eine isotherme Schicht — zwischen starren Ebenen oder mit freier Oberfläche — behandelt haben, wollen wir den Fall betrachten, daß eine beliebige Anzahl solcher Schichten übereinandergelagert ist. Der Symmetrie halber können wir annehmen, daß das Gesamtsystem sowohl oben wie unten durch starre Ebenen begrenzt ist. Zu dem Falle einer freien Oberfläche gelangen wir, indem wir die Dichte der Flüssigkeit in der oberen Schicht gleich Null setzen.

Wir wollen die Schichten von unten nach oben mit römischen Zahlen numerieren:

$$I,\ II,\ III,\ \ldots,\ K,\ K+I,\ \ldots,\ N-I,\ N \qquad (1)$$

und die Grenzflächen von unten an mit arabischen Zahlen:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,\ k,\ k+1,\ \quad n-2,\ n-1,\ n. \qquad (2)$$

Eine Schicht und ihre obere Grenzfläche tragen also dieselbe Nummer. Die Größen einer bestimmten Schicht K kennzeichnen wir durch den oben angebrachten Index K, und die Größen einer bestimmten Grenzfläche k durch den unten angebrachten Index k.

Wenn wir nun die beiden Wurzelwerte $\lambda = \frac{1}{2} g \Gamma \pm \eta$ aus **97** (4) verwenden, ergibt sich für die Schicht K als allgemeinster Ausdruck der Vertikalamplitude:

$$C^K = C_a^K e^{(\frac{1}{2} g \Gamma^K + \eta^K) c} + C_b^K e^{(\frac{1}{2} g \Gamma^K - \eta^K) c}. \qquad (3)$$

Die vorläufig beliebig gewählten Integrationskonstanten C_a^K und C_b^K werden wir jetzt durch die Werte der Vertikalamplituden C_k^K und C_{k-1}^K an der oberen und der unteren Grenze der Schicht K ausdrücken. Hierdurch erhält man aus (3) die folgenden Gleichungen:

$$C_k^K = C_a^K e^{(\frac{1}{2} g \Gamma^K + \eta^K) c_k} + C_b^K e^{(\frac{1}{2} g \Gamma^K - \eta^K) c_k},$$

$$C_{k-1}^K = C_a^K e^{(\frac{1}{2} g \Gamma^K + \eta^K) c_{k-1}} + C_b^K e^{(\frac{1}{2} g \Gamma^K - \eta^K) c_{k-1}}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach C_a^K und C_b^K ergibt sich:

$$C_a^K = \frac{1}{2 \sinh \eta^K (c_{k-1} - c_k)} \left\{ C_{k-1}^K e^{-\frac{1}{2} g \Gamma^K c_{k-1} - \eta^K c_k} - C_k^K e^{-\frac{1}{2} g \Gamma^K c_k - \eta^K c_{k-1}} \right\},$$

$$C_b^K = \frac{1}{2 \sinh \eta^K (c_{k-1} - c_k)} \left\{ -C_{k-1}^K e^{-\frac{1}{2} g \Gamma^K c_{k-1} + \eta^K c_k} + C_k^K e^{-\frac{1}{2} g \Gamma^K c_k + \eta^K c_{k-1}} \right\}.$$

Diese Ausdrücke der Konstanten setzen wir in (3) ein. Damit haben wir dann die Amplitude der Vertikalbewegung in einer beliebigen Schicht K durch die Werte C_k^K und C_{k-1}^K dieser Amplituden an den Grenzflächen oberhalb und unterhalb der Schicht ausgedrückt. Die kinematische Grenzflächenbedingung erfordert jetzt gleiche Vertikalamplituden beiderseits einer Grenzfläche, also $C_k^{K+I} = C_k^K$, $C_{k-1}^K = C_{k-1}^{K-I}, \ldots$. Daß die kinematische Grenzflächenbedingung erfüllt ist, können wir deshalb einfach in der Weise zum Ausdruck bringen, daß wir die oberen Indizes der Größen C fortlassen. In dieser Weise wird der Ausdruck der Vertikalamplitude C^K in einer beliebigen Schicht K:

$$C^K = \frac{}{\sinh \eta^K (c_{k-1} - c_k)} \left\{ C_{k-1} e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_{k-1})} \sinh \eta^K (c - c_k) - C_k e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_k)} \sinh \eta^K (c - c_{k-1}) \right\}. \tag{4}$$

Nach den allgemeinen Formeln **94** (5b) findet man für die entsprechende Horizontalamplitude A^K und die Druckamplitude D^K:

$$A^K = \frac{}{(\mu^2 - \gamma^K \nu^2) \sinh \eta^K (c_{k-1} - c_k)} \cdot \Big\{ C_{k-1} e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_{k-1})} \left[\left(\tfrac{1}{2} \Gamma^K - \gamma^K\right) g \sinh \eta^K (c - c_k) + \eta^K \cosh \eta^K (c - c_k) \right] - C_k e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_k)} \left[\left(\tfrac{1}{2} \Gamma^K - \gamma^K\right) g \sinh \eta^K (c - c_{k-1}) + \eta^K \cosh \eta^K (c - c_{k-1}) \right] \Big\},$$

(5)

$$D^K = \frac{\nu^2}{(\mu^2 - \gamma^K \gamma^2) \sinh \eta^K (c_{k-1} - c_k)} \Big\{ C_{k-1} e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_{k-1})} \left[\left(\tfrac{1}{2} \Gamma^K - \frac{\mu^2}{\nu^2} \right) g \sinh \eta^K (c - c_k) + \eta^K \cosh \eta^K (c - c_k) \right] - C_k e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_k)} \left[\left(\tfrac{1}{2} \Gamma^K - \frac{\mu^2}{\nu^2} \right) g \sinh \eta^K (c - c_{k-1}) + \eta^K \cosh \eta^K (c - c_{k-} \right.$$

Nach der letzten Formel kann man durch Vergrößerung aller Indizes um 1 den Ausdruck der Druckamplitude D^{K+I} in der nächsthöheren Schicht aufschreiben. An der Grenzfläche der beiden Schichten, für $c = c_k$, müssen dann nach der dynamischen Grenzflächenbedingung

die beiden Drucke einander gleich sein und somit $Q_k^{K+I} D_k^{K+I} = Q_k^K D_k^K$. Dies ergibt die folgende Relation zwischen den Vertikalamplituden an drei aufeinanderfolgenden Grenzflächen:

$$(6)\quad \left|\begin{aligned} & C_{k-1} \frac{e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c_k - c_{k-1})} \eta^K Q_k^K}{(\mu^2 - \gamma^K \nu^2) \sinh \eta^K (c_{k-1} - c_k)} \\ & + C_k \left\{ \frac{Q_k^K}{\mu^2 - \gamma^K \nu^2} \left[\left(\tfrac{1}{2} \Gamma^K - \frac{\mu^2}{\nu^2} \right) g + \eta^K \operatorname{ctgh} \eta^K (c_k - c_{k-1}) \right] \right. \\ & \left. - \frac{Q_k^{K+I}}{\mu^2 - \gamma^{K+I} \nu^2} \left[\left(\tfrac{1}{2} \Gamma^{K+I} - \frac{\mu^2}{\nu^2} \right) g + \eta^{K+I} \operatorname{ctgh} \eta^{K+I} (c_k - c_{k+1}) \right] \right\} \\ & + C_{k+1} \frac{e^{\frac{1}{2} g \Gamma^{K+I} (c_k - c_{k+1})} \eta^{K+I} Q_k^{K+I}}{(\mu^2 - \gamma^{K+I} \nu^2) \sinh \eta^{K+I} (c_k - c_{k+1})} = 0 . \end{aligned}\right.$$

Mit leicht verständlichen Abkürzungen können wir diese Gleichung in der folgenden Form schreiben:

$$(6') \qquad E_k C_{k+1} + F_k C_k + G_k C_{k-1} = 0 .$$

Für jede innere Grenzfläche erhalten wir eine Gleichung dieser Form, und somit im ganzen $n - 1$ Gleichungen. Also, wenn wir das vollständige Gleichungssystem von oben anfangend, aufschreiben:

$$(7) \quad \left|\begin{array}{llll} E_{n-1} C_n & + F_{n-1} C_{n-1} & + G_{n-1} C_{n-2} & = 0 , \\ E_{n-2} C_{n-1} & + F_{n-2} C_{n-2} & + G_{n-2} C_{n-3} & = 0 , \\ & & & \\ E_k C_{k+1} & + F_k C_k & + G_k C_{k-1} & = 0 , \\ & & & \\ E_2 C_3 & + F_2 C_2 & + G_2 C_1 & = 0 , \\ E_1 C_2 & + F_1 C_1 & + G_1 C_0 & = 0 , \end{array}\right.$$

wobei noch zu beachten ist, daß $C_n = 0$ und $C_0 = 0$ ist, weil die oberste und die unterste Fläche starr sind. Es ist dies ein System von $n - 1$ homogenen linearen Gleichungen zur Bestimmung der $n - 1$ Größen $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Wenn diese Größen nicht identisch verschwinden sollen, muß die Determinante des Gleichungssystems gleich Null sein:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} F_{n-1} & G_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & & \\ E_{n-2} & F_{n-2} & G_{n-2} & 0 & \ldots & & \\ & & & & & & \\ & & \ldots & E_k & F_k & G_k & \\ & & & & & & \\ & & & & E_2 & F_2 & G_2 \\ & & & & \ldots & E_1 & F_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Es sei nun Δ_k die Unterdeterminante der Größen in einer beliebigen Zeile der Determinante. Die Lösung des linearen Gleichungssystems (7) lautet dann:

$$\frac{C_1}{\Delta_1} = \frac{C_2}{\Delta_2} = \dots \frac{C_k}{\Delta_k} = \dots = \frac{C_{n-1}}{\Delta_n} \tag{9}$$

Diese Gleichungen gestatten uns, $n-2$ der Größen C durch eine einzige, z. B. C_1, auszudrücken:

$$C_m = \frac{\Delta_m}{\Delta_1} C_1, \tag{9'}$$

wo m der Reihe nach die Werte $2, \dots, n-1$ annimmt.

Durch Einsetzen dieser Werte der Größen C in die Ausdrücke (5) findet man die Horizontalamplituden A und die Druckamplituden D, ausgedrückt durch die Vertikalamplitude C_1 der Schwingungen der untersten Diskontinuitätsfläche 1.

Wir haben in den obigen Formeln immer die hyperbolischen Sinusse und Kosinusse geschrieben und somit nichtzellulare Wellenbewegungen innerhalb der einzelnen Schichten ins Auge gefaßt. Die zellularen Bewegungen bleiben aber auch möglich und erscheinen von selbst in den Formeln für eine solche Schicht, für die der Wert von η imaginär ausfällt.

101. Zwei isotherme Schichten zwischen starren Grenzflächen. Die im vorigen Abschnitt entwickelten allgemeinen Formeln wenden wir auf den Fall zweier Schichten an, also $K = I$ und $K = II$.

Die Amplituden in einer beliebigen der beiden Schichten lassen sich dann schreiben:

$$\begin{aligned}
A^K &= \frac{\mu C_1}{(\mu^2 - \gamma^K \nu^2)\sinh\eta^K(c_1 - c_n)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_1)} [\eta^K \cosh\eta^K(c - c_n) \\
&\qquad - g(\gamma^K - \tfrac{1}{2}\Gamma^K)\sinh\eta^K(c - c_n)], \\
C^K &= \frac{C_1}{\sinh\eta^K(c_1 - c_n)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_1)} \sinh\eta^K(c - c_n), \\
D^K &= \frac{\nu^2 C_1}{(\mu^2 - \gamma^K \nu^2)\sinh\eta^K(c_1 - c_n)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma^K (c - c_1)} \Big[\eta^K \cosh\eta^K(c - c_n) \\
&\qquad - g\Big(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma^K\Big)\sinh\eta^K(c - c_n)\Big],
\end{aligned} \tag{1}$$

wo man für die untere Schicht $K = I$, $n = 0$, für die obere $K = II$, $n = 2$ zu setzen hat. Der Bequemlichkeit halber werden wir im Folgenden den oberen Index I weglassen und den Index II durch einen Strich ersetzen.

Es ergibt sich dann die folgende Frequenzengleichung:

$$\begin{aligned}
&\frac{Q_1}{\mu^2 - \gamma\nu^2}\Big[\eta \operatorname{ctgh}\eta(c_1 - c_0) - g\Big(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\Big)\Big] \\
&+ \frac{Q_1'}{\mu^2 - \gamma'\nu^2}\Big[\eta' \operatorname{ctgh}\eta'(c_2 - c_1) + g\Big(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'\Big)\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Wir betrachten zunächst einige Spezialfälle dieser Gleichung.

Im Falle der Homogenität und Inkompressibilität ergeben sich aus (1) und (2) die altbekannten Formeln **92** (1), (2) und (3).

Der Fall einer einzigen Schicht zwischen unbeweglichen starren Ebenen ergibt sich, indem man $c_2 - c_1$ gegen Null konvergieren läßt. Es wird dann $\operatorname{ctgh} \eta'(c_2 - c_1) = \infty$. Das erste Glied in (2) muß dann auch unendlich werden, d. h. es muß entweder

$$\mu^2 - \gamma \nu^2 = 0 \tag{3}$$

sein, was longitudinale Wellen ergibt, oder es muß

$$\operatorname{ctgh} \eta (c_1 - c_0) = \infty, \quad \text{d. h.} \quad \eta (c_1 - c_0) = n \pi i \tag{4}$$

sein, was zellulare Wellen zwischen starren Ebenen ergibt.

Den Fall einer einzigen Schicht mit freier Oberfläche erhält man wieder, wenn $Q' = 0$ gesetzt wird. Die Frequenzengleichung wird in diesem Falle die schon behandelte Gleichung:

$$\eta \operatorname{ctgh} \eta (c_1 - c_0) - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) = 0 . \tag{5}$$

Sind die beiden Schichten von unendlicher Mächtigkeit, d. h. läßt man $c_1 - c_0$ und $c_2 - c_1$ gegen unendlich konvergieren, so strebt der hyperbolische Kotangens gegen 1. Die Amplituden werden dann, indem wir gleichzeitig $c_1 = 0$ setzen:

$$\begin{aligned} A^K &= g\mu \frac{\mp \eta^K + g(\frac{1}{2}\Gamma^K - \gamma^K)}{\mu^2 - \gamma^K \nu^2} C_1 e^{(\mp \eta^K + \frac{1}{2} g \Gamma^K) c}, \\ C^K &= C_1 e^{(\mp \eta^K + \frac{1}{2} g \Gamma^K) c}, \\ D^K &= \nu^2 \frac{\mp \eta^K + g\left(\frac{1}{2}\Gamma^K - \frac{\mu^2}{\nu^2}\right)}{\mu^2 - \gamma^K \nu^2} C_1 e^{(\mp \eta^K + \frac{1}{2} g \Gamma^K) c}, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei das obere Zeichen für die obere Schicht und das untere Zeichen für die untere Schicht zu nehmen ist.

Die Frequenzengleichung wird entsprechend:

$$\frac{Q_1}{\mu^2 - \gamma \nu^2}\left[\eta - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right)\right] + \frac{Q_1'}{\mu^2 - \gamma' \nu^2}\left[\eta' + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'\right)\right] = 0, \tag{7}$$

wo η nach **97** (11'') durch

$$\eta^2 = g^2\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right)^2 + \frac{1}{\nu^4}(\nu^4 - g^2\mu^2)(\mu^2 - \gamma\nu^2) \tag{8}$$

gegeben ist.

Wir bringen zunächst diese Gleichung durch Multiplikation mit dem Ausdruck:

$$S_1 S_1'\left[\eta + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right)\right]\left[\eta' - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'\right)\right],$$

auf eine einfachere Form, wodurch sich ergibt:

$$S_1' \frac{\eta^2 - g^2\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right)^2}{\mu^2 - \gamma\nu^2} \left[\eta' - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)\right.$$

$$+ S_1 \frac{\frac{\iota^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\Big)^2}{\mu^2 - \gamma'\nu^2} \left[\eta + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right)\right] = 0\,.$$

Nach Einführung der Werte von η^2 und η'^2 nach (8) fällt ein Faktor $\mu^2 - \gamma\nu^2$ im Zähler und Nenner des ersten Gliedes und ein Faktor $\mu^2 - \gamma'\nu^2$ im Zähler und Nenner des zweiten Gliedes fort, während beide Glieder den gemeinsamen Faktor $\nu^4 - g^2\mu^2$ enthalten. Dieser Faktor ergibt im allgemeinen *keine* Lösung der Frequenzengleichung (7); dagegen können die beiden LAPLACEschen Schallgeschwindigkeiten Lösungen darstellen, z. B. ist die LAPLACEsche Schallgeschwindigkeit der unteren Schicht eine Lösung bei starker Kompressibilität. Die zugehörigen Integrale sind allerdings nicht von der einfachen Form (6), sondern sind lineare Kombinationen der zwei partikulären, wie sie schon in **98** für den Fall einer unendlichen Schicht untersucht wurden. Wir gehen aber darauf nicht ein und beschränken uns fortan auf die anderen Wurzeln der obigen Gleichung, die jetzt von folgender Form wird:

$$S_1\left[\eta + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right)\right] + S_1'\left[\eta' - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)\right] = 0\,. \tag{9}$$

Diese Gleichung ergibt, wenn man die Werte von η und η' einführt, eine irrationale Relation zwischen μ und ν. Durch die folgende Methode, deren wir uns später auch bedienen werden, kann sie aber auf eine rationale Form gebracht werden. Wir führen eine Hilfsgröße α ein:

$$\alpha = S_1\left[\eta + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right)\right] = S_1'\left[-\eta' + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)\right]. \tag{10}$$

Durch Umordnung und Quadrieren ergibt sich aus diesen beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \alpha^2 - M\alpha - N = 0\,, \\ \alpha^2 - M'\alpha - N' = 0\,, \end{cases} \tag{11}$$

und man hat, nach Einführung der Werte von η bzw. η':

$$\begin{cases} M = 2gS_1\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right), & N = \frac{S_1^2}{\nu^4}(\mu^2 - \gamma\nu^2)(\nu^4 - g^2\mu^2)\,, \\ M' = 2gS_1'\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right), & N' = \frac{S_1'^2}{\nu^4}(\mu^2 - \gamma'\nu^2)(\nu^4 - g^2\mu^2)\,. \end{cases} \tag{12}$$

Durch Elimination von α aus den beiden Gleichungen (11) erhält man die Gleichung:

$$\vartheta = (M - M')(MN' - M'N) - (N - N')^2 = 0\,, \tag{13}$$

welche die gesuchte Relation zwischen μ und ν darstellt.

Für die Atmosphäre ist $\Gamma = \varkappa\gamma$, $(\varkappa = 1{,}403)$, und man hat: $Q_1/Q_1' = \gamma/\gamma'$. Die Gleichung (12) nimmt dann folgende Form an:

$$(1 - 2\varkappa)\, g^2 \mu^2 + 2(\varkappa - 1)\, g^2 \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'}\right)\frac{\mu^4}{\nu^2} + g^2\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}\right)^2 \frac{\mu^6}{\nu^4} \tag{14}$$
$$- \left[\nu^2 - \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'}\right)\mu^2\right]^2 = 0\,,$$

nachdem ein belangloser Faktor, der keine Lösung ergibt, gekürzt worden ist.

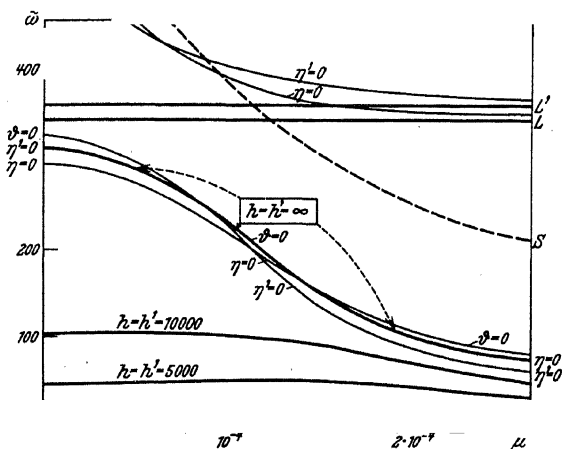



Abb. 43. Frequenzenkurven im $\mu\tilde{\omega}$-Diagramm.

Führt man hier $\nu = \tilde{\omega}\,\mu$ ein, so ergibt sich durch Auflösung dieser Gleichung nach μ:

$$\mu^2 = g^2 \frac{(1 - 2\varkappa)\,\tilde{\omega}^4 + 2(\varkappa - 1)\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'}\right)\tilde{\omega}^2 + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}\right)^2}{\left(-\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}\right)^2} \tag{15}$$

Diese Formel läßt sich für reelles $\tilde{\omega}$ leicht tabulieren oder graphisch darstellen. In einem $\mu\tilde{\omega}$-Diagramm erhält man die Kurve $\vartheta = 0$, Abb. 43, wobei man sich aus Symmetriegründen auf den ersten Quadranten beschränken kann. Von einem Maximalwerte von $\tilde{\omega}$, wenn $\mu = 0$ ist, d. h. für unendliche Wellenlänge, geht sie asymptotisch gegen die Abszissenachse, und zwar oberhalb der kritischen Kurven $\eta = 0$ und $\eta' = 0$, die höchstens berührt werden können.

Bei großen Werten von μ ergeben sich also kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und zwar in erster Annäherung:

$$\mu = -\frac{g}{\tilde{\omega}^2}\,\frac{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'}} = \frac{g}{\tilde{\omega}^2}\,\frac{\gamma - \gamma'}{\gamma + \gamma'}$$

oder, wenn man nach $\tilde{\omega}$ auflöst und die Größen γ und γ' wieder durch die ihnen proportionalen Größen Q_1 und Q_1' ersetzt:

(15a) $$\tilde{\omega}^2 = \frac{g}{\mu}\,\frac{\gamma - \gamma'}{\gamma + \gamma'} = \frac{g}{\mu}\,\frac{Q_1 - Q_1'}{Q_1 + Q_1'}\,.$$

Das ist die schon in **91** (6') gefundene Formel, welche die entsprechende Geschwindigkeit für inkompressible homogene Schichten liefert. Doch muß beachtet werden, daß Q_1 und Q_1' hier die Dichten an der Grenzfläche bedeuten.

Wenn man auch die zweite Näherung berücksichtigt, erhält man aus (15):

(15b) $$\tilde{\omega}^2 = \frac{g}{\mu}\,\frac{\gamma - \gamma'}{\gamma + \gamma'} + \frac{g^2}{\mu^2}\,\frac{\gamma\gamma'}{(\gamma + \gamma')^3}\left[\varkappa(\gamma + \gamma')^2 - 4\gamma\gamma'\right] +$$

Die Näherungsformeln (15a) und (15b) geben bei gegebener endlicher Wellenlänge etwas zu kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im Vergleich zu dem exakten Werte (15). Diese Bemerkung ist für die Theorie der HELMHOLTZschen Wogenwolken von Bedeutung, wo man bisher die vereinfachte Formel (15a), höchstens unter Berücksichtigung der Kompressibilität, nicht aber der Stabilität, zugrunde gelegt hat[1].

Da die Gleichung (15) aus (9) durch Quadrieren hervorgeht, besteht auch die Möglichkeit, daß fremde Wurzeln in (15) und in die gezeichnete Kurve $\vartheta = 0$ dort hineinkommen, wo diese Kurve eine der singulären Kurven $\eta = 0$ oder $\eta' = 0$ berührt.

Die Berührungspunkte ergeben sich aus (15) und der Gleichung für $\eta = 0$ bzw. $\eta' = 0$, die in der folgenden Form geschrieben werden kann:

(16) $$\mu^2 = g^2 \cdot \frac{\varkappa - 1 - \quad \gamma\,\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}^2\left(\frac{1}{\gamma} - \tilde{\omega}^2\right.} \qquad \text{bzw.} \qquad \mu^2 = \frac{\varkappa - 1 - \frac{\varkappa^2}{4}\gamma'\tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}^2\left(\frac{1}{\gamma'} - \tilde{\omega}^2\right)}$$

Durch Elimination von μ^2 erhalten wir für die Ordinaten der Berührungspunkte die Gleichung:

(17) $$\frac{\varkappa}{2}\gamma\tilde{\omega}^4 - \left[\frac{\varkappa}{2}\gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'}\right) - 1\right]\tilde{\omega}^2 + \left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

bzw.

(17') $$\frac{\varkappa}{2}\gamma'\tilde{\omega}^4 - \left[\frac{\varkappa}{2}\gamma'\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'}\right) - 1\right]\tilde{\omega}^2 - \left(\frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{\gamma}\right) = 0\,.$$

Da $\frac{1}{\gamma'} - \frac{1}{\gamma} > 0$ ist, ergeben sich folglich im ersten Quadranten zwei reelle Berührungspunkte mit $\eta = 0$ und ein reeller Berührungspunkt mit $\eta' = 0$, und zwar hat der letzte die größte Ordinate. Links von diesem

---

[1] In einer kürzlich erschienenen Abhandlung von Dr. B. HAURWITZ: Über die Wellenlänge von Luftwogen, Gerlands Beitr. Geophys. 1932, wird dasselbe Problem ausführlicher behandelt.

Berührungspunkte hat die Kurve $\vartheta = 0$ einen negativen η'-Wert und stellt somit keine brauchbare Lösung der ursprünglichen Frequenzengleichung dar. Dasselbe gilt auch für denjenigen Teil der Kurve, der zwischen den beiden Berührungspunkten mit $\eta = 0$ liegt, da er einen negativen η-Wert hat. Die Fortsetzung der wirklichen Frequenzenkurve (in der Abb. 43 dick gezeichnet) an diesen Stellen ist durch $\eta' = 0$ bzw. $\eta = 0$ gegeben, die mit zellularen Wellen unendlicher Zellenhöhe in der oberen bzw. der unteren Schicht verbunden sind.

Im Falle zweier Schichten endlicher Mächtigkeit hat man die vollständige Frequenzengleichung (2), wo man Q_1 und Q_1' durch Γ und Γ' ersetzen kann.

Statt der in **97** betrachteten vier Gebiete hat man hier sechs verschiedene Gebiete, nämlich wo:

$$\mu^2 - \gamma \nu^2 \gtrless 0\,, \qquad \mu^2 - \gamma' \nu^2 \gtrless 0\,,$$
$$\nu^4 - g^2 \mu^2 \gtrless 0\,.$$

In der Abb. 44 sind diese durch A, A', B, B', C, C' gekennzeichnet. Im Gebiete A sind beide Glieder in (2) positiv, weil $\nu^4 - g^2\mu^2 > 0$ und ctgh > 1; dort ist also keine Lösung möglich. Dagegen erhält man Lösungen in den Gebieten, wo die Glieder in (2) verschiedenes Vorzeichen haben können.

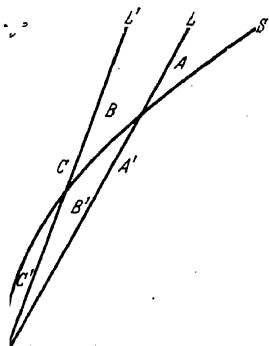



Abb. 44. Hauptgebiete des $\mu^2\nu^2$-Diagramms.

Im Gebiet B ist das erste Glied von (2) im allgemeinen negativ und das zweite immer positiv, im Gebiet B' ist das erste Glied immer negativ und das zweite im allgemeinen positiv. Für $\mu^2 \to \gamma\nu^2$ wird das erste Glied von (2) negativ und sehr groß, das zweite ist immer endlich; für $\mu^2 \to \gamma'\nu^2$ bleibt das erste Glied endlich, während das zweite gegen ∞ strebt. Es muß also die Frequenzengleichung jedenfalls für einen Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega} = \nu/\mu$ befriedigt werden, für den

$$\frac{1}{\gamma} < \tilde{\omega}^2 < \frac{1}{\gamma'}$$

ist.

Wir betrachten diese Wurzel für den Fall eines kleinen Dichtigkeitssprunges und mäßiger Schichtdicken. Es überwiegen dann die ctgh-Glieder in (2), so daß diese mit guter Annäherung die folgende vereinfachte Form annimmt:

$$(18)\quad Q_1(\mu^2 - \gamma'\nu^2)\eta \,\mathrm{ctgh}\,\eta\,(c_1 - c_0) + Q_1'(\mu^2 - \gamma\nu^2)\,\eta' \,\mathrm{ctgh}\,\eta'(c_2 - c_1) = 0\,.$$

Wenn μ endlich und damit auch η endlich bleibt, erhält man für sehr dünne Schichten:

$$\frac{Q_1(\mu^2 - \gamma' \nu^2)}{c_1 - c_0} + \frac{Q_1'(\mu^2 - \gamma \nu^2)}{c_2 - c_1} = 0,$$

woraus sich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wert

$$\tilde{\omega} = \pm \sqrt{\frac{(c_1 - c_0)\,\tilde{\omega}_L^2 + (c_2 - c_1)\,\tilde{\omega}_L'^2}{ - c_0}} \tag{19}$$

ergibt. Dabei bedeuten $\tilde{\omega}_L$ und $\tilde{\omega}'_L$ wie gewöhnlich die LAPLACEschen Schallgeschwindigkeiten der beiden Schichten. Diese Formel zeigt explizite, daß der Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwischen den beiden Schallgeschwindigkeiten liegt. Wenn die Schichtdicken gleich sind, ergibt sich das quadratische Mittel der Schallgeschwindigkeiten, und je mehr die eine Schichtdicke überwiegt, je mehr nähert sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallgeschwindigkeit dieser Schicht.

Wenn wir schließlich zum Überschallgebiet herübergehen, ergeben sich zwar Lösungen im Gebiete C, wo beide Glieder von (2) entgegengesetztes Vorzeichen haben, dagegen keine Lösungen im Gebiete C', weil beide Glieder dort positiv sind.

Von sämtlichen Lösungen für den Fall endlicher Schichtdicken interessiert uns besonders die Lösung im Unterschallgebiet A'.

Wir nehmen zunächst η und η' reell an. Solange μ groß und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit klein bleibt, $\frac{\mu^2}{\nu^2} \gg \gamma$, ist dann in erster Annäherung $\eta = \mu$, so daß sich die Gleichung (2) auf die schon in **92** (3) angegebene Form

$$Q_1 \operatorname{ctgh} \mu (c_1 - c_0) + Q_1' \operatorname{ctgh} \mu (c_2 - c_1) = \frac{g\mu}{\nu^2}(Q_1 - Q_1') \tag{20}$$

reduziert.

Für imaginäre η-Werte lautet die Frequenzengleichung:

$$Q_1(\mu^2 - \gamma'\nu^2)\left[\zeta \operatorname{ctg} \zeta (c_1 - c_0) - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right)\right]$$
$$+ Q_1'(\mu^2 - \gamma\nu^2)\left[\zeta' \operatorname{ctg} \zeta'(c_2 - c_1) + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'\right)\right] = 0.$$

Aus dem Diagramm Abb. 38 wissen wir, daß imaginäre Werte von η und η' im Unterschallgebiet nur für Frequenzen unterhalb der Transversalfrequenz vorkommen können. Nimmt man μ klein an, ferner ν klein im Vergleich zur Transversalfrequenz und $\tilde{\omega}$ klein im Vergleich zu den LAPLACEschen Geschwindigkeiten, so ergibt sich $\zeta = g\sqrt{\Gamma - \gamma}\,\frac{\mu}{\nu}$, und die Frequenzengleichung wird in erster Annäherung.

$$Q_1\sqrt{\Gamma - \gamma}\,\frac{\nu}{\mu} \operatorname{ctg}\left[g\sqrt{\Gamma - \gamma}\,\frac{\mu}{\nu}(c_1 - c_0)\right]$$
$$+ Q_1'\sqrt{\Gamma' - \gamma'}\,\frac{\nu}{\mu} \operatorname{ctg}\left[g\sqrt{\Gamma' - \gamma'}\,\frac{\mu}{\nu}(c_2 - c_1)\right] - Q_1 + Q_1' = 0. \tag{21}$$

Für gegebene Werte der Temperatur und der Schichtdicken kann diese Gleichung nur von einem einzigen Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega} = \nu/\mu$ befriedigt werden, solange die Argumente der Kotangente zwischen 0 und π gelegen sind. Für große Werte von μ geht diese Lösung stetig in die für reelle η-Werte gefundene Lösung (20) über.

Wenn die Argumente der Kotangenten π übertreffen, findet eine Zerlegung in Schichten statt, so daß man eine rein zellulare Wellenbewegung zwischen solidifiierbaren Ebenen erhält.

Wir betrachten schließlich den Fall, wo die beiden Schichten sehr dünn sind, so daß man die Größen $\eta(c_1 - c_0)$ und $\eta'(c_2 - c_1)$ als klein im Vergleich zur Einheit ansehen kann. Man hat dann:

$$\operatorname{ctgh} \eta(c_1 - c_0) = \frac{1}{\eta(c_1 - c_0)} + \cdots, \qquad \operatorname{ctgh} \eta'(c_2 - c_1) = \frac{1}{\eta'(c_2 - c_1)} + \cdots,$$

und die Frequenzengleichung wird:

$$(22)\quad Q_1(\mu^2 - \gamma'\nu^2)\left[\frac{1}{c_1 - c_0} - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right)\right] + Q_1'(\mu^2 - \gamma\nu^2)\left[\frac{1}{c_2 - c_1} + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'\right)\right] = 0.$$

Führt man $\nu = \mu\tilde{\omega}$ ein, so fällt μ aus der Gleichung heraus; wir erhalten also eine von der Wellenlänge unabhängige Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die durch die Gleichung

$$(23)\quad \begin{aligned} &\left[Q_1\gamma'\left(\frac{1}{c_1 - c_0} + \tfrac{1}{2} g\Gamma\right) + Q_1'\gamma\left(\frac{1}{c_2 - c_1} - \tfrac{1}{2} g\Gamma'\right)\right]\tilde{\omega}^4 \\ &-\left[Q_1 g(\tfrac{1}{2}\Gamma + \gamma') + \frac{Q_1}{c_1 - c_0} - Q_1' g(\tfrac{1}{2}\Gamma' + \gamma) + \frac{Q_1'}{c_2 - c_1}\right]\tilde{\omega}^2 + (Q_1 - Q_1')\, g = 0 \end{aligned}$$

gegeben ist. Es ergeben sich also zwei Werte von $\tilde{\omega}^2$. Der eine liegt zwischen den beiden LAPLACEschen Geschwindigkeiten und ist schon in (19) angegeben worden. Der zweite, der klein ist, ergibt sich angenähert durch Vernachlässigung des Gliedes mit $\tilde{\omega}^4$ und Beibehaltung nur derjenigen Glieder im Koeffizienten von $\tilde{\omega}^2$, welche die Schichtdicken im Nenner enthalten, also aus der Gleichung:

$$(24)\qquad \tilde{\omega}^2\left(\frac{Q_1}{(c_1 - c_0)\, g} + \frac{Q_1'}{(c_2 - c_1)\, g}\right) = Q_1 - Q_1',$$

oder aufgelöst:

$$(24')\quad \tilde{\omega}^2 = g\,\frac{(Q_1 - Q_1')\,(c_2 - c_1)\,(c_1 - c_0)}{Q_1(c_2 - c_1) + Q_1'(c_1 - c_0)} = g\,\frac{(S_1' - S_1)\,(c_2 - c_1)\,(c_1 - c_0)}{S_1'(c_2 - c_1) + S_1(c_1 - c_0)}.$$

Bei hinlänglich kleinem Dichtesprung ergibt sich:

$$(24'\text{a})\quad \tilde{\omega}^2 = g\,\frac{(Q_1 - Q_1')\,(c_2 - c_1)\,(c_1 - c_0)}{Q_1(c_2 - c_0)} = g\,\frac{(S_1' - S_1)\,(c_2 - c_1)\,(c_1 - c_0)}{S_1'(c_2 - c_0)}$$

Wenn man in der Formel (24') $c_2 = \infty$ setzt, so erhält man:

$$(24'b) \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{Q_1 - Q_1'}{Q_1} g(c_1 - c_0) = \frac{S_1' - S_1}{S_1} g(c_1 - c_0) = \frac{\theta' - \theta}{\theta'} g(c_1 - c_0),$$

wo im letzten Ausdruck die spezifischen Volumina durch die ihnen proportionalen Temperaturen ersetzt sind.

Diese Gleichungen sind von Γ und γ unabhängig und formell dieselben wie im Falle der inkompressiblen Flüssigkeiten **92** (3a), (3b) und (3'b), nur daß Q_1 und Q_1' hier die Dichten unmittelbar an der Grenzfläche sind, im Falle der Inkompressibilität jedoch irgendwo in der Schicht.

Die der Formel **92** (3a) entsprechende Tabelle S. 318 ist auch für die Formel (24'b) verwendbar. Für Temperatursprünge zwischen 1° und 10° C und Mächtigkeiten der unteren Schicht zwischen 1000 m und 10000 m gibt die Tabelle Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von derselben Größenordnung, wie man sie bei den Zyklonen vorfindet.

Wenn man die genaue Frequenzengleichung zugrunde legt, so findet man Kurven, die sich für große Werte der Schichtmächtigkeiten an die für unendliche Schichten gefundene Frequenzenkurve anschmiegen und sich für kleine Werte der Schichtmächtigkeiten der Abszissenachse nähern. In der Abb. 43 sind zwei solche Kurven eingezeichnet, nämlich für die gleichen Schichthöhen 10000 m und 5000 m.

102. Zwei isotherme Schichten mit freier Oberfläche. Die Lösung für diesen Fall ist in der Lösung des eben behandelten Falles zweier Schichten zwischen starren Grenzflächen implizite enthalten. Zu den Integralen **101** (1) und der Frequenzengleichung **101** (2) kommt als neue Bedingung nur das Verschwinden des Druckes an der freien Oberfläche $c = c_D$ hinzu:

$$(1) \qquad \operatorname{ctgh} \eta'(c_D - c_2) = \frac{g}{\eta'}\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'\right).$$

Dies ist genau die Frequenzengleichung für eine Schicht mit freier Oberfläche von der Dicke $c_D - c_2$. Solange $c_2 - c_1 > 0$, setzt sich also die Schwingung zweier Schichten mit freier Oberfläche aus zwei Partialschwingungen zusammen, nämlich aus der Schwingung zweier Schichten mit starren Grenzflächen im Abstande $c_2 - c_0$ voneinander und aus der Schwingung einer Schicht von der Dicke $c_D - c_2$. Durch graphische Addition der Skalarkurven von $c_2 - c_0 =$ konst. und $c_D - c_2 =$ konst. kann man im $\mu^2\nu^2$- oder im $\mu\tilde{\omega}$-Diagramm die Skalarkurven $c_D - c_0 =$ konst. erhalten. Im Unterschallgebiet, das uns besonders interessiert, entspricht dann bei gegebenen Schichtdicken einer beliebigen Wellenlänge eine und nur eine Frequenz. Es zeigt sich, daß die Amplituden der Schwingungen in der Diskontinuitätsfläche die

Amplituden der mit entgegengesetzter Phase verlaufenden Schwingungen in der freien Oberfläche weit übertreffen. Dementsprechend wollen wir diesen Schwingungstypus die *innere Welle* nennen, wie im Falle der Inkompressibilität, **92**.

Wenn $c_2 - c_1 < 0$, so gibt es in der oberen Schicht kein Niveau mehr, wo die Vertikalamplitude verschwindet. Die Wellenbewegung hat dann einen anderen Charakter; die Diskontinuitätsfläche und die freie Grenzfläche schwingen mit derselben Phase, und zwar mit der größten Amplitude an der Oberfläche. Wir nennen deshalb diesen Schwingungstypus die *äußere Welle*, wie in Falle der Imkompressibilität, **92**.

Auch hier entspricht z. B. im Unterschallgebiet bei gegebenen Schichtdicken jeder beliebigen Wellenlänge eine und nur eine Frequenz. Wenn die beiden Kurvensysteme $c_D - c_2 =$ konst. und $c_2 - c_0 =$ konst. auch für negative $c_2 - c_1$ im Diagramm eingezeichnet wären, könnten wir auch hier die Kurven $c_D - c_0 =$ konst. durch graphische Addition bestimmen. Die Gleichungen (1) und **101** (2) sind aber in diesem Falle nur rein formell gültig; durch Elimination der negativen oder, unter Umständen auch imaginären, Größe $c_2 - c_1$ aus ihnen erhalten wir jedoch eine Frequenzengleichung mit physikalischer Realität. Aus der Formel für den hyperbolischen Kotangens einer Differenz folgt:

$$\operatorname{ctgh} \eta'(c_2 - c_1) = \frac{1 - \operatorname{ctgh} \eta'(c_D - c_1) \operatorname{ctgh} \eta'(c_D - c_2)}{\operatorname{ctgh} \eta'(c_D - c_1) - \operatorname{ctgh} \eta'(c_D - c_2)}.$$

Durch Einführung dieses Wertes in die Gleichung **101** (2) und Berücksichtigung des Wertes (1) von $\operatorname{ctgh} \eta'(c_D - c_2)$ ergibt sich nach einfacher Rechnung:

$$(2)\quad Q_1 \nu^4 \left[\eta \operatorname{ctgh} \eta (c_1 - c_0) - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right)\right] \left[\eta' \operatorname{ctgh} \eta'(c_D - c_1) - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'\right)\right] + Q_1'(\mu^2 - \gamma\nu^2)(\nu^4 - g^2\mu^2) = 0.$$

Auch in den Integralen **101** (1) wäre für die obere Schicht c_2 in derselben Weise durch c_D zu ersetzen.

Es ist unmittelbar klar, daß diese neue Form der Frequenzengleichung nicht nur die Frequenz der äußeren Welle, sondern auch diejenige der inneren ergeben muß.

Bei gegebenen Schichtdicken $c_1 - c_0$ und $c_D - c_1$ und bei gegebener Wellenlänge wird sie also von zwei verschiedenen Frequenzen befriedigt, wie es auch zu erwarten ist, da das schwingende System jetzt zwei Freiheitsgrade hat. Von den beiden Frequenzen ist diejenige der äußeren Welle die größere.

Bei unendlicher Mächtigkeit beider Schichten streben die hyperbolischen Kotangenten gegen 1, und die Frequenzengleichung (2) wird:

$$(3)\quad Q_1 \nu^4 \left[\eta - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right)\right] \left[\eta' - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma'\right)\right] + Q_1'(\mu^2 - \gamma\nu^2)(\nu^4 - g^2\mu^2) = 0.$$

Ohne daß neue Wurzeln hereinkommen, ergibt sich durch Multiplikation mit der im allgemeinen positiven Größe $\eta' + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)$ unter Berücksichtigung von **101** (8):

$$(3') \quad \begin{aligned} &(\nu^4 - g^2\mu^2)\Big\{Q_1(\mu^2 - \gamma'\nu^2)\left[\eta - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right)\right] \\ &\qquad + Q_1'(\mu^2 - \gamma\nu^2)\left[\eta' + g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)\right]\Big\} = 0 . \end{aligned}$$

Durch Nullsetzen des ersten Faktors ergibt sich die STOKESsche Geschwindigkeit, welche der äußeren Welle entspricht, während man durch Nullsetzen des zweiten Faktors die Frequenzengleichung **101** (7) für zwei unendliche Schichten zwischen starren Grenzflächen, also die innere Welle, erhält.

In derselben Weise wie im vorigen Abschnitt kann man zeigen, daß in den Gebieten A', B, B' und C (Abb. 44) Lösungen möglich sind. Im Unterschallgebiet A' gehen die Kurven $c_D - c_0 =$ konst., wenn μ wächst, teils gegen die Abszissenachse (innere Welle), teils gegen die STOKESsche Parabel (äußere Welle).

Wenn beide Schichten sehr dünn sind, können wir die hyperbolischen Kotangenten in (2) entwickeln und erhalten:

$$(4) \quad Q_1\nu^4\left[\frac{1}{c_1-c_0} - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right)\right]\left[\frac{1}{c_D-c_1} - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)\right] + Q_1'(\mu^2 - \gamma\nu^2)(\nu^4 - g^2\mu^2) = 0 .$$

Die Einführung von $\tilde{\omega} = \nu/\mu$ und die Auflösung nach μ^2 ergibt die Formel:

$$(4') \quad \mu^2 = \frac{-Q_1\left(\frac{1}{c_1-c_0} + \frac{1}{2}g\Gamma\right)\left(\frac{1}{c_D-c_1} + \frac{1}{2}g\Gamma'\right)\tilde{\omega}^4 + \left\{Q_1\left[\frac{1}{c_1-c_0} + \frac{1}{c_D-c_1} + \frac{1}{2}g(\Gamma+\Gamma')\right] - Q_1' g\gamma\right\} g\tilde{\omega}^2 - (Q_1 - Q_1')}{Q_1'\tilde{\omega}^4(1-\gamma\tilde{\omega}^2)}$$

die leicht zu tabulieren ist. Wir erhalten drei verschiedene Kurvenzüge in der $\mu^2\tilde{\omega}^2$-Ebene. Der eine verläuft im Überschallgebiet und hat die Ordinatenachse und die Schallgeschwindigkeitsgerade $\tilde{\omega}^2 = 1/\gamma$ als Asymptoten. Die beiden anderen verlaufen im Unterschallgebiet und schneiden die Ordinatenachse in den Nullpunkten der Zähler von (4). Für diese Nullpunkte ergibt sich in erster Annäherung:

$$(5) \quad -Q_1\frac{\tilde{\omega}^4}{(c_D-c_1)(c_1-c_0)} + Q_1\frac{c_D-c_0}{(c_D-c_1)(c_1-c_0)}g\tilde{\omega}^2 - (Q_1 - Q_1')g^2 = 0 ,$$

oder aufgelöst:

$$(5') \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{1}{2}g(c_D - c_0) \pm g\sqrt{\frac{1}{4}(c_D-c_0)^2 - \frac{Q_1-Q_1'}{Q_1}(c_D-c_1)(c_1-c_0)} ,$$

oder auch:

$$(5'') \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{1}{2}g(c_D - c_0) \pm g\sqrt{\frac{1}{4}(c_D - 2c_1 + c_0)^2 + \frac{Q_1'}{Q_1}(c_D-c_1)(c_1-c_0)} .$$

Hieraus folgt, daß die beiden Wurzeln immer reell sind; die größere Wurzel entspricht der äußeren Welle, die kleinere der inneren Welle.

Bei sehr kleinem Dichtesprung ergibt sich für die äußere Welle angenähert:

$$\tilde{\omega}^2 = g(c_D - c_0)\,, \tag{6}$$

also die LAGRANGEsche Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen auf seichtem Wasser. Für die innere Welle ergibt sich:

$$\tilde{\omega}^2 = g\,\frac{\varrho_1 - \varrho_1'}{\varrho_1}\,\frac{(c_D - c_1)\,(c_1 - c_0)}{c_D - c_0} \tag{7}$$

also dieselbe Formel wie im Falle zweier dünner Schichten zwischen starren Grenzflächen, **101** (24′a).

Die Gleichung (4′) gestattet den Verlauf dieser beiden Wurzeln auch für mäßige Werte von μ^2 zu bestimmen, nicht aber für sehr große Werte. Denn η und η' gehen dann gegen μ, und wir können die hyperbolischen Kotangenten nicht mehr entwickeln. Für sehr große μ-Werte ist jedoch $\tilde{\omega}$ klein, und (2) schreibt sich angenähert:

$$\begin{cases} [\varrho_1 \operatorname{ctgh}\mu(c_D - c_1)\operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0) + \varrho_1']\,\tilde{\omega}^4 \\ -\dfrac{g}{\mu}\,\varrho_1[\operatorname{ctgh}\mu(c_D - c_1) + \operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0)]\,\tilde{\omega}^2 + \dfrac{g^2}{\mu^2}(\varrho_1 - \varrho_1') = 0\,. \end{cases} \tag{8}$$

Durch eine weitere Näherung folgt dann für die große Wurzel (äußere Welle) im Falle eines kleinen Dichtesprunges:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{g}{\mu}\,\varrho_1\,\frac{\operatorname{ctgh}\mu(c_D - c_1) + \operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0)}{\varrho_1\operatorname{ctgh}\mu(c_D - c_1)\operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0) + \varrho_1'} \tag{9}$$

oder, wenn man ϱ_1' im Nenner durch ϱ_1 ersetzt:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{g}{\mu}\operatorname{tgh}\mu(c_D - c_0)\,, \tag{9′}$$

d. h. dieselbe Formel wie im Falle der Inkompressibilität. Für kleine Argumente des hyperbolischen Tangens erhält man wieder die LAGRANGEsche Formel.

Die kleine Wurzel (innere Welle) wird angenähert:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{g}{\mu}\,\frac{\varrho_1 - \varrho_1'}{\varrho_1}\,\frac{1}{\operatorname{ctgh}\mu(c_D - c_1) + \operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0)}\,; \tag{10}$$

sie ist also auch durch dieselbe Formel wie im Falle der Inkompressibilität bestimmt. Für kleine Werte des Argumentes reduziert sich diese Formel auf (7).

103. Vertikalschwingungen einer Atmosphäre mit linearem Temperaturfeld. Wir betrachten schließlich den Fall **94** (III) der Schwingungen und Wellenbewegungen einer Atmosphäre mit linearem Temperaturfeld[1]. Der statische Gleichgewichtszustand für diesen Fall ist

[1] Probleme dieser Art sind zum ersten Male von HORACE LAMB: On Atmospheric Oscillations, Proc. Roy. Soc. London 1911, behandelt worden.

schon früher in **28** behandelt worden, und die Gleichungen der Wellenlösung wurden in **94** auseinandergesetzt. Es erweist sich hier als zweckmäßig, bei der Integration die Differentialgleichung der Druckamplitude zugrunde zu legen. Diese lautet nach **94** (4c) für den zuerst zu behandelnden Fall der Vertikalschwingungen ($\mu = 0$):

$$\frac{d^2 D}{d c^2} - g\Gamma \frac{dD}{dc} + \left(\gamma \nu^2 - g \frac{d\Gamma}{dc}\right) D = 0 \,. \tag{1}$$

Wenn D hieraus gefunden ist, bestimmt sich C aus der Gleichung:

$$C = \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{dD}{dc} - g\Gamma D\right). \tag{2}$$

Wir legen die horizontale Koordinatenebene in die obere Grenze $c = H_L$ der Atmosphäre und wählen die Vertikalkoordinate ζ positiv nach unten:

$$\zeta = H_L - c = \frac{R\Theta_0}{g(1-m)} - c \,. \tag{3}$$

Nach **28** (17) haben dann die inneren Konstanten der Atmosphäre die folgenden Werte:

$$\Gamma = \frac{m}{g(1-m)\zeta}\,, \qquad \gamma = \frac{1}{\varkappa g(1-m)\zeta}\,, \tag{4}$$

wodurch (1) ergibt:

$$\zeta \frac{d^2 D}{d\zeta^2} + \frac{m}{1-m}\frac{dD}{d\zeta} + \frac{1}{1-m}\left(\frac{\nu^2}{\varkappa g} - \frac{m}{\zeta}\right) D = 0 \,.$$

Durch Einführung der neuen Variablen:

$$\zeta = \tau^2\,, \qquad D = \zeta^{\frac{\frac{1}{2} - m}{1-m}}\, \overline{D}\,,$$

läßt sich diese Gleichung auf die Besselsche Differentialgleichung zurückführen:

$$\tau^2 \frac{d^2\overline{D}}{d\tau^2} + \tau \frac{d\overline{D}}{d\tau} + \left[-\left(\frac{1}{1-m}\right)^2 + \frac{4\nu^2\tau^2}{\varkappa g(1-m)}\right] \overline{D} = 0 \,.$$

Wegen des Verschwindens des Störungdruckes für $\tau = 0$ ist die Lösung durch die Besselsche Funktion der Ordnung $1/(1-m)$ und des Argumentes $\frac{2\nu\tau}{\sqrt{\varkappa g(1-m)}}$ gegeben, oder indem wir zu den ursprünglichen Variablen zurückkehren:

$$D = D_0 \zeta^{\frac{\frac{1}{2} - m}{1-m}} J_{\frac{1}{1-m}}\left(2\nu \sqrt{\frac{\zeta}{\varkappa g(1-m)}}\right). \tag{5}$$

Aus (2) folgt dann für die Vertikalamplitude:

$$C = -\frac{D_0}{\nu\sqrt{\varkappa g(1-m)}}\, \zeta^{-\frac{m}{2(1-m)}} J_{\frac{m}{1-m}}\left(2\nu\sqrt{\frac{\zeta}{\varkappa g(1-m)}}\right). \tag{6}$$

Diese verschwindet an den Nullstellen der BESSELschen Funktion; wir erhalten also eine zellulare Schwingungsbewegung mit nach oben veränderlicher Zellenhöhe. Diese stehende Schwingung kann auch in üblicher Weise in zwei sich nach oben bzw. nach unten fortpflanzende Wellen gleicher Amplitude zerlegt werden.

Für sehr große Werte des Argumentes und mäßige Werte der Ordnung verhält sich die BESSELsche Funktion angenähert wie eine Kosinusfunktion; es ist nämlich dann:

$$J_\lambda(\xi) \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{2\lambda+1}{4}\pi\right). \tag{7}$$

Hieraus folgt: $\xi(c - H) - \xi(c) = 2\pi$, wo H die doppelte Zellenhöhe darstellt. Da diese im Vergleich zu c klein ist, ergibt sich angenähert:

$$-\frac{d\xi}{dc} H = 2\pi.$$

Nun ist aber:

$$\xi = \frac{2\nu}{g(1-m)} \sqrt{\frac{R\Theta_0 - g(1-m)c}{\varkappa}},$$

d. h. es wird:

$$H = \frac{2\pi}{\nu} \sqrt{\varkappa R\Theta_0 - \varkappa g(1-m)c} = \frac{2\pi}{\nu} \sqrt{\frac{1}{\gamma}} = \tilde{\omega}_L T. \tag{8}$$

H ist also die Strecke, die eine vertikal sich fortpflanzende Schallwelle während der Periode T zurücklegt, wobei die Schallgeschwindigkeit nach oben abnimmt, weil man in kältere Luft gelangt. Die Formel (8) gilt aber nur für kleine Zellenhöhen, d. h. wieder für kleine Perioden.

Wenn m nahezu gleich 1 ist, erhält man eine BESSELsche Funktion von sehr hoher Ordnung; es gilt dann die folgende asymptotische Entwicklung für große Werte des Argumentes:

$$J_\lambda(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\xi^2 - \lambda^2)^{-\frac{1}{4}} \cos\left\{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2} - \lambda \arccos\frac{\lambda}{\xi} - \frac{\pi}{4}\right\}. \tag{9}$$

Ganz ähnlich wie oben erhalten wir hieraus:

$$2\pi = -H \frac{d}{dc}\left\{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2} - \lambda \arccos\frac{\lambda}{\xi}\right\} = -H \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\xi^2}} \frac{d\xi}{dc}.$$

Führen wir hier für die Parameter ihre Werte ein:

$$\lambda = \frac{m}{1-m}, \qquad \xi = \frac{2\nu}{\varkappa g(1-m)} \sqrt{\frac{1}{\gamma}}, \qquad \frac{d\xi}{dc} = -\nu\sqrt{\gamma},$$

so ergibt sich:

$$H\sqrt{\nu^2\gamma - \frac{m^2}{4} g^2 \Gamma^2} = 2\pi. \tag{10}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der für Isothermie ($m = 1$) gefundenen Relation **95** (5) überein.

104. Wellenbewegungen einer Atmosphäre mit linearem Temperaturfeld. Für den Fall der Wellenlösung ist die Differentialgleichung der Druckamplitude D nach **94** (4c):

$$(1)\quad \frac{d^2 D}{dc^2} - g\Gamma\frac{dD}{dc} + \left[-\mu^2 + \gamma\nu^2 + g^2(\Gamma-\gamma)\frac{\mu^2}{\nu^2} - g\frac{d\Gamma}{dc}\right]D = 0\,.$$

Wir führen wieder die Variable ζ in der Vertikalen ein:

$$(2)\qquad \zeta = H_L - c = \frac{R\Theta_0}{g(1-m)} - c\,,$$

wodurch (1), unter Berücksichtigung von **103** (4), ergibt:

$$\zeta^2\frac{d^2 D}{d\zeta^2} + \frac{m}{1-m}\zeta\frac{dD}{d\zeta} + \left[-\mu^2\zeta^2 + \frac{\nu^2 + g^2(m\varkappa-1)\frac{\mu^2}{\nu^2}}{\varkappa g(1-m)}\zeta - \frac{m}{1-m}\right]D = 0\,.$$

Da diese Differentialgleichung eine dreigliedrige Rekursionsformel besitzt, empfiehlt es sich, zunächst eine neue abhängige Variable Φ einzuführen durch:

$$(3)\qquad D = e^{\mu\zeta}\zeta\,\Phi(\zeta)\,,$$

wodurch die Differentialgleichung übergeht in:

$$(4)\quad \zeta\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} + \left(2\mu\zeta + \frac{2-m}{1-m}\right)\frac{d\Phi}{d\zeta} + \left[\frac{2-m}{1-m}\mu + \frac{\nu^2 + g^2(m\varkappa-1)\frac{\mu^2}{\nu^2}}{\varkappa g(1-m)}\right]\Phi = 0\,.$$

Diese Gleichung hat eine zweigliedrige Rekursionsformel und gestattet folglich eine einfache Integration durch Reihenentwicklung nach Potenzen von ζ. Sie ist übrigens von dem Typus der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung. (Siehe z. B. WHITTAKER and WATSON: Modern Analysis, 1927, S. 337.) Zur Abkürzung schreiben wir:

$$(5)\qquad \frac{2-m}{1-m} = n\,,\qquad \frac{2-m}{1-m} + \frac{\nu^2 + g^2(\varkappa m-1)\frac{\mu^2}{\nu^2}}{\mu\varkappa g(1-m)} = 2\alpha\,.$$

Da $1 \geqq m \geqq 0$ ist, wird $\infty \geqq n \geqq 2$. Das eine partikuläre Integral, das im Nullpunkt endlich und von Null verschieden ist, ist durch die konfluente hypergeometrische Reihe gegeben:

$$(6)\quad \begin{aligned}\Phi_{\alpha,n} = 1 &- \frac{\alpha}{1\,.\,n}2\mu\zeta + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,n(n+1)}(2\mu\zeta)^2 - \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+r-1)}{1\,.\,2\ldots r:n(n+1)\ldots(n+r-1)}(-2\mu\zeta)^r + \cdots\end{aligned}$$

die für alle endlichen ζ konvergiert. Das andere partikuläre Integral ist:

$$(7)\quad \begin{aligned}\zeta^{1-n}\Phi_{\alpha-n+1,\,2-n} = \zeta^{1-n}\Big\{1 &- \frac{\alpha-n+1}{1\,.\,(2-n)}2\mu\zeta + \frac{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)}{1\,.\,2\,.\,(2-n)(3-n)}(2\mu\zeta)^2 \\ &- \cdots + \frac{(\alpha-n+1)\ldots(\alpha-n+r)}{1\ldots r\,.\,(2-n)\ldots(r+1-n)}(-2\mu\zeta)^r + \cdots\Big\}\end{aligned}$$

und ist also im Nullpunkt unendlich, da $1 - n < 0$ ist. Das allgemeine Integral ist durch eine lineare Kombination dieser beiden partikulären Integrale gegeben. Wenn wir zu der Druckamplitude zurückkehren, ergibt sich also:

$$D = e^{\mu\zeta}\zeta\{D_1\Phi_{\alpha,n} + D_2\zeta^{1-n}\Phi_{\alpha-n+1,2-n}\}. \tag{8}$$

Mit diesem Werte der Druckamplitude folgt dann schließlich aus **94** (5c) für die Horizontalamplitude:

$$\begin{aligned} A = \frac{\mu e^{\mu\zeta}}{\nu^4 - g^2\mu^2}\Big\{&D_1[\zeta(\nu^2 - g\mu)\Phi_{\alpha,n} - g(n-1)\Phi_{\alpha,n-1}] \\ &+ D_2\zeta^{2-n}\cdot\Big[(\nu^2 - g\mu)\Phi_{\alpha-n+1,2-n} + 2\mu g\frac{\alpha-n+1}{2-n}\Phi_{\alpha-n+2,3-n}\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{9}$$

und für die Vertikalamplitude:

$$\begin{aligned} C = -\frac{e^{\mu\zeta}}{\nu^4 - g^2\mu^2}\Big\{&D_1[\mu\zeta(\nu^2 - g\mu)\Phi_{\alpha,n} + \nu^2(n-1)\Phi_{\alpha,n-1}] \\ &+ D_2\mu\zeta^{2-n}\Big[(\nu^2 - g\mu)\Phi_{\alpha-n+1,2-n} - 2\nu^2\frac{\alpha-n+1}{2-n}\Phi_{\alpha-n+2,3-n}\Big]\Big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Wir begnügen uns damit, die Schwingungen der ganzen Atmosphäre von der Höhe H_L zu untersuchen. Wegen des Verschwindens des Störungsdruckes an der freien Oberfläche, $\zeta = 0$, muß dann nach (8) $D_2 = 0$ sein. Das Verschwinden der Vertikalamplitude an der unteren Begrenzung der Atmosphäre, $\zeta = H_L$, ergibt sodann die folgende Frequenzengleichung:

$$\mu H_L(\nu^2 - g\mu)\Phi_{\alpha,n}(2\mu H_L) + \nu^2(n-1)\Phi_{\alpha,n-1}(2\mu H_L) = 0, \tag{11}$$

oder explizite geschrieben:

$$\begin{aligned} &\mu H_L(\nu^2 - g\mu)\left[1 - \frac{\alpha}{1.n}2\mu H_L + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.n(n+1)}(2\mu H_L)^2 - \cdots\right] \\ &+\nu^2(n-1)\left[1 - \frac{\alpha}{1.(n-1)}2\mu H_L + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2.(n-1)n}(2\mu H_L)^2 - \cdots\right] = 0. \end{aligned} \tag{11'}$$

Sie gestattet uns, in Verbindung mit (5) die Frequenz bei gegebenem μ zu bestimmen.

Wir betrachten nur den Fall langer Wellen, $\mu \to 0$. Es sei die Atmosphäre zunächst in adiabatischem Gleichgewicht, $m = 1/\varkappa$. Nach (5) wird dann $2\alpha = n + \frac{\mu\bar{\omega}^2}{(\varkappa - 1)g}$, und es bleibt somit endlich bei endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Die beiden Φ-Funktionen reduzieren sich also auf 1 für $\mu \to 0$, und die Frequenzengleichung ergibt:

$$-gH_L + \bar{\omega}^2(n-1) = 0.$$

Da die Höhe der homogenen Atmosphäre $H_H = \frac{R\Theta_0}{g} = \frac{H_L}{n-1}$ ist, erhalten wir auch:

$$\tilde{\omega}^2 = g H_H = R\Theta_0 . \tag{12}$$

In einer Atmosphäre in adiabatischem Gleichgewicht pflanzen sich folglich lange Wellen mit einer Geschwindigkeit fort, die gleich der NEWTON*schen Schallgeschwindigkeit am Erdboden ist.*

Wenn die Wellen von endlicher Länge sind und das Gleichgewicht nicht gerade das konvektive ist, müssen in den Reihenentwicklungen der Φ-Funktionen mehrere Glieder berücksichtigt werden. Wenn die Reihen gut konvergieren, kann die Frequenzengleichung (11′) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{\tilde{\omega}^2}{g H_H} = 1 + \frac{2\alpha - n}{n} \mu H_H + \frac{2(2\alpha - n)^2 - n(n-1)}{n(n+1)} \mu^2 H_H^2 + \cdots , \tag{13}$$

wo die rechte Seite eine nach steigenden Potenzen der kleinen Größe μH_H entwickelte Reihe darstellt. Nun ist aber nach (5):

$$2\alpha = n + \frac{\tilde{\omega}^2}{g} \frac{n-1}{\;} \mu + \frac{g}{\tilde{\omega}^2} \frac{n-1}{\varkappa \mu} (\varkappa m - 1) ;$$

durch Einsetzen des Ausdruckes (13) ergibt sich hieraus in erster Näherung:

$$2\alpha - n = \frac{n-1}{n} \frac{2\varkappa + n - 1}{\varkappa^2 \mu H_H} \left[\frac{n-1}{n} \frac{2\varkappa - 1}{\varkappa} \mu^2 H_H^2 + (\varkappa m - 1) + \right.$$

Der Klammerausdruck stellt die beiden ersten Glieder einer nach $\mu^2 H_H^2$ und $\varkappa m - 1$ entwickelten Doppelreihe dar. Mit diesem Wert von $2\alpha - n$ folgt dann schließlich aus (13):

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\omega}^2}{g H_H} = 1 - (n-1) &\left[\frac{1}{n+1} - \frac{(n-1)(2\varkappa + n - 1)(2\varkappa - 1)}{n^3 \varkappa^3} \right] \mu^2 H_H^2 \\ &+ \frac{(n-1)(2\varkappa + n - 1)}{n^2 \varkappa^2} (\varkappa m - 1) + \cdots . \end{aligned} \tag{14}$$

Aus dem zweiten Gliede der Doppelreihe rechts scheint hervorzugehen, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Wellenlänge abnimmt. Um dies endgültig entscheiden zu können, müssen jedoch Glieder mit höheren Potenzen von μH_H mitberücksichtigt werden, da die Reihe in μH_H weniger gut konvergiert.

Das dritte Glied rechts in (14) ist bei stabilem Gleichgewicht, $m > 1/\varkappa$, immer positiv, d. h. bei gegebener Wellenlänge wächst die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Barotropiekonstanten m. Diese Zunahme ist jedoch gering; beispielsweise ist das dritte Glied gleich 0,07 für $m = 0{,}8$ und gleich 0,14 für $m = 0{,}9$. Die Reihe nach $\varkappa m - 1$ konvergiert sehr gut, solange m nicht nahe an 1 liegt; nur zwei Glieder der Reihe genügen, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit guter Annäherung zu bestimmen. Wenn wir uns wieder auf den Fall langer

Wellen, $\mu \to 0$, beschränken, läßt sich die Reihe sogar summieren, und hierdurch eröffnet sich ebenfalls eine Möglichkeit, den Grenzfall $m \to 1$ zu bewältigen, der mit Hilfe der Formel (14) nicht behandelt werden kann.

Für $\mu \to 0$ reduzieren sich nämlich die Φ-Funktionen auf Besselsche Funktionen:

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha,n} &= 1 - \frac{2\alpha\mu\zeta}{1 \cdot n} + \frac{(2\alpha\mu\zeta)^2}{1 \cdot 2 \cdot n(n+1)} - \cdots \\ &= \Pi(n-1)\,(2\alpha\mu\zeta)^{-\frac{n-1}{2}} J_{n-1}\left(2\sqrt{2\alpha\mu\zeta}\right),\end{aligned} \tag{15}$$

mit einem entsprechenden Ausdruck für $\Phi_{\alpha,n-1}$. Aus der Frequenzengleichung (11) folgt dann, indem wir uns erinnern, daß für die Gausssche Π-Funktion die Relation

$$\Pi(n-1) = (n-1)\,\Pi(n-2)$$

besteht:

$$-gH_L J_{n-1}\left(2\sqrt{2\alpha\mu H_L}\right) + \tilde{\omega}^2 \sqrt{2\alpha\mu H_L}\, J_{n-2}\left(2\sqrt{2\alpha\mu H_L}\right) = 0 \tag{16}$$

Hier ist:

$$2\alpha\mu H_L = \frac{(n-1)(\varkappa m - 1)}{\tilde{\omega}^2 \varkappa}\, g H_L. \tag{17}$$

Aus den beiden letzten Formeln kann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für jeden beliebigen Wert von m bestimmt werden. So findet man z. B. für $m = 0{,}8$: $\tilde{\omega}^2 = 1{,}077\, g H_H$ und für $m = 0{,}9$: $\tilde{\omega}^2 = 1{,}186\, g H_H$.

Wenn m gegen 1, d. h. n gegen ∞ strebt, wachsen die Ordnung und das Argument der Besselschen Funktionen gleichzeitig über alle Grenzen, und die Funktionen können durch die asymptotischen Entwicklungen **103** (9) ersetzt werden. Das Verhältnis zweier Besselscher Funktionen, deren Ordnung sich um Eins unterscheidet, ist somit für unendliches λ und ξ durch

$$\frac{J_{\lambda-1}(\xi)}{J_\lambda(\xi)} = \frac{\cos\left(\sqrt{\xi^2 - (\lambda-1)^2} - (\lambda-1)\arccos\frac{\lambda-1}{\xi} - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\sqrt{\xi^2 - \lambda^2} - \lambda\arccos\frac{\lambda}{\xi} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

gegeben. Wenn wir zur Abkürzung das Argument des Nenners mit φ bezeichnen, so wird das Argument des Zählers gleich $\varphi + \arccos\frac{\lambda}{\xi}$, und wir erhalten:

$$\frac{J_{\lambda-1}(\xi)}{J_\lambda(\xi)} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\xi^2}}\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Da es sich zeigt, daß $\lambda > \xi$ ist, können wir $\varphi = i\psi - \frac{\pi}{4}$ setzen, wo ψ reell und sehr groß ist; es wird dann:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}\left(i\psi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{i\,\mathrm{tgh}\,\psi - 1}{1 + i\,\mathrm{tgh}\,\psi} = i,$$

und wir erhalten schließlich:

$$\frac{J_{\lambda-1}(\xi)}{J_\lambda(\xi)} = \frac{\lambda}{\xi} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{\xi^2} - 1} \tag{18}$$

In Gleichung (16) eingesetzt, folgt dann, da $\lambda = n - 1$ und $\xi = 2\sqrt{2\alpha\mu H_L}$ ist:

$$-g H_L + \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}^2\left\{n - 1 + \sqrt{(n-1)^2 - 8\alpha\mu H_L}\right\} = 0,$$

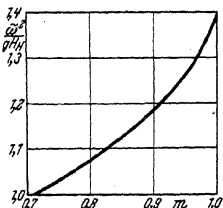



Abb. 45. $\tilde{\omega}$ als Funktion des Temperaturgradienten.

woraus sich durch Quadrieren und Berücksichtigung von (17) die folgende Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt:

$$\tilde{\omega}^2 = \varkappa g H_H = \varkappa R \Theta_0 = \frac{1}{\gamma}. \tag{19}$$

Wir erhalten also das einfache Resultat, wie es aus der Abb. 45 ersichtlich ist:

In einer Atmosphäre mit linearem Temperaturfeld hat die Fortpflanzungsgeschwindigkeit langer Wellen bei indifferentem Gleichgewicht ihren Minimalwert, der gleich der NEWTON*schen Schallgeschwindigkeit ist. Bei zunehmender Stabilität nimmt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit stetig zu und erreicht schließlich bei Isothermie ihren Maximalwert, der gleich der* LAPLACE*schen Schallgeschwindigkeit ist.*

Neuntes Kapitel.

Störungen gradliniger Bewegungen.

105. Wellenlösung bei gradliniger Grundströmung. Von den Störungen einfacher Gleichgewichtszustände gehen wir jetzt zur Untersuchung der Störungen einfacher Bewegungszustände über, und zwar solcher, bei denen sich die Flüssigkeit in gradliniger, horizontaler Translation befindet. Wir brauchen dabei jetzt die Diskussionen nicht mehr mit derselben Ausführlichkeit wie oben durchzuführen. Es genügt, die unter den verallgemeinerten Verhältnissen auftretenden geringen Modifikationen der schon gefundenen Resultate ganz summarisch zu behandeln, während das Hauptgewicht auf die Diskussion aller prinzipiell neuen Erscheinungen gelegt werden soll.

Zunächst sind einige grundlegende Betrachtungen elementarer Natur anzustellen.

Wir werden uns bei den folgenden Untersuchungen je nach den Umständen in der Lage zweier verschiedener Beobachter zu denken haben: in der Lage eines ruhenden Beobachters und in der Lage eines Beobachters, der die gradlinige Grundbewegung mitmacht. Diese beiden

Beobachter schreiben den vorbeiziehenden Störungen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zu, deren Unterschied die Relativgeschwindigkeit U zwischen dem ruhenden und bewegten Beobachter ist. Es gilt:

$$\tilde{\omega} = U + \tilde{\omega}_r\,, \tag{1}$$

wobei $\tilde{\omega}$ die absolute Fortpflanzungsgeschwindigkeit und $\tilde{\omega}_r$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit relativ zur Grundströmung ist.

Wenn die Störung eine periodische Funktion ist und folglich Wellencharakter hat, nehmen die beiden Beobachter verschiedene Wellenfrequenzen wahr. Während der ruhende Beobachter die Frequenz ν findet, die wir *Lokalfrequenz* nennen können, findet der bewegte Beobachter die Frequenz $\nu - U\mu$, die wir *Orbitalfrequenz* nennen. Ein ruhender Beobachter sieht in 2π Sekunden eine Anzahl von Wellen vorüberziehen, die gleich der Lokalfrequenz ist, ein mit der Grundströmung mitgeführter Beobachter nimmt jedoch in derselben Zeit eine Anzahl von Wellen, d. h. eine Anzahl von Umläufen der Teilchen, wahr, die gleich der Orbitalfrequenz ist.

Es sei der Grundzustand eines Teilchens mit den Numerierungskoordinaten a, b, c zur Zeit t durch die Gleichungen

$$X = a + Ut\,, \quad Y = b\,, \quad Z = c \tag{2}$$

definiert (wo U zeitlich wie räumlich konstant ist), so daß die Translation in Richtung der a-Achse vor sich geht. Eine in der a-Richtung periodische Störung dieses Grundzustandes, die sich relativ zum ruhenden Beobachter mit der Geschwindigkeit $\tilde{\omega}$ fortpflanzt, enthält als Faktor eine trigonometrische Funktion von

$$X - \tilde{\omega} t = a - (\tilde{\omega} - U)t\,. \tag{3}$$

Es sind also die früheren Sinus- und Kosinusausdrücke von $\mu a - \nu t$ durch dieselben Sinus- und Kosinusausdrücke von $\mu a - (\nu - U\mu)t$ zu ersetzen. Statt der früheren Frequenz ν, die mit gleichem Recht als Lokalfrequenz oder Orbitalfrequenz bezeichnet werden könnte, tritt somit hier die Orbitalfrequenz $\nu - U\mu$ auf.

Für eine zweidimensionale, von b unabhängige Störungsbewegung, die y nicht enthält, ergibt sich folglich:

$$\begin{aligned} x &= A(c)\cos[\mu a - (\nu - U\mu)t]\,, \\ z &= C(c)\sin[\mu a - (\nu - U\mu)t]\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Hieraus erhält man für die von dem bewegten Beobachter wahrgenommene *Orbitalbahn* eines Teilchens:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{}{C^2} = 1 \tag{5}$$

sie ist also wie im Falle des Gleichgewichtes eine Ellipse.

Die Umlaufsrichtung in der Orbitalbahn ist abhängig davon, ob sich die Welle schneller oder langsamer als der Beobachter bewegt, d. h. ob $\tilde{\omega} \gtrless U$ ist. Für positive A und C ist die Umlaufsrichtung positiv für $\tilde{\omega} > U$ und negativ für $\tilde{\omega} < U$. Im Grenzfall $\tilde{\omega} = U$ fällt t aus der Gleichung (4) heraus; es verschwindet dann jede Wellenbewegung und damit auch der Umlauf in der Orbitalbahn. Die Störung besteht nur in einer Veränderung der Koordinaten X und Z um zeitlich konstante Beträge x und z.

Die wirklichen Bahnen der Teilchen, wie sie von dem ruhenden Beobachter wahrgenommen werden, ergeben sich durch Zusammensetzung der Orbitalbewegung mit der Grundströmung und stellen in der vertikalen Richtung abgeplattete Trochoiden dar (strenggenommen unendlich abgeplattet).

Für die Stromlinien der Störungsbewegung ergibt sich aus (4):

$$e^{\mu \int \frac{A(c)}{C(c)} dc} \sin[\mu a - (\nu - U\mu) t] = K, \tag{6}$$

oder:

$$e^{\mu \int \frac{A(Z)}{C(Z)} dZ} \sin(\mu X - \nu t) = K. \tag{6'}$$

Äußerlich ist diese letztere Form genau dieselbe wie im Falle des Gleichgewichts, nur sind X und Z an Stelle von a und c getreten.

Entsprechend den verschiedenen Umlaufsrichtungen in der Orbitalbahn ergeben sich verschiedene Strömungsrichtungen längs der Stromlinien, je nachdem ob $\tilde{\omega} \gtrless U$ ist. Im Grenzfall $\tilde{\omega} = U$ bewegt sich die ganze Schicht wie ein starrer Körper mit sinusförmiger Oberfläche; da sie außerdem dieselbe Geschwindigkeit wie der Beobachter besitzt, befindet sie sich relativ zu diesem in Ruhe.

Besonders einfach gestaltet sich die Wellenlösung, wenn sich die Schichten im Grundzustand in gleichförmiger Translation befinden. Denn in der gleichförmig translatorisch bewegten Flüssigkeitsmasse gelten genau dieselben Störungsgleichungen wie in der ruhenden (**77**). Für jede einzelne translatorisch bewegte Schicht gelten dann auch die Lösungen des vorigen Kapitels, nur muß man immer auf den Unterschied zwischen Lokalfrequenz und Orbitalfrequenz achten.

Wir schreiben sofort die Formeln für reine Schwerewellen und rein elastische Wellen in einer einzigen Schicht mit gleichmäßiger Translation auf.

Im Falle reiner Schwerewellen, d. h. bei homogener inkompressibler Flüssigkeit, erhalten wir aus **91** (8′), wenn wir $\tilde{\omega}$ durch $\tilde{\omega} - U$ ersetzen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\tilde{\omega} = U \pm \sqrt{\frac{g}{\mu} \operatorname{tgh} \mu (c_1 - c_0)}, \tag{7}$$

die sich für den Fall unendlicher Schichtdicke auf

$$\tilde{\omega} = U \pm \sqrt{\frac{g}{\mu}} \tag{7a}$$

reduziert.

Relativ zur Grundgeschwindigkeit U, welche die mittlere Geschwindigkeit der beiden Wellen ist, pflanzen sich die Wellen mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit fort. *Wir werden im folgenden immer die mittlere Geschwindigkeit der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten das konvektive Glied der Fortpflanzungsgeschwindigkeit — die konvektive Geschwindigkeit — nennen, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit relativ zu dieser mittleren Geschwindigkeit das dynamische Glied der Fortpflanzungsgeschwindigkeit — die dynamische Geschwindigkeit.*

Betrachtet man andererseits die rein elastischen Wellen, d. h. den Fall einer kompressiblen Flüssigkeit bei Abwesenheit der Schwere, so erhält man, wenn in **93** (5) $\tilde{\omega}_L$ durch $\tilde{\omega} - U$ ersetzt wird, die folgende Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\omega = U \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma}} = U \pm \tilde{\omega}_L, \tag{8}$$

wo genau wie in (7) und (7a) ein konvektives und ein dynamisches Glied auftritt.

Während also eine gleichmäßige Translationsbewegung des ganzen Systems auf die Wellenlösung ohne wesentlichen Einfluß ist, wird die Lösung eine andere, wenn sich die Geschwindigkeit mit der Höhe ändert. Wir beschränken uns dabei auf den speziellen Fall, daß zwei Schichten mit verschiedenen Translationsgeschwindigkeiten übereinandergelagert sind. Die Lösung behält in diesem Falle innerhalb jeder einzelnen Schicht ihre einfache Form bei; da aber die Grenzflächenbedingung in einer allgemeineren Form zur Anwendung kommt, wird die Gesamtlösung wesentlich allgemeiner, als wenn im Grundzustand ruhende Schichten aufeinanderlagern.

Daß dabei etwas wesentlich Neues hinzukommt, ersieht man am besten, wenn man den möglichst einfachen Fall betrachtet, daß die Flüssigkeit homogen und inkompressibel ist, und zugleich keine Schwerkraft vorkommt, $g = 0$. Es ist dann weder elastische noch gravitationelle Energie vorhanden, aber dennoch ergibt sich eine Wellenlösung. Wir haben es, wie schon einmal früher (**46**), mit Wellen zu tun, die ihre Energie aus der Grundströmung schöpfen — diesmal jedoch aus der Energie gradliniger Strömungen während früher aus der Energie krummliniger Strömungen. Wir werden sie *reine Trägheitswellen* nennen, eine Bezeichnung, die wir für alle solche Wellen benutzen werden, bei denen keine andere Energieform als die kinetische auftritt.

Die beiden mit demselben Namen belegten Wellentypen können sehr verschiedenartig erscheinen. Denn in der krummlinigen Grundströmung

sieht man unmittelbar ein, wie die Wellen und ihre Eigenschaften von den Zentrifugalkräften abhängen, die in der gradlinigen Grundströmung gar nicht existieren. Um so wichtiger ist es aber, auf ein gemeinsames Merkmal aufmerksam zu machen: die Trägheitswellen der einen wie der anderen Art treten nur dann auf, wenn ein Wirbeln vorhanden ist: an der Grenzfläche der beiden gradlinigen Grundströmungen ist ein Flächenwirbel oder *Gleitwirbel* vorhanden, und wenn dieser Gleitwirbel verschwindet, d. h. wenn die beiden Schichten dieselbe Translationsgeschwindigkeit haben, verschwinden auch die Trägheitswellen. Für den zirkularen Wirbel, bei dem wir die bei krummlinigen Strömungen auftretenden Trägheitswellen kennengelernt haben, verschwinden diese Wellen, wenn die Zirkulationsbewegung um die Wirbelachse wirbelfrei ist.

Wir werden im nächsten Abschnitt diese reinen Trägheitswellen für sich betrachten und dabei die wichtige Erscheinung der *dynamischen Instabilität* kennenlernen. In den folgenden Abschnitten werden wir dann die allgemeineren Wellen betrachten, deren Fortpflanzungsenergie kinetisch-gravitationell oder sogar kinetisch-gravitationell-elastisch ist.

106. Reine Trägheitswellen in gradlinigen Strömungen. Für eine homogene inkompressible Flüssigkeit, die sich längs der a-Achse mit der gleichförmigen Translation U bewegt, gelten bei Abwesenheit der Schwere die Gleichungen der Gleichgewichtsstörung **90** (4). Dabei nennen wir immer noch, wie im Abschnitt **93**, die z-Achse vertikal mit positiver Richtung nach oben. Wir suchen dieses Gleichungssystem durch den Ansatz

$$(1)\qquad \begin{cases} x = A e^{\lambda c} \cos[\mu a - (\nu - U\mu) t], \\ z = C e^{\lambda c} \sin[\mu a - (\nu - U\mu) t], \\ Sp = D e^{\lambda c} \sin[\mu a - (\nu - U\mu) t] \end{cases}$$

zu befriedigen.

Durch Einsetzen in die Störungsgleichungen ergibt sich:

$$-(\nu - U\mu)^2 A + \mu D = 0,$$
$$-(\nu - U\mu)^2 C + \lambda D = 0,$$
$$-\mu A + \lambda C = 0.$$

Man findet hieraus die folgenden partikulären Integrale:

$$(2a)\qquad \begin{aligned} x &= C e^{\mu c} \cos[\mu a - (\nu - U\mu) t], \\ z &= C e^{\mu c} \sin[\mu a - (\nu - U\mu) t], \\ Sp &= \frac{C}{\mu} (\nu - U\mu)^2 e^{\mu c} \sin[\mu a - (\nu - U\mu) t], \end{aligned}$$

und:

$$(2b)\qquad \begin{aligned} x &= -C e^{-\mu c} \cos[\mu a - (\nu - U\mu) t], \\ z &= C e^{-\mu c} \sin[\mu a - (\nu - U\mu) t], \\ Sp &= -\frac{C}{\mu} (\nu - U\mu)^2 e^{-\mu c} \sin[\mu a - (\nu - U\mu) t]. \end{aligned}$$

Diese Integrale ergeben sich übrigens direkt aus **90** (11) und (12), wenn man dort ν durch $\nu - U\mu$ ersetzt. Das entsprechende allgemeine Integral läßt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\text{(2c)} \quad \begin{aligned} x &= C_1 \frac{\cosh\mu(c-c_0)}{\sinh\mu(c_1-c_0)} \cos[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ z &= C_1 \frac{\sinh\mu(c-c_0)}{\sinh\mu(c_1-c_0)} \sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ Sp &= \frac{C_1}{\mu}(\nu - U\mu)^2 \frac{\cosh\mu(c-c_0)}{\sinh\mu(c_1-c_0)} \sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \end{aligned}$$

wobei die Vertikalamplitude C_1 in der Ebene $c = c_1$ als willkürliche Konstante gewählt ist.

Der Fall einer einzigen Schicht ist ohne Interesse: die einzige Lösung gibt eine gewellte freie Oberfläche, die sich mit dem ganzen flüssigen System wie ein starrer Körper fortbewegt.

Wir gehen deshalb zum Falle zweier Schichten über und betrachten zunächst zwei Schichten von unendlicher Mächtigkeit, die durch eine Diskontinuitätsfläche $c = c_1$ getrennt sind. Die Bewegung in der unteren Schicht ist dann durch das Integral (2a) gegeben, die Bewegung in der oberen Schicht durch das Integral (2b), wenn man die ungestrichenen Buchstaben durch die entsprechenden gestrichenen ersetzt. Aus der Kontinuität der Vertikalverschiebung und des Druckes an der Diskontinuitätsfläche ergibt sich dann die folgende Frequenzengleichung:

$$\text{(3)} \quad Q(\nu - U\mu)^2 = -Q'(\nu - U'\mu)^2,$$

woraus sich für Frequenz bzw. Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt:

$$\text{(3a)} \quad \nu = \frac{QU + Q'U'}{Q + Q'}\mu \pm \sqrt{-\mu^2 QQ'\left(\frac{U'-U}{Q'+Q}\right)^2},$$

$$\text{(3b)} \quad \tilde{\omega} = \frac{QU + Q'U'}{Q + Q'} \pm \sqrt{-QQ'\left(\frac{U'-U}{Q'+Q}\right)^2}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit setzt sich wie oben, **105** (7) und (7a), aus einem konvektiven und einem dynamischen Gliede zusammen. Die konvektive Geschwindigkeit ist eine gewisse mittlere Geschwindigkeit der beiden Schichten, und zwar ist das Gewicht jeder Schicht bei der Mittelbildung der Dichte der Schicht proportional. Die dynamische Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist immer imaginär, und ebenfalls die entsprechende Frequenz. Wenn man in gewöhnlicher Weise die Lösung wieder auf reelle Form bringt, wird die Abhängigkeit von der Zeit exponentiell statt trigonometrisch: die Amplitude der wellenförmigen Störung wächst dann als Funktion der Zeit, und diese exponentiell anwachsenden Wellen pflanzen sich mit der konvektiven Fortpflanzungsgeschwindigkeit fort. Der Grundzustand ist folglich instabil, wir haben

das einfachste Beispiel einer *dynamischen Instabilität* vor uns, an Stelle der früher betrachteten statischen Instabilität **91** (6'). Die immer anwachsenden Instabilitätswellen schöpfen ihre Energie aus der Scherungsbewegung an der Diskontinuitätsfläche. Die Stromlinien werden unten für den allgemeinen Fall diskutiert, wo auch die Schwere mitwirkt. Wir bemerken nur, daß sie den gewöhnlichen Typus haben, also konkav-parabolisch in der unteren und konvex-parabolisch in der oberen Schicht. Es tritt jedoch eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit auf: die Stromlinien sind nicht mehr, wie bei den stabilen Schwerewellen in ruhenden Schichten, symmetrisch um die Wellenberge und Wellentäler zentriert, auch nicht wie bei den statisch instabilen Schwerewellen um die Wendepunkte der Wellenlinie zentriert, sondern nehmen eine Zwischenlage zwischen diesen beiden Grenzlagen ein, um bei möglichst großer dynamischer Instabilität dieselbe Lage wie bei der statischen Instabilität zu erreichen.

Wenn der Geschwindigkeitssprung gleich Null ist, verschwindet die dynamische Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und man erhält eine Doppelwurzel der Frequenzengleichung (3). In diesem Falle lehrt uns die Theorie der Differentialgleichungssysteme, daß neben (2a) oder (2b) ein anderes, linear unabhängiges Integral gefunden werden kann. Dieses Integral enthält t als Faktor und wächst folglich mit der Zeit über alle Grenzen, d. h. die Bewegung ist instabil. Dies gilt, wie klein auch der Dichtesprung ist. Hieraus folgt dann, daß wenn in einer Schicht für einen Augenblick eine kleine Unstetigkeit in der Dichte- und Windverteilung auftritt, so erlischt diese Unstetigkeit nicht zu gleicher Zeit wie die Impulse, sondern sie wächst allmählich an. Dies gibt nach RAYLEIGH die Erklärung des Flatterns von Segeln und Fahnen.

Schließlich betrachten wir noch den Fall zweier Schichten endlicher Mächtigkeit, die durch die Diskontinuitätsfläche $c = c_1$ getrennt sind. Die Bewegung in der unteren durch die starre Ebene $c = c_0$ begrenzten Schicht ist dann durch das Integral (2c) gegeben, diejenige in der oberen durch die starre Ebene $c = c_2$ begrenzten Schicht ergibt sich aus (2c), wenn wir c_0 durch c_2 ersetzen und gestrichene Buchstaben statt der ungestrichenen verwenden.

Die Frequenzengleichung wird:

$$(4)\qquad Q\,\frac{(\nu - U\mu)^2}{\mu}\operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0) = -Q'\,\frac{(\nu - U'\mu)^2}{\mu}\operatorname{ctgh}\mu(c_2 - c_1)\,.$$

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$(5)\qquad \alpha = \operatorname{ctgh}\mu(c_1 - c_0)\,,\qquad \alpha' = \operatorname{ctgh}\mu(c_2 - c_1)\,,$$

so ergibt sich aus (4) für die Frequenz:

$$\nu = \frac{QU\alpha + Q'U'\alpha'}{Q\alpha + Q'\alpha'}\mu \pm \sqrt{-\mu^2 QQ'\alpha\alpha'\left(\frac{U'-U}{Q\alpha+Q'\alpha'}\right)^2}, \tag{6a}$$

und für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{QU\alpha + Q'U'\alpha'}{Q\alpha + Q'\alpha'} \pm \sqrt{-QQ'\alpha\alpha'\left(\frac{U'-U}{Q\alpha+Q'\alpha'}\right)^2}. \tag{6b}$$

Bei Schichten, die im Vergleich zur Wellenlänge dünn sind, kann man $\alpha = \frac{1}{\mu(c_1 - c_0)}$, $\alpha' = \frac{1}{\mu(c_2 - c_1)}$ setzen, und die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit vereinfacht sich zu:

$$\omega = \frac{\frac{QU}{c_1-c_0} + \frac{Q'U'}{c_2-c_1}}{\frac{Q}{c_1-c_0} + \frac{Q'}{c_2-c_1}} \pm \sqrt{\frac{-QQ'}{(c_2-c_1)(c_1-c_0)}}\left(\frac{U'-U}{\frac{Q'}{c_2-c_1}+\frac{Q}{c_1-c_0}}\right) \tag{6c}$$

Wie im Falle der Schichten unendlicher Mächtigkeit setzt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus einem konvektiven und einem dynamischen Gliede zusammen. Das konvektive ist ein gewisser Mittelwert der beiden Translationsgeschwindigkeiten der Schichten, *und zwar macht sich bei der Mittelbildung die dünnste Schicht am stärksten geltend*, wie man besonders deutlich aus der vereinfachten Formel (6c) sieht. Die Ursache dürfte die sein, daß die Horizontalkomponente der Störungsbewegung in der dünneren Schicht mit größerer Geschwindigkeit und Beschleunigung als in der dickeren auftritt. Das dynamische Glied der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist immer imaginär. In den Schichten endlicher Mächtigkeit haben wir die gleiche Instabilität wie in den Schichten unendlicher Mächtigkeit. Für die Stromlinien gilt ebenfalls qualitativ dasselbe, was wir für die Schichten unendlicher Mächtigkeit entwickelt haben.

107. Wellen mit kinetischer und gravitationeller Fortpflanzungsenergie. Wir betrachten dieselben Schichten wie im vorigen Abschnitt, nehmen aber jetzt die Schwerebeschleunigung g als von Null verschieden an, so daß die Wellenenergie sowohl kinetischen wie gravitationellen Ursprungs ist.

Die partikulären Integrale ergeben sich dann aus **91** (3) und (4), wenn ν durch $\nu - U\mu$ ersetzt wird:

$$\begin{aligned} x &= C_0 e^{\mu c}\cos[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ z &= C_0 e^{\mu c}\sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ Sp &= C_0\left(\frac{(\nu - U\mu)^2}{\mu} - g\right)e^{\mu c}\sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \end{aligned} \tag{1a}$$

$$\begin{aligned} x &= -C_0 e^{-\mu c}\cos[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ z &= C_0 e^{-\mu c}\sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ Sp &= -C_0\left(\frac{(\nu - U\mu)^2}{\mu} + g\right)e^{-\mu c}\sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \end{aligned} \tag{1b}$$

und das allgemeine Integral ergibt sich in ähnlicher Weise aus **91** (7'):

$$(1\,c)\quad \begin{cases} x = C_0 \cosh\mu(c-c_0)\cos[\mu a-(\nu-U\mu)t], \\ z = C_0 \sinh\mu(c-c_0)\sin[\mu a-(\nu-U\mu)t], \\ Sp = C_0\left(\frac{(\nu-U\mu)^2}{\mu}\cosh\mu(c-c_0)-g\sinh\mu(c-c_0)\right)\sin[\mu a-(\nu-U\mu)t]. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Stromlinien sind deshalb von derselben Form wie im Falle einer Gleichgewichtsstörung.

Den trivialen Fall einer einzigen Schicht haben wir schon oben **105** (7) betrachtet. Wir gehen deshalb sofort zu dem Fall zweier Schichten mit verschiedenen Translationsgeschwindigkeiten U bzw. U' über. Außerdem nehmen wir für das Folgende durchweg an, daß die Translationsgeschwindigkeit in der oberen Schicht die größere ist, also $U' > U$. Die Grenzflächen seien die folgenden: der starre Boden $c = c_0$, die innere Diskontinuitätsfläche, $c = c_1$ im ungestörten Zustande, und die je nach den Umständen starre oder freie obere Grenzfläche $c = c_2$.

Die Störungsbewegung für die untere Schicht ergibt sich aus **92** (1), wenn man ν durch $\nu - U\mu$ ersetzt, und für die obere Schicht mit starrer bzw. freier Oberfläche aus **92** (2) bzw. (4), wenn man ν durch $\nu - U'\mu$ ersetzt.

Für die Frequenzengleichung der inneren Welle ergibt sich entsprechend bei starrer oberer Grenzfläche:

$$(2)\quad Q\left\{\frac{(\nu-U\mu)^2}{\mu}\operatorname{ctgh}\mu(c_1-c_0)-g\right\} = Q'\left\{-\frac{(\nu-U'\mu)^2}{\mu}\operatorname{ctgh}\mu(c_2-c_1)-g\right\},$$

oder wenn man wie in **106** (5) $\alpha = \operatorname{ctgh}\mu(c_1-c_0)$, $\alpha' = \operatorname{ctgh}\mu(c_2-c_1)$ einführt und die Gleichung nach $\tilde{\omega} = \nu/\mu$ auflöst:

$$(3)\quad \tilde{\omega} = \frac{QU\alpha+Q'U'\alpha'}{Q\alpha+Q\alpha'} \pm \sqrt{\frac{g}{\mu}\frac{Q-Q'}{Q\alpha+Q'\alpha'} - QQ'\alpha\alpha'\left(\frac{U'-U}{Q\alpha+Q'\alpha'}\right)^2}.$$

Sind speziell die beiden Schichten von unendlicher Mächtigkeit, so erhält man hieraus:

$$(3\,a)\quad \tilde{\omega} = \frac{QU+Q'U'}{Q+Q'} \pm \sqrt{\frac{g}{\mu}\frac{Q-Q'}{Q+Q'} - QQ'\left(\frac{U'-U}{Q+Q'}\right)^2}.$$

In der Abb. 46 sind die Kurven (3) und (3a) in einem $\mu, \tilde{\omega} - \frac{U+U'}{2}$-Diagramm eingezeichnet. Als Schichtdicken sind $c_1 - c_0 = c_2 - c_1 = 500$ m bzw. 2000 m und ∞ gewählt worden, und als Geschwindigkeitssprung ist 10 m/sec angenommen worden. Die Verhältniszahl $(Q-Q')/(Q+Q')$ ist gleich $^1/_{100}$ gesetzt worden. Bei angenäherter Anwendung auf die Atmosphäre würde dieses einem Temperatursprung von 5°,5 C entsprechen.

Die Orbitalbahnen der Teilchen bei den einfach harmonischen Wellen sind Ellipsen (und Kreise bei unendlicher Schichtmächtigkeit). Die allgemeineren Wellen, die sich durch Zusammensetzung von zwei einfachen mit den beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten (3) bzw. (3a)

ergeben, haben dagegen verwickeltere Orbitalbahnen, wie die in Verbindung mit dem FOUCAULTschen Pendel in einer Horizontalebene gezeichneten Kurven der Abb. 67, S. 471.

Die konvektive Geschwindigkeit in (3) bzw. (3a) ist derselbe Mittelwert der Grundgeschwindigkeiten in den beiden Schichten, dem wir bei den reinen Trägheitswellen **106** (6b) bzw. (3b) begegneten.

Abb. 46. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der inneren Welle in zwei homogen-inkompressiblen Schichten gleicher Mächtigkeit.

Im Ausdruck der dynamischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit erkennt man unter der Wurzel die Summe des reinen Schwerewellengliedes, das uns aus **92** (3) bzw. **91** (6') bekannt ist, und des reinen Trägheitswellengliedes **106** (6b) bzw. (3b). Das Schwerewellenglied an sich gibt Stabilität oder Instabilität, je nachdem, ob $Q \gtrless Q'$ ist. Das Trägheitswellenglied ist dagegen immer negativ und kann nur labilisierend wirken: es verstärkt eine schon vorliegende statische Instabilität, und eine evtl. vorliegende statische Stabilität wird entweder abgeschwächt oder auch in *dynamische Instabilität* verwandelt.

Bei gegebenem Dichtesprung und gegebener Wellenlänge stellt sich diese dynamische Instabilität bei Geschwindigkeitssprüngen ein, welche der Ungleichung

$$(4)\qquad (U'-U)^2 > \frac{g}{\mu}(Q-Q')\left[\frac{}{Q\,\mathrm{ctgh}\,\mu(c_1-c_0)} + \frac{}{Q'\,\mathrm{ctgh}\,\mu(c_2-c_1)}\right]$$

genügen, bzw. bei unendlichen Schichten:

$$(4a)\qquad (U'-U)^2 > \frac{g}{\mu}\,\frac{Q^2-Q'^2}{QQ'},$$

also bei genügend großem Geschwindigkeitssprung an der Diskontinuitätsfläche.

Bei gegebenem Geschwindigkeitssprung und Dichtesprung stellt sich die dynamische Instabilität ein bei Wellenzahlen:

$$(5)\qquad \mu > g\,\frac{Q-Q'}{(U'-U)^2}\left[\frac{1}{Q\,\mathrm{ctgh}\,\mu(c_1-c_0)} + \frac{1}{Q'\,\mathrm{ctgh}\,\mu(c_2-c_1)}\right]$$

bzw. für unendliche Schichtdicken:

$$(5a)\qquad \mu > g\,\frac{Q^2-Q'^2}{QQ'(U'-U)^2}$$

Es ergeben sich also die qualitativen Regeln:

Wenn Wellenlänge und Dichtesprung gegeben sind, ist der Grundzustand stabil bei kleinem, instabil bei großem Geschwindigkeitssprung.

Wenn Dichtesprung und Geschwindigkeitssprung gegeben sind, ist der Grundzustand stabil bei langen, instabil bei kurzen Wellen.

Diese einfachen und altbekannten Regeln werden für uns um so nützlicher sein, als wir immer wieder Fragen der Stabilität und Instabilität begegnen werden unter Verhältnissen, wo man das Stabilitätskriterium nicht mehr so einfach durch explizite Formeln angeben kann.

Im *Instabilitätsfall* setzen wir:

$$\nu = \nu_1 + i\nu_2, \qquad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2,$$

wo sich die Werte von $\tilde{\omega}_1$ und $\tilde{\omega}_2$ direkt aus (3) ergeben. Wir merken uns, daß immer

$$U < \tilde{\omega}_1 < U'$$

ist. Das allgemeine Integral setzt sich dann aus zwei partikulären Integralen zusammen; das eine hat den Faktor $e^{-\nu_2 t}$ und stellt eine Welle dar, die sich mit einer zwischen den beiden Grundgeschwindigkeiten liegenden konvektiven Geschwindigkeit $\tilde{\omega}_1$ fortpflanzt, und eine mit der Zeit nach Null abnehmende Amplitude besitzt. Das andere Integral gibt eine Welle mit derselben Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber mit zeitlich wachsender Amplitude. Da wir uns besonders für das Wachsen der instabilen Wellen interessieren, wollen wir nur das letztere Integral betrachten. Den Gleichungen (1a), (1b), (1c) entsprechend, läßt sich dieses in den folgenden Formen schreiben:

$$\text{(6a)}\quad \begin{cases} x = C_0 e^{\mu c + \nu_2 t}\cos[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t], \\ z = C_0 e^{\mu c + \nu_2 t}\sin[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t], \\ Sp = C_0 e^{\mu c + \nu_2 t}\Big\{\frac{2\nu_2(\nu_1 - U\mu)}{\mu}\cos[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t] \\ \qquad - [\nu_2^2 - (\nu_1 - U\mu)^2 + g]\sin[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t]\Big\}. \end{cases}$$

$$\text{(6b)}\quad \begin{cases} x = -C_0 e^{-\mu c + \nu_2 t}\cos[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t], \\ z = C_0 e^{-\mu c + \nu_2 t}\sin[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t], \\ Sp = C_0 e^{-\mu c + \nu_2 t}\Big\{-\frac{2\nu_2(\nu_1 - U\mu)}{\mu}\cos[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t] \\ \qquad + [\nu_2^2 - (\nu_1 - U\mu)^2 - g]\sin[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t]\Big\}. \end{cases}$$

$$\text{(6c)}\quad \begin{cases} x = C_0 e^{\nu_2 t}\cosh\mu(c - c_0)\cos[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t], \\ z = C_0 e^{\nu_2 t}\sinh\mu(c - c_0)\sin[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t], \\ Sp = C_0 e^{\nu_2 t}\Big\{\frac{2\nu_2(\nu_1 - U\mu)}{\mu}\cosh\mu(c - c_0)\cos[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t] \\ \qquad - ([\nu_2^2 - (\nu_1 - U\mu)^2]\cosh\mu(c - c_0) + g\sinh\mu(c - c_0))\sin[\mu a - (\nu_1 - U\mu)t]\Big\} \end{cases}$$

Die Gleichungen der Stromlinien relativ zu den Grundströmungen sind:

a) $$e^{\mu c+\nu_2 t}\{\nu_2\cos[\mu a-(\nu_1-U\mu)t]+(\nu_1-U\mu)\sin[\mu a-(\nu_1-U\mu)t]\}=K.$$

b) $$e^{-\mu c+\nu_2 t}\{\nu_2\cos[\mu a-(\nu_1-U\mu)t]+(\nu_1-U\mu)\sin[\mu a-(\nu_1-U\mu)t]\}=K.$$

c) $$e^{\nu_2 t}\sinh\mu(c-c_0)\{\nu_2\cos[\mu a-(\nu_1-U\mu)t]+(\nu_1-U\mu)\sin[\mu a-(\nu_1-U\mu)t]\}=K.$$

Man erkennt hieraus, daß die *Form* der Stromlinien für instabile und stabile Wellen dieselbe ist. *Die Bewegungsrichtung längs der Stromlinien* sowie *die Lage der Stromlinien relativ zur wellenden Fläche* ist jedoch in den beiden Fällen wesentlich verschieden.

Um diesen Unterschied in einem einfachen Spezialfall zu untersuchen, nehmen wir im folgenden an, daß die beiden Schichten unendliche Mächtigkeit haben. Die Frequenzengleichung ist dann (3a), das

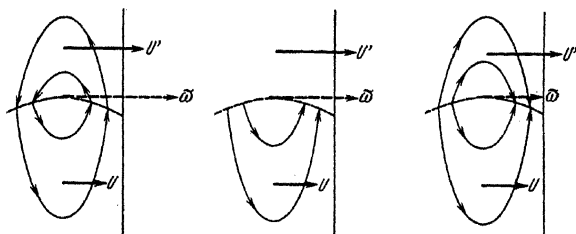



Abb. 47. Stromlinien (relativ zu den Grundströmungen) der stabilen inneren Welle bei verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Integral für die untere bzw. obere Schicht ist (1a) bzw. (1b), oder im Instabilitätsfall (6a) bzw. (6b).

Wir betrachten zunächst die stabilen Wellen. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem ob $\tilde{\omega} > U' > U$, $\tilde{\omega} < U < U'$, $U < \tilde{\omega} < U'$.

Wenn $\tilde{\omega}$ größer als beide Grundgeschwindigkeiten ist, sind sowohl $\nu - U\mu$ wie $\nu - U'\mu$ positiv. Die Horizontalkomponente der Störungsbewegung beiderseits der Diskontinuitätsfläche ist dann entgegengesetzt, und die Umlaufsrichtung in der Orbitalbahn ist positiv in der unteren Schicht und negativ in der oberen (Abb. 47, links).

Wenn $\tilde{\omega}$ kleiner als beide Grundgeschwindigkeiten ist, kehren sich alle Richtungen um.

Wenn $\tilde{\omega} = U'$ ist, bewegt sich die obere Schicht wie ein starrer Körper und die Bewegung in der unteren Schicht wird eine erzwungene, die durch die Wellenform der als erstarrt anzusehenden, bewegten Diskontinuitätsfläche erzeugt wird (Abb. 47, Mitte).

Die entsprechende Erscheinung ergibt sich auch, wenn $\tilde{\omega} = U$ ist; es ist dann die Bewegung der oberen Schicht eine erzwungene.

Wenn schließlich $\tilde{\omega}$ zwischen den Grundgeschwindigkeiten liegt (Abb. 47, rechts), so hat die Horizontalbewegung der Störung beiderseits der Grenzfläche die gleiche Richtung. Die Umlaufsrichtungen in der Orbitalbahn sind auch gleich, *und zwar positiv in beiden Schichten für $U' > U$ (positiver Flächenwirbel oder Gleitwirbel), negativ für $U' < U$ (negativer Gleitwirbel).*

Im Instabilitätsfall sind die Stromlinien relativ zur wellenden Diskontinuitätsfläche verschoben. Diese Phasenverschiebung wird gemessen durch den Abstand a_0 bzw. a_0' zwischen der Vertikalen, welche die wellende Fläche in mittlerer Höhe trifft, und der nächsten vertikalen Stromlinie (s. Abb. 48). a_0 bzw. a_0' ist nach (7) durch die folgende Formel gegeben:

$$\operatorname{tg} \mu a_0 = -\frac{\nu_2}{\nu_1 - U\mu} < 0$$

bzw.

$$\operatorname{tg} \mu a_0' = -\frac{\nu_2}{\nu_1 - l} > 0;$$

beide Größen wachsen also numerisch mit wachsender Instabilität. Im Falle einer *unendlich großen Instabilität findet man $\mu a_0 = -\pi/2$, $\mu a_0' = \pi/2$, und die relative Lage der Wellenfläche und der Stromlinien ist dieselbe wie im Falle statischer Instabilität für ruhende Schichten.* Die Stromlinien in der unteren und der oberen Schicht bilden dann zusammen geschlossene Kurven und geben das Bild eines gewöhnlichen Wirbels. Die Intensität dieses Wirbels nimmt mit der Zeit exponentiell zu. Im Falle endlicher Instabilität bilden die Stromlinien jedoch keine geschlossenen Kurven; dies rührt daher, daß die Abbildungen nicht die *wirklichen*, sondern die *relativen* Stromlinien darstellen, für die untere Schicht auf die Grundgeschwindigkeit U, für die obere Schicht auf die Grundgeschwindigkeit U' bezogen.

Abb. 48. Stromlinien (relativ zu den Grundströmungen) für die instabile innere Welle.

Der Umlaufssinn in der Orbitalbahn ist in beiden Schichten derselbe, da $U < \tilde{\omega}_1 < U'$ ist. Die Abb. 48a und b zeigen die Stromlinien

relativ zu den Grundströmungen, (a) im Falle einer kleinen und (b) im Falle einer großen Instabilität.

Im Falle zweier Schichten mit freier Oberfläche erhalten wir die folgende Frequenzengleichung:

$$\text{(8)}\quad \begin{aligned} &Q[\mu g - (\nu - U\mu)^2 \operatorname{ctgh} \mu (c_1 - c_0)]\,[\mu g - (\nu - U'\mu)^2 \operatorname{ctgh} \mu (c_2 - c_1)] \\ &\quad = Q'[\mu^2 g^2 - (\nu - U'\mu)^4]\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist also vom vierten Grade in ν; zwei der Wurzeln gehören der äußeren Welle und zwei gehören der inneren Welle an. Für den Fall einer oberen Schicht von unendlicher Mächtigkeit sind diese Wurzelpaare leicht anzugeben. Die Gleichung (8) wird nämlich dann:

$$\text{(8a)}\quad \left\{ \begin{aligned} &\{\mu g - (\nu - U'\mu)^2\}\{Q[\mu g - (\nu - U\mu)^2 \operatorname{ctgh} \mu (c_1 - c_0)] \\ &\qquad - Q'[\mu g + (\nu - U'\mu)^2]\} = 0\,, \end{aligned} \right.$$

und läßt sich folglich in zwei Faktoren zerlegen.

Der erste Faktor gleich Null gesetzt $(\nu - U'\mu)^2 = \mu g$ gibt eine äußere Welle mit der STOKESschen Fortpflanzungsgeschwindigkeit **105** (7a) der oberen Schicht. Die aus dem zweiten Faktor folgende Lösung stimmt mit (2) überein, wenn die obere Schicht unendlich ist, und gibt also dieselbe innere Wellenbewegung wie im Falle einer starren Oberfläche.

108. Erklärung der Totwassererscheinung. Die Formeln des vorhergehenden Abschnittes und im wesentlichen schon die einfacheren Formeln des Abschnittes **92** klären ein uraltes Rätsel auf.

Man sagt im Norwegischen „*im Totwasser liegen*“ in der Bedeutung „nicht vorwärts kommen“. Dieser Ausdruck stammt aus der Seemannssprache: es kommt in norwegischen Fjords und in anderen geschützten Gewässern gelegentlich vor, daß Ruderboote trotz der größten Anstrengungen kaum vorwärts zu bringen sind; zwischen den Ruderschlägen glaubt man zu fühlen, daß das Boot von einer mystischen Kraft rückwärts gezogen wird. Seglern in flauem Wind geht es noch schlechter: hat das Fahrzeug eben angefangen Fahrt zu machen, so gehorcht es plötzlich nicht mehr dem Steuerruder und fällt vom Winde ab. Fängt man von neuem wieder an, so wiederholt sich dasselbe Schauspiel: man bleibt stundenlang „im Totwasser liegen“. Ganz plötzlich kann jedoch das Fahrzeug wieder loskommen: z. B. wenn der Wind selbst nur um ein ganz geringes zunimmt, gelegentlich auch, wenn ein anderer Segler, der das Totwasser nicht spürt, in voller Fahrt dicht vorbeifährt, und oft aber auch ohne jede sichtbare Ursache.

Die Beobachter sind sich darüber einig, daß die Erscheinung nur dann auftritt, wenn eine Süß- oder Brachwasserschicht auf dem schwereren Meereswasser ruht. An den skandinavischen Küsten, die durch

Inseln und Schären geschützt sind, und wo die Gezeiten über lange Strecken fast unmerkbar sind, werden die Süß- und Salzwasserschichten viel langsamer gemischt, als an den meisten anderen schiffbaren Küsten. Deshalb ist die Erscheinung außerhalb Skandinaviens sehr wenig bekannt.

Sehr empfindlich für das Totwasser erwies sich FRIDTJOF NANSENS berühmtes Polarschiff „Fram“ mit seinem schweren Bau und seiner schwachen Maschine. Es bekam schon zu Beginn der Polarfahrt an der norwegischen Küste Fühlung mit dem Totwasser und hatte besonders schwer damit zu kämpfen an der sibirischen Küste entlang, wo das Meereswasser in der offenen Rinne zwischen der Küste und dem Eis vielfach mit Fluß- und Schmelzwasser bedeckt war. Nach NANSENS Rückkehr wurde durch seine Initiative die so oft als Schifferlüge hingestellte Erscheinung eingehend theoretisch und experimentell untersucht: das Ergebnis war eine schöne Illustration der Eigenschaften der Wellen in aufeinandergelagerten Schichten[1].

Durch seine Fahrt im geschichteten System hat das Fahrzeug Gelegenheit, zwei Wellensysteme zu erzeugen: die bekannten sichtbaren, äußeren Wellen und die inneren Wellen, die an der Oberfläche nur sehr schwach in Erscheinung treten (S. 320). In jedem Wellensystem stellt sich diejenige Wellenlänge ein, deren zugehörige Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit des Schiffes ist. Die inneren Wellen müssen deshalb viel größere Wellenlängen als die äußeren haben, um dem Fahrzeug folgen zu können. Das Fahrzeug kann aber nicht schneller vorwärts kommen als die Wellen, die ihm folgen, d. h. das Schiff hat die Fahrt der langsamen inneren Wellen. Die äußeren Wellen sind sehr kurz. Je mehr es gelingt, die Geschwindigkeit des Fahrzeuges zu steigern, um so länger werden die Wellen beider Systeme und um so mehr Arbeit geht für das Erzeugen dieser Wellensysteme verloren. Das Fahrzeug befindet sich oberhalb des vorderen Abhanges der ersten Unterseewelle, d. h. mit seinem hinteren Teil in einem Gebiet, wo die Wassermassen der oberen Schicht eine Bewegung rückwärts über den Kamm der Unterseewelle haben. Im Intervall zwischen zwei Ruderschlägen pflanzt sich die Unterseewelle mit der Geschwindigkeit fort, die das Boot am Ende des Ruderschlages erreichte. Die Welle läuft in diesem Intervall schneller als das Boot, welches dadurch in den Bereich noch stärker rückwärts bewegter Wassermassen kommt. Der Rudernde fühlt, daß das Boot rückwärts gesogen wird: das wiederholt sich regelmäßig zwischen den Ruderschlägen. Erreicht der Kamm der ersten Unterseewelle das Steuerruder, so kommt dieses in den Bereich von Wassermassen, die sich vorwärts bewegen, und zwar schneller als

[1] EKMAN, V. WALFRID: On Deadwater. The Norwegian North Polar Expedition 1893—1896, edited by Fridtjof Nansen, Vol. V. Christiania (Oslo) 1906.

das Fahrzeug: das Steuerruder wirkt im falschen Sinne, und ein Segler verliert die Fahrtrichtung. Wenn die Welle oder ein paar Wellen vorbeigekommen sind, kann das Segeln wieder von neuem anfangen, aber mit demselben Resultat. Gelingt es aber, dem Fahrzeuge für eine kurze Zeit eine etwas größere Geschwindigkeit als die größtmögliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der inneren Wellen zu erteilen, so verliert das Fahrzeug das Vermögen, die inneren Wellen an der Schichtgrenze zu erzeugen, der abnorme Widerstand läßt nach, und das Fahrzeug erreicht seine normale Geschwindigkeit: es ist vom Totwasser losgekommen.

Abb. 49 ist EKMANS Abhandlung entnommen und illustriert seine Modellversuche, die in einem langen Gefäß mit Glaswänden ausgeführt

Abb. 49. Totwasserwellen.

wurden, wobei die untere Salzwasserschicht mit Tusche gefärbt war. In *a* und *b* sieht man die Totwasserwellen, in *c* ist das Schiff eben vom Totwasser losgekommen: man sieht nur eine Depression in der Diskontinuitätsfläche direkt unter dem Schiffe, aber kein Wellensystem.

Man sieht leicht ein, daß sehr geringfügige Umstände das Loskommen veranlassen können, die Erscheinung muß äußerst launig auftreten. Noch mehr ist dies der Fall, wenn die beiden Wasserschichten relativ zueinander bewegt sind, was meistens zutrifft. Der Zustand ist dann, wie wir eben gesehen haben, noch instabiler, denn instabile innere Wellen können schon von vornherein vorhanden sein. Die Bedingungen für das Einfangen des Schiffes durch die Totwasserwellen und seine Befreiung von ihnen werden dadurch noch mannigfaltiger und können hinlänglich unbegreiflich erscheinen, um von nüchternen Leuten als Schifferlügen hingestellt zu werden.

Wir betrachten noch die quantitativen Verhältnisse in erster roher Annäherung. Es genügt, die Schichten als ruhend zu betrachten, so

daß wir wieder die einfacheren Formeln des Abschnittes **92** erhalten. Im Vergleich zu der Länge der inneren Welle nehmen wir die obere Süß- oder Brachwasserschicht als von sehr kleiner, die untere Salzwasserschicht dagegen als von sehr großer Mächtigkeit an. Die Formel **92** (3) ergibt dann für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ der inneren Welle:

$$(1) \qquad \tilde{\omega}^2 = \frac{g(\varrho - \varrho')}{\varrho \mu + \frac{\varrho'}{c_2 - c_1}},$$

wo $c_2 - c_1$ die Dicke der oberen Schicht ist. Wenn die Wellenlänge groß im Vergleich zu $c_2 - c_1$ ist, können wir das Glied mit μ im Nenner vernachlässigen, und wir finden als maximale Geschwindigkeit der inneren „Totwasserwellen":

$$(2) \qquad \tilde{\omega}_n^2 = \frac{\varrho - \varrho'}{\varrho'} g (c_2 - c_1).$$

Die hier vorkommenden Dichten kann man nach bekannten Tabellen[1] durch entsprechende Salzgehalte ersetzen. Dabei ist die Temperatur überall gleich 0° C gesetzt, und für die untere Schicht der normale Salzgehalt von 35‰ gewählt worden. Nach der Formel (2) sind dann in der beigefügten Tabelle die größtmöglichen Geschwindigkeiten der Totwasserwellen als Funktion der Dicke und des Salzgehaltes der oberen Schicht berechnet worden.

Maximale Geschwindigkeit der Totwasserwellen.

Dicke der oberen Schicht	Salzgehalt der oberen Schicht ‰				
m	35	30	20	10	0
0,1	0 m/sec	0,062 m/sec	0,108 m/sec	0,140 m/sec	0,167 m/sec
0,5	0	0,140	0,241	0,312	0,373
1,0	0	0,196	0,340	0,442	0,526
2,0	0	0,277	0,482	0,626	0,745
5,0	0	0,438	0,762	0,989	1,180
10,0	0	0,619	1,080	1,399	1,670

Wie man sieht, sind die höchsten Geschwindigkeiten, die das Fahrzeug erreichen kann, solange es noch die unsichtbaren Totwasserwellen erregt, sehr klein; sie messen für Ruderboote und kleinere Segler (Schichtdicken bis zu 1 m) nur nach Zentimetern und Dezimetern pro Sekunde, und erst für größere Fahrzeuge (Schichtdicken bis zu 10 m) sind Geschwindigkeiten über 1 m pro Sekunde zu erreichen. NANSENS Schiff „Fram", das gewöhnlich eine Geschwindigkeit von 4,5 bis 5 Knoten machte, erreichte im Totwasser bei vollem Dampfdruck höchstens die

[1] BJERKNES, V.: Dynamische Meteorologie und Hydrographie. Hydrographische Tabellen S. 10.

Geschwindigkeit von 1 bis $1^1/_2$ Knoten oder von 0,5 bis 0,8 m in der Sekunde, was sich leicht aus der Tabelle erklärt.

Die bei diesen geringen Geschwindigkeiten gebildeten äußeren Wellen sind, wie man leicht ausrechnet, so kurz und haben so kleine Amplituden, daß sie das Aussehen der Meeresoberfläche nur wenig beeinflussen. Wenn aber die inneren Totwasserwellen Amplituden von der Größenordnung der Dicke der oberen Schicht erreichen, bekommt die Oberfläche ein unruhiges, verworrenes Aussehen, und man hat den Eindruck, daß das Schiff die zwischen zwei inneren Wellen eingeschlossenen Wassermassen „mit sich schleppt", wie es oft in Berichten über Totwasser heißt.

109. Wellen mit kinetischer, gravitationeller und elastischer Fortpflanzungsenergie. Zwei isotherme Schichten. Wir betrachten schließlich den Fall, wo die Wellenenergie sowohl kinetischen als auch gravitationellen und elastischen Ursprungs ist, beschränken uns aber dabei auf den einfachen Fall zweier isothermer Schichten mit konstanten Grundgeschwindigkeiten U bzw. U'.

Die Amplituden ergeben sich dann direkt aus **101** (1) und (8), wenn ν durch $\nu - U^K\mu$ ersetzt wird. Sie sind also:

$$\begin{aligned} A^K &= \frac{\mu C_1}{[\mu^2 - \gamma^K(\nu - U^K\mu)^2]\sinh\eta^K(c_1 - c_n)}\, e^{\frac{1}{2}g\Gamma^K(c-c_1)}\Big\{\eta^K\cosh\eta^K(c - c_n) \\ &\qquad - g\,(\gamma^K - \tfrac{1}{2}\Gamma^K)\sinh\eta^K(c - c_n)\Big\}, \\ (1)\quad C^K &= \frac{C_1}{\sinh\eta^K(c_1 - c_n)}\, e^{\frac{1}{2}g\Gamma^K(c-c_1)}\sinh\eta^K(c - c_n), \\ D^K &= \frac{(\nu - U^K\mu)^2 C_1}{[\mu^2 - \gamma^K(\nu - U^K\mu)^2]\sinh\eta^K(c_1 - c_n)}\, e^{\frac{1}{2}g\Gamma^K(c-c_1)}\Big\{\eta^K\cosh\eta^K(c - c_n). \\ &\qquad - g\,\frac{\quad}{(\nu - U^K\mu)} - \tfrac{1}{2}\Gamma^K\Big)\sinh\eta^K(c - c_n)\Big\}. \end{aligned}$$

Für die untere Schicht ist K fortzulassen und $n = 0$ zu setzen, für die obere ist an Stelle von K ein Strich anzubringen und $n = 2$ zu setzen. Die Frequenzengleichung wird entsprechend:

$$\begin{aligned} (2)\quad & \frac{Q_1(\nu - U\mu)^2}{\mu^2 - \gamma(\nu - U\mu)^2}\Big|\eta\,\mathrm{ctgh}\,\eta(c_1 - c_0) \quad g\Big(\frac{\mu^2}{(\nu - U\mu)^2} - \frac{1}{2}\Gamma\Big)\Big] \\ & + \frac{Q_1'(\nu - U'\mu)^2}{\mu^2 - \gamma'(\nu - U'\mu)^2}\Big[\eta'\,\mathrm{ctgh}\,\eta'(c_2 - c_1) + g\Big(\frac{\mu^2}{(\nu - U'\mu)^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\Big)\Big] = 0. \end{aligned}$$

Wir begnügen uns damit, diese Gleichung für zwei Schichten von unendlicher Mächtigkeit zu diskutieren, indem wir Diagramme mit μ und $\tilde{\omega} - \frac{U + U'}{2}$ als Koordinaten zugrunde legen. Die hyperbolischen Cotangenten können dann gleich 1 gesetzt werden, und die Gleichung läßt sich in ähnlicher Weise, wie auf S. 358 gezeigt, nach Division durch

$\mu^2 - \gamma(\nu - U\mu)^2$ und $\mu^2 - \gamma'(\nu - U'\mu)^2$ auf die folgende rationale Form bringen:

$$(3) \qquad \vartheta = (M - M')(MN' - M'N) - (N - N')^2 = 0\,,$$

wobei:

$$(3\text{a}) \quad M^K = Q_1^K \frac{2 - \Gamma^K(\tilde{\omega} - U^K)^2}{1 - \gamma^K(\tilde{\omega} - U^K)^2} \quad \text{und} \quad N^K = (Q_1^K)^2 \frac{1 - \frac{\mu^2}{g^2}(\tilde{\omega} - U^K)^4}{1 - \gamma^K(\tilde{\omega} - U^K)^2}\,.$$

Man sieht, daß die Gleichung (3) vom zweiten Grade in μ^2 und vom zwölften Grade in $\tilde{\omega}$ ist, und zwar zerfällt sie bei verschwindendem Geschwindigkeitssprung in die STOKESsche Lösung $\mu^2\tilde{\omega}^4 - g^2 = 0$ und in die Gleichung **101** (15), die vom ersten Grad in μ^2 und vom vierten Grad in $\tilde{\omega}^2$ ist.

Für die numerische Berechnung von (3) erweist es sich also als vorteilhaft, verschiedene Werte von $\tilde{\omega}$ zu wählen und die beiden zugehörigen Werte von μ^2 aus einer quadratischen Gleichung zu bestimmen. Es läßt sich übrigens zeigen, daß nur der eine Wert von μ^2 von Bedeutung ist, wenn wir hier wie auch früher nur die Frequenzenkurven mit $\eta > 0$, $\eta' > 0$ berücksichtigen. Ferner läßt sich auch leicht zeigen, daß die Frequenzenkurven nur im Gebiet $\eta^2 > 0$, $\eta'^2 > 0$ verlaufen können, und zwar können sie die Kurven $\eta = 0$ und $\eta' = 0$ höchstens berühren. In den Berührungspunkten ändert der entsprechende η-Wert sein Vorzeichen, und die Fortsetzung der Frequenzenkurve über diese Punkte hinaus ist wie früher durch die singulären Kurven $\eta = 0$ oder $\eta' = 0$ gegeben. Dabei kann es hier vorkommen, daß diese Kurven in ihrem ganzen Verlauf Lösungen darstellen; es muß dann das Argument des gewöhnlichen Cotangens gegen π, 2π, ... rücken, d. h. wenn die Schichthöhe gegen Unendlich geht, muß $\zeta = i\eta$ in bestimmter Weise gegen Null gehen.

Es ist also wichtig, zuerst den Verlauf der Nullkurven für η und η' zu bestimmen. In einer μ, $\tilde{\omega} - \frac{U + U'}{2}$-Ebene schneiden die im Unterschallgebiet verlaufenden Kurvenzweige die Ordinatenachse in den Punkten $\tilde{\omega} - U^K = \pm\frac{\sqrt{\Gamma^K - \gamma^K}}{\frac{1}{2}\Gamma^K}$, und sie haben die horizontalen Geraden $\tilde{\omega} - U^K = 0$ als Asymptoten. Im Überschallgebiet gehen die Zweige asymptotisch gegen die Ordinatenachse und gegen die Schallgeschwindigkeitsgeraden $\tilde{\omega} - U^K = \pm\sqrt{\frac{1}{\gamma^K}}$ (L und L' der Abb. 50). In der Halbebene $\mu > 0$, die allein in Betracht kommt, ergeben sich folglich drei Teilgebiete mit positiven Werten von η^2 und η'^2. Mit $U' > U$ ist dann im Gebiet I $\tilde{\omega} > U'$, im Gebiet II ist $U' > \tilde{\omega} > U$ und im Gebiet III ist $\tilde{\omega} < U$. In jedem Gebiet ist eine Lösungskurve zu erwarten, wobei die Kurven in den Gebieten I und III modifizierte Formen der im Falle des Gleichgewichtes gefundenen Kurven sind, während der

dritte Kurvenzweig im Gebiet II neu hinzugekommen ist. Dieses Gebiet rückt mit abnehmenden Werten von $U' - U$ nach rechts zu immer größeren μ-Werten, um zuletzt für $U' - U = 0$, d. h. bei Gleichgewicht, ins Unendliche zu verschwinden.

Wir betrachten zunächst die Verhältnisse im Gebiet I. Die im Falle des Gleichgewichtes aus der Frequenzengleichung berechnete Kurve hatte bei wachsendem μ zuerst eine Berührung mit $\eta' = 0$, dann zwei Berührungen mit $\eta = 0$, und für $\mu \to \infty$ näherte sie sich schließlich asymptotisch der Abszissenachse, wo sie $\eta' = 0$ und die STOKESsche Kurve berührte. Dieser letzte Berührungspunkt rückt nun bei vorhandenem Geschwindigkeitssprung in das Gebiet endlicher μ. Der Kurvenzweig rechts des Berührungspunktes biegt nach oben um und nähert sich der STOKESschen Kurve; da er aber einen negativen Wert von η' hat, brauchen wir ihn nicht mehr in Betracht zu ziehen. Bei wachsendem Geschwindigkeitssprung rücken die beiden Berührungspunkte der Kurve mit $\eta = 0$ gegeneinander, fallen dann zusammen und gehen schließlich als konjugiert komplex wieder auseinander. Die berechnete Kurve $\vartheta = 0$ stellt dann eine Lösung zwischen den beiden Berührungspunkten mit $\eta' = 0$ dar.

Abb. 50. Die Gebiete $\eta^2 > 0$, $\eta'^2 > 0$ im μ, $\tilde\omega - \frac{U + U'}{2}$-Diagramm.

Aber für wachsendes $U' - U$ rücken auch diese Punkte gegeneinander, fallen dann zusammen und verschwinden schließlich aus dem reellen Gebiet. Es stellt dann $\eta' = 0$ in ihrem ganzen Verlauf die Frequenzenkurve dar. Abb. 51 gibt die gegenseitige Lage von $\eta = 0$, $\eta' = 0$ und $\vartheta = 0$ für drei verschiedene Werte von $U' - U$, nämlich $U' - U = 0$ (oben), $U' - U$ klein (in der Mitte) und $U' - U$ groß (unten).

Für die Ordinaten der Berührungspunkte ergibt sich durch Elimination von μ^2 aus (3) und der Gleichung für $\eta = 0$ eine Gleichung achten Grades. Da die uns interessierenden Wurzeln dieser Gleichung klein im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit sind, vernachlässigen wir die

Glieder $\sqrt{\gamma}(\tilde{\omega} - U)$ und $\sqrt{\gamma'}(\tilde{\omega} - U')$ gegenüber der Einheit und erhalten angenähert:

$$(4)\quad \frac{\varkappa-1}{\gamma}\left(2-\frac{U'-U}{\tilde{\omega}-U}\right)^2-\left(\frac{\varkappa-2}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}\right)\left(2-\frac{U'-U}{\tilde{\omega}-U}\right)\frac{\tilde{\omega}-U}{U'-U}-\left(\frac{\frac{1}{\gamma'}-\frac{1}{\gamma}}{U'-U}\right)^2=0.$$

Abb. 51. Verlauf der Frequenzenkurve des Gebietes I bei verschiedenem Geschwindigkeitssprung.

Durch Permutation von U, U' und γ, γ' ergibt sich hieraus die entsprechende Gleichung für die Ordinaten der Berührungspunkte mit $\eta' = 0$. Aus dieser Gleichung findet man, daß bei einem Temperatursprunge von 5° C die beiden Berührungspunkte schon für einen Geschwindigkeitssprung von 2,8 m/sec zusammenfallen.

Im Gebiet III hat man im Gleichgewichtsfalle zwei Berührungspunkte mit $\eta = 0$ und einen Berührungspunkt mit $\eta' = 0$. Bei einem Geschwindigkeitssprung ergibt sich ein neuer Berührungspunkt mit $\eta = 0$, der aus dem Unendlichen kommt und sich für wachsende Werte von $U' - U$ nach kleineren μ-Werten verschiebt. Die im Falle des Gleichgewichtes gefundenen Berührungspunkte bewegen sich aber hier bei zunehmendem Geschwindigkeitssprung in der entgegengesetzten Richtung wie die oben im Gebiet I behandelten Punkte. D. h. der Berührungspunkt mit $\eta' = 0$ und der eine Berührungspunkt mit $\eta = 0$ mit der numerisch größten Ordinate bewegen sich gegen die Ordinatenachse, wo sie schließlich aus dem Gebiete hinausrücken, während der zweite Berührungspunkt mit $\eta = 0$ nach größeren μ-Werten rückt, um schließlich mit dem aus dem Unendlichen kommenden Berührungspunkt zusammenzufallen. Für noch größere Werte von $U' - U$ stellt dann $\eta = 0$ in ihrem ganzen Verlauf die richtige Frequenzenkurve dar.

Im Gebiet II gibt nur der zwischen den Berührungspunkten mit $\eta = 0$ und $\eta' = 0$ verlaufende Teil der Kurve $\vartheta = 0$ eine brauchbare Lösung (voll ausgezogen in der Abb. 52). Die Fortsetzung der Frequenzenkurve nach größeren μ-Werten ist wieder durch $\eta = 0$ und $\eta' = 0$ gegeben. Es ist bemerkenswert, daß die Frequenzenkurve in diesem

Gebiet immer bei größeren μ-Werten liegt als die aus dem Unendlichen kommenden Berührungspunkte der Gebiete I und III.

In der Nähe der Abszissenachse hat die Frequenzenkurve angenähert denselben Verlauf wie im Falle von Homogenität und Inkompressibilität. Wie dort, tritt auch hier Instabilität für kurze Wellenlängen ein. Dies ergibt sich sofort aus der Frequenzengleichung (3), die für das Gebiet II in einer vereinfachten Form geschrieben werden kann. Für kleine Werte von $U'-U$ sind nämlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in diesem Gebiet klein im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit, so daß (3) nach steigenden Potenzen der kleinen Größe $\sqrt{\gamma}(\bar{\omega}-U)$ entwickelt werden kann. Dadurch ergibt sich:

Abb. 52. Verlauf der Frequenzenkurve des Gebietes II.

$$(5)\quad Q_1\left[\mu(\bar{\omega}-U)^2-\frac{g^2(\Gamma-\gamma)}{2\mu}-g\right]+Q_1'\left[\mu(\bar{\omega}-U')^2-\frac{g^2(\Gamma'-\gamma')}{2\mu}+g\right]=0.$$

Nach Potenzen von $\bar{\omega}$ geordnet, folgt hieraus:

$$(5')\quad \begin{cases}(Q_1+Q_1')\bar{\omega}^2-2(Q_1U+Q_1'U')\bar{\omega}+Q_1U^2+Q_1'U'^2-\frac{g}{\mu}(Q_1-Q_1')\\ \qquad -\frac{g^2}{2\mu^2}[Q_1(\Gamma-\gamma)+Q_1'(\Gamma'-\gamma')]=0,\end{cases}$$

oder aufgelöst:

$$(5'')\quad \bar{\omega}=\frac{Q_1U+Q_1'U'}{Q_1+Q_1'}\pm\sqrt{\frac{g}{\mu}\,\frac{Q_1-Q_1'}{Q_1+Q_1'}+\frac{g}{2\mu^2}\,\frac{Q_1(\Gamma-\gamma)+Q_1'(\Gamma'-\gamma')}{Q_1+Q_1'}-Q_1Q_1'\left(\frac{U'-U}{Q_1+Q_1'}\right)^2}.$$

Es tritt also dynamische Instabilität auf, wenn der Geschwindigkeitssprung größer ist als der kritische Wert:

$$(6)\quad (U'-U)^2=\frac{g}{\mu}\,\frac{Q_1^2-Q_1'^2}{Q_1Q_1'}+\frac{g}{2\mu^2}\,\frac{Q_1+Q_1'}{Q_1Q_1'}[Q_1(\Gamma-\gamma)+Q_1'(\Gamma'-\gamma')].$$

Für Γ, Γ' und γ, γ' gleich Null erhalten wir wieder die Formel **107** (4a) für homogene inkompressible Flüssigkeiten. Bei innerer Stabilität des Mediums $\Gamma>\gamma$, $\Gamma'>\gamma'$ ergibt sich somit eine Vergrößerung des kritischen Wertes.

Nach dieser vereinfachten Formel scheint es, als ob alle langen Wellen stabil seien, wie im Falle der Homogenität und Inkompressibilität. Diese Formel gilt jedoch im Gebiet sehr kleiner η-Werte nicht. Hier biegt die Frequenzenkurve mit vertikaler Tangente um und berührt schließlich $\eta=0$ und $\eta'=0$, wie aus der Abb. 52 hervorgeht. Für

alle Wellenlängen größer als diejenige, die der vertikalen Tangente entspricht, ergibt sich also wieder Instabilität.

Gegenüber dem homogenen inkompressiblen Falle besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied insofern, als man hier, im isothermen Falle, stabile Wellen aller Wellenlängen erhalten kann, wenn man die zellularen Wellen mitberücksichtigt. Im homogenen inkompressiblen Fall wie auch im allgemeinen autobarotropen Fall ist die Schichtung nur an der Grenzfläche stabil, sonst aber statisch indifferent, während in dem betrachteten isothermen Fall die Schichtung überall stabil ist und dadurch das Auftreten von Zellularwellen ermöglicht.

Wir betrachten noch ganz kurz die Frequenzengleichung für zwei isotherme Schichten von unendlicher Mächtigkeit mit freier Oberfläche. Sie ergibt sich nach der in **102** auseinandergesetzten Methode aus (2) in der folgenden Form:

$$\begin{aligned}(7)\qquad & \varrho_1\left[\eta - g\left(\frac{\mu^2}{(\nu - U\mu)^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right)\right]\left[\eta' - g\left(\frac{\mu^2}{(\nu - U'\mu)^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)\right] \\ & \quad + \varrho_1'[\mu^2 - \gamma(\nu - U\mu)^2]\left[1 - \frac{g^2\mu^2}{(\nu - U'\mu)^4}\right] = 0 .\end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $\eta' + g\left(\frac{\mu^2}{(\nu - U'\mu)^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)$ und Einführung des Wertes von η'^2 folgt hieraus:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & [(\nu - U'\mu)^4 - g^2\mu^2]\Big\{\varrho_1[\mu^2 - \gamma'(\nu - U'\mu)^2]\left[\eta - g\left(\frac{\mu^2}{(\nu - U\mu)^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right)\right] \\ & \quad + \varrho_1'[\mu^2 - \gamma(\nu - U\mu)^2]\left[\eta' + g\left(\frac{\mu^2}{(\nu - U'\mu)^2} - \frac{1}{2}\Gamma'\right)\right]\Big\} = 0 .\end{aligned}\right.$$

Wir erhalten also auch hier die Zerlegung in eine äußere Welle, die sich mit der STOKESschen Geschwindigkeit der oberen Schicht fortpflanzt, und eine innere Welle, die identisch dieselbe ist wie im Falle einer starren oberen Grenzfläche.

110. Stromlinienbilder bei großen Amplituden. Will man die bisher studierten kleinen Störungsbewegungen durch Stromlinienbilder darstellen, so tritt eine eigentümliche Schwierigkeit auf. Nach Voraussetzung haben die Wellen unendlich kleine Amplituden. Die wellende Grenzfläche zwischen zwei Schichten ist deshalb nicht durch eine wellende, sondern durch eine gerade Linie darzustellen. Gibt man dieser Linie einen wenn auch noch so schwach wellenden Verlauf, so treffen sich die mathematisch einander entsprechenden Stromlinien der oberen und der unteren Schicht nicht mehr an der Grenzlinie. Will man ein anschauliches Bild mit sichtbaren Höhen der Wellen zeichnen, so ist man gezwungen, den Verlauf der Stromlinien abzuändern. Diese somit etwas verfälschten Bilder mit endlicher Wellenamplitude haben nun

nicht nur den Vorzug der Anschaulichkeit, sondern sie sind die einzigen, die man mit der endlichen Grundströmung zusammensetzen kann, wenn man ein Bild der resultierenden Bewegung erhalten will, das nicht nur aus den geraden Stromlinien der Grundströmung besteht.

Die Bilder, die man in dieser Weise erhält, sind, wenn nicht exakt, so doch qualitativ richtig; und diese qualitative Richtigkeit behalten sie bei bis nahe an den Grenzfall, wo das Überstürzen und die Brandung der Wellen eintritt. Es handelt sich hier um ein Erfahrungsgesetz von großer Allgemeinheit. Die für unendlich kleine Pendelschwingungen erhaltenen Gesetze findet man, wenn nicht quantitativ, so doch qualitativ, bestätigt bis nahe an die Grenze, wo die Schwingungen in rhythmische Umläufe übergehen. Dasselbe scheint sich allgemein zu wiederholen: die für Störungen mit kleiner Amplitude gefundenen Gesetze gelten qualitativ auch für Störungen mit großer Amplitude bis nahe an die Grenze, wo etwas ganz Neues eintritt. Wo sich diese Grenze befindet, muß jedoch in jedem einzelnen Fall besonders untersucht werden.

Als Ausgangspunkt unserer Konstruktionen nehmen wir die Figuren *I* und *II* der Abb. 53. *I* stellt Wellen höchster Stabilität dar. Die Fortpflanzung geht von links nach rechts, es sind die positiven Wirbel (im populären Sinne des Wortes) um die Wellentäler und die negativen um die Wellenberge gelagert. *II* stellt für sich allein den Fall rein statischer Instabilität dar, wenn beide Schichten ruhen und die obere größere Dichte als die untere hat: die Wellentäler vertiefen sich, und die Wellenberge erhöhen sich an Ort und Stelle, es findet keine Fortpflanzung statt. Dementsprechend sind die positiven Wirbel um die rechten und die negativen Wirbel um die linken Abhänge der Wellenberge gelagert. Dieselbe Figur *II* stellt aber auch die Störungsbewegung im Falle der höchsten dynamischen Instabilität bei bewegten Schichten dar.

Unmittelbar unterhalb der Figuren *I* und *II* sind drei Kombinationen von Translationsbewegungen der Schichten dargestellt. (*A*) Beide nach rechts gerichtet, mit der größeren Geschwindigkeit in der oberen Schicht. (*B*) Oben nach rechts und unten nach links. (*C*) Beide nach links mit der größeren Geschwindigkeit in der unteren Schicht. Es sind dies die drei Fälle, die an der Grenzfläche der beiden Grundströmungen einen *positiven Gleitwirbel* liefern.

Durch numerische oder graphische Methoden findet man nun die Stromlinienbilder, die aus der Kombination der Störungsbewegungen *I* und *II* mit den Grundströmungen *A*, *B*, *C* hervorgehen. Bei dem Aufzeichnen der Figuren erweist sich die obenerwähnte Abänderung als unvermeidlich, um die erforderliche Kontinuität der Stromlinien und der Stromröhren an der Grenzfläche zu erhalten. Je nach der relativen Stärke der Grundströmungen und der Störungsbewegungen

entstehen Bilder von verschiedenem Aussehen, wofür *IA*, *IB*, *IC*, *IIA*, *IIB*, *IIC* Beispiele sind.

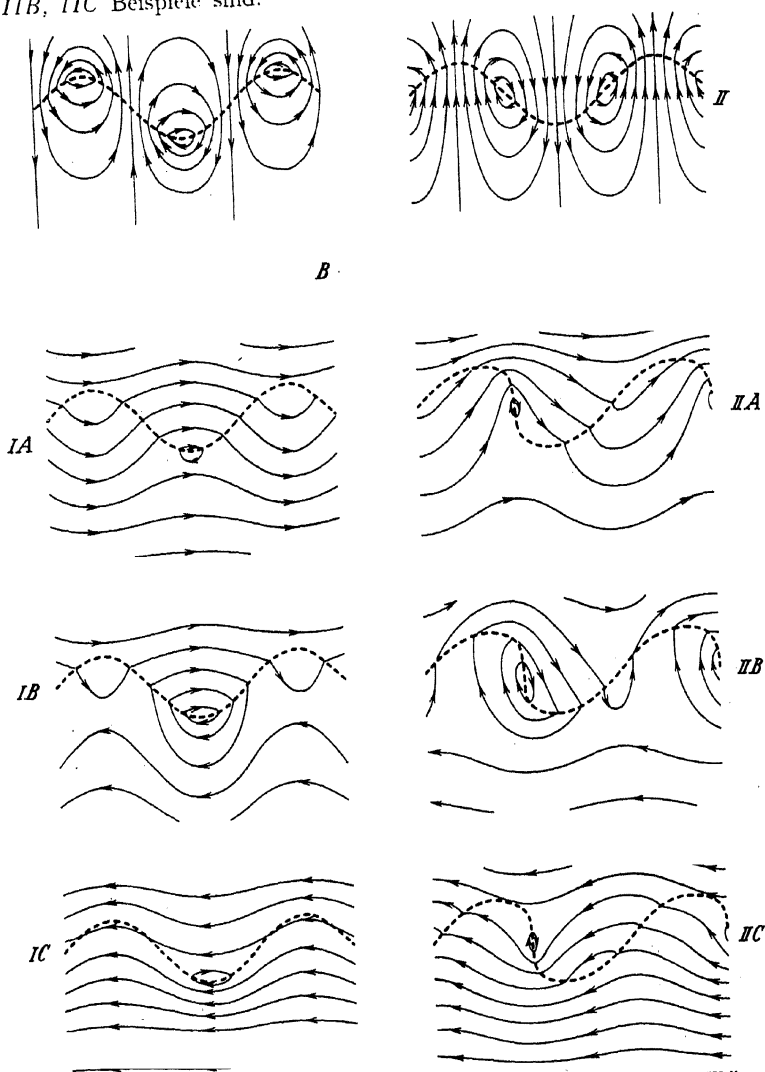



Abb. 53. Resultierende Stromlinien bei großen Amplituden. *I* Stabile Wellen, *II* instabile Wellen.

Sämtliche sechs Stromlinienbilder haben ein gemeinsames Merkmal: die positiven Gleitwirbel der Figuren *I* und *II* sind verlängert und verstärkt, die negativen Gleitwirbel verkürzt und geschwächt oder sogar

aufgehoben. Den verstärkten positiven Gleitwirbeln schließt sich in den Fällen *IB* und *IIB* ein großes, in den vier übrigen Fällen nur ein kleines System von geschlossenen Stromlinien an. In jedem dieser vier Fälle ist nämlich eine Translation des Gesamtsystems vorhanden, die in den beiden Fällen *IB* und *IIB* Null ist. Mit wachsender Stärke dieser Translation schrumpft das Gebiet der geschlossenen Stromlinien, das man unmittelbar aus dem Bilde als Wirbel erkennt, zusammen und verschwindet schließlich ganz. Die Bewegung der beiden Medien relativ zueinander ist jedoch in den drei stabilen Fällen identisch dieselbe und ebenso in den drei instabilen Fällen.

Vergleicht man nun die Reihe der stabilen Fälle *I* mit der Reihe der instabilen Fälle *II*, so tritt neben der allgemeinen Übereinstimmung ein wesentlicher Unterschied hervor: die verstärkten Wirbel liegen

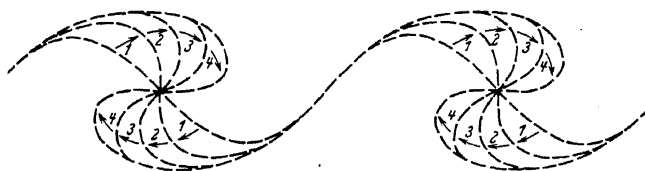



Abb. 54. Profiländerung einer instabilen Diskontinuitätsfläche.

im Stabilitätsfall symmetrisch zu den Wellentälern, im Instabilitätsfall asymmetrisch auf den rechten Abhängen der Wellenberge.

Diese verschiedene Lagerung hat eine wichtige Verschiedenheit in der weiteren Entwicklung des Wellensystems zur Folge. Ein Beobachter, der die Bewegung der Wellen mitmacht, sieht im Stabilitätsfall eine sich immer gleich bleibende sinusförmige Wellenlinie, im Instabilitätsfall dagegen eine Wellenlinie, die immer mehr asymmetrisch wird (Abb. 54) und der Reihe nach die Profile *1*, *2*, *3*, *4* usf. annimmt. Die rechten Abhänge werden steiler und überstürzen sich schließlich, während die linken Abhänge glatt verlaufende Verbindungslinien bleiben zwischen Kurventeilen, die sich spiralig aufwinden. Auf den Beginn dieser Asymmetrie ist bei der Konstruktion der Stromlinienbilder 53, *IIA*, *IIB*, *IIC* Rücksicht genommen worden.

In unseren Konstruktionen haben wir die beiden Grenzfälle der größten Stabilität und der größten Instabilität betrachtet. Die Übergangsfälle kann man in ähnlicher Weise konstruieren, indem man die Ausgangsfiguren 53 *I* und *II* durch die mehr zusammengesetzten

Figuren der Abb. 48 ersetzt. Auch kann man diese Übergangsfälle einfach durch Interpolation zwischen den Figuren *IA* und *IIA*, *IB* und *IIB*, *IC* und *IIC* erhalten. Diese Übergangsfälle werden sich später als besonders wichtig erweisen.

Schließlich kehren wir zu dem Fall der rein statischen und dem Fall der größten dynamischen Instabilität zurück und zeichnen zur Vereinfachung nur die Trennungslinie. Dies gibt die beiden Figuren Abb. 55 *I* und *II*. Bei der statischen Instabilität faltet sich die Trennungslinie,

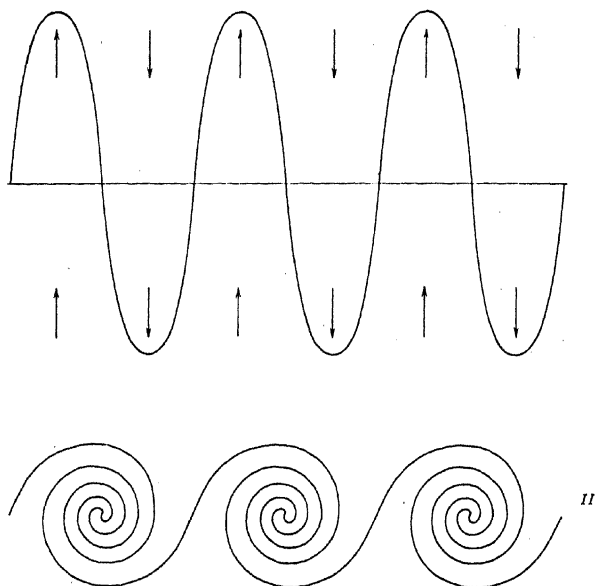



Abb. 55. Profile einer Diskontinuitätsfläche bei statischer Instabilität (*I*) und bei dynamischer Instabilität (*II*).

bei der dynamischen Instabilität rollt sie sich in eine Reihe von Doppelspiralen auf. Bei der statischen Instabilität bilden sich abwechselnd positive und negative Wirbel, die sich senkrecht zu der anfangs ungestörten Trennungslinie ausdehnen, bei der dynamischen Instabilität ergeben sich lauter Wirbel von gleichem Vorzeichen, die sich als Rollen zwischen die verschieden schnell bewegten Schichten legen. Als Endresultat der statischen Instabilität ergibt sich, jedenfalls innerhalb eines begrenzten Raumes, daß sich die schwereren Massen unten und die leichteren oben sammeln; das Endresultat der dynamischen Instabilität ist, daß sich durch die fortgesetzte Verwirbelung eine Mischungsschicht bildet,

in der man einen stetigen Übergang findet von den Werten der Dichte und Geschwindigkeit in der einen Schicht zu den Werten dieser Größen in der anderen Schicht[1].

Wie wir in **107** gesehen haben, herrscht an einer Diskontinuitätsfläche immer dynamische Instabilität gegenüber hinlänglich kurzen Wellen. Hieraus folgt, daß sich bei gegebenem Windsprunge spontan Instabilitätswellen bilden müssen bis zu den Längen, wo die Stabilität anfängt. Wirkliche Diskontinuitätsflächen mit endlichem Windsprung können folglich nicht bestehen bleiben. Es muß sich immer eine stabilisierende Übergangsschicht bilden, die aber hinlänglich langen Wellen gegenüber wieder als eine Diskontinuitätsfläche betrachtet werden kann. Die Übergangsschicht wird nur eine begrenzte Dicke erreichen können, die kaum größer ist als die Länge der längsten noch instabilen Wellen. Denn diese Wellenlängen geben den größtmöglichen Durchmesser der verwirbelten Doppelspiralen.

Zehntes Kapitel.

Quasistatische Wellenbewegung in autobarotropen Schichten.

111. Die quasistatische Methode. Sowohl für die Atmosphäre wie für die Hydrosphäre ist die Ausdehnung in vertikaler Richtung sehr klein im Vergleich zu ihrer Ausdehnung in horizontaler Richtung. Für die möglichen Ortsveränderungen der Teilchen dieser Medien ergeben sich deshalb in vertikaler Richtung sehr enge, in horizontaler Richtung sehr weite Grenzen. Infolgedessen ergeben sich Bewegungen, deren Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in vertikaler Richtung sehr klein sind im Vergleich zu denjenigen in horizontaler Richtung. Man hat also überwiegend horizontale Bewegungen mit meistens nahezu horizontal verlaufenden Stromlinien. Betrachtet man die Schwerebeschleunigung als eine Größe nullter Ordnung, so sind die horizontalen Beschleunigungen klein von erster, die vertikale Beschleunigung jedoch klein von zweiter Ordnung, wie schon in **36** entwickelt wurde.

Um Bewegungen dieser Art mathematisch zu behandeln, kann man deshalb versuchen, in erster Annäherung in den Bewegungsgleichungen die vertikale Beschleunigungskomponente zu vernachlässigen. Man erhält dann für die vertikale Komponente einfach die Gleichgewichtsgleichung, während man nur für die beiden horizontalen Komponenten

[1] Zur Bildung dieser Wirbelschicht im Falle keines Dichtesprunges an der Diskontinuitätsfläche vgl. PRANDTL-TIETJENS: Hydro- und Aeromechanik, S. 207, und für eine eingehendere mathematische Behandlung L. ROSENHEAD: The Formation of Vortices from a Surface of Discontinuity. Proc. Roy. Soc. 1931, Series A, Vol. 134, No. 323, S. 170—192.

die Bewegungsgleichungen beibehält. Dies gibt auch zugleich ein vielversprechendes Gleichungssystem, weil es den Bedingungen der großen ozeanischen und atmosphärischen Bewegungen sehr nahe zu kommen scheint. Denn die großen Luft- und Meeresbewegungen sind überwiegend horizontal, und längs jeder einzelnen Vertikalen findet man zu jeder Zeit die Gleichgewichtsbedingungen meistens weit innerhalb der Grenzen des Beobachtbaren erfüllt. Daß es sich nicht um ein wahres Gleichgewicht handelt, erkennt man daraus, daß sich der scheinbare Gleichgewichtszustand als veränderlich erweist, teils von Vertikalen zu Vertikalen zu einer gegebenen Zeit, teils längs derselben Vertikalen zu verschiedenen Zeiten. Wenn wir von Lokalerscheinungen wie Wasserhosen, Tromben oder Kräuselungen der Meeresoberfläche absehen, so können wir die Bewegungszustände der Atmosphäre und des Meeres als *quasistatisch* bezeichnen.

Es ist deshalb offenbar eine wichtige Aufgabe, die weitgehenden Vorteile der quasistatischen Bewegungsbedingungen für die Lösung der großen Integrationsprobleme nach Möglichkeit auszunutzen. Andererseits erfordert aber die Anwendung dieser quasistatischen Methode große Vorsicht; denn das Gleichungssystem enthält einen inneren Widerspruch, sobald man trotz der für die Vertikale angesetzten Gleichgewichtsgleichung doch Vertikalbewegungen einführt. Die Entwicklungen lassen sich jedoch so gestalten, daß man diesen Widerspruch umgeht. Das erste Beispiel hierfür gab LAGRANGE bei seiner Lösung des Problems der Fortpflanzung langer Wellen in Kanälen oder in seichten Wasserschichten. Später ist nach LAPLACE die quasistatische Methode bei allen bis jetzt entwickelten Theorien der Gezeiten zugrunde gelegt worden. Dabei ist die Methode bis jetzt nur für das als homogen und imkompressibel anzusehende Meer ausgearbeitet worden. Mit Rücksicht auf atmosphärische Anwendungen werden wir sie hier für den Fall *kompressibler autobarotroper* Medien entwickeln.

Verallgemeinerungen über diese Grenze hinaus haben dagegen wenig Zweck. Denn sobald die Flüssigkeit mit baroklinem Massenfelde auftreten und im Schwerefelde zellulare Wellenbewegungen ausführen kann, bringt die quasistatische Methode keine wesentlichen Vereinfachungen des Integrationsproblems mehr, sondern höchstens weniger bedeutende Vereinfachungen der Endformeln.

Auf die Frage nach den Grenzen der Brauchbarkeit der quasistatischen Methode kommen wir am Schlusse des nächsten Kapitels zurück.

112. Die Gleichungen der quasistatischen Wellenbewegung in autobarotropen Schichten. In den LAGRANGEschen Störungsgleichungen **89** (5b) für eine Flüssigkeit im Gleichgewichtszustand oder in gleichmäßiger, horizontaler Translation setzen wir das vertikale Beschleuni-

gungsglied gleich Null: $\ddot{z} = 0$. Um die Gleichungen gleichzeitig für kompressible Schichten bequem integrierbar zu machen, verwenden wir die statische Gleichgewichtsgleichung:

$$S \frac{\partial P}{\partial c} = -g,$$

wo S und P nur von der Vertikalen abhängen. Dadurch führen wir in den Störungsgleichungen P anstatt c als unabhängige Variable in vertikaler Richtung ein. Unter Berücksichtigung der Autobarotropiebedingung: $\Gamma = \gamma = -\frac{1}{S^2} \frac{\partial S}{\partial P}$, werden die Gleichungen dann, indem wir die Lösungen als von b unabhängig annehmen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial a}(S p + g z) = 0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial P}(S p + g z) = 0. \tag{2}$$

$$S \frac{\partial x}{\partial a} - g \frac{\partial z}{\partial P} - \frac{\partial S}{\partial P} p = 0. \tag{3}$$

Das eigentliche Prinzip der quasistatischen Methode besteht nun darin, daß man aus der Gleichgewichtsgleichung (2) und der Kontinuitätsgleichung (3) eine kombinierte Gleichung bildet. Man erhält diese in einer einfachen Form, indem man in (2) die Differentiation ausführt, und sie zu (3) addiert. Dies gibt die Gleichung:

$$\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial P} = 0, \tag{4}$$

die uns gestattet, den dynamischen Zuschlagsdruck p durch die Unterschiede der horizontalen Verschiebungen zu berechnen und nicht wie gewöhnlich durch die Vertikalbeschleunigung. Die Gleichung gibt uns mit anderen Worten diesen Druck als die *statische* Wirkung der Massenanhäufungen — sie ist die eigentlich *quasistatische Gleichung*.

Diese Gleichung bildet jetzt zusammen mit (1) und (2) ein einfacheres Gleichungssystem, in dem man außerdem noch zwei Integrationen ausführen kann. Zunächst ergibt sich durch Differentiation von (1) nach P unter Berücksichtigung von (2):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial P} = 0,$$

woraus man ersieht, daß die Horizontalverschiebung x der Teilchen von der Vertikalkoordinate P unabhängig ist, wenn wir von Lösungen absehen, bei denen x linear mit der Zeit über alle Grenzen wächst: *alle Teilchen, die sich in derselben Vertikalen befinden, erhalten also dieselbe horizontale Störungsbewegung*. Auf diesem Satz beruhen die wesentlichen Vereinfachungen, welche die quasistatische Methode bringt. Dieser Satz gilt jedoch nicht mehr, wenn man von den autobarotropen zu

dem ganz allgemeinen Fall der heterotropen Flüssigkeiten mit baroklinem Massenfeld übergeht.

Wenn man die Unabhängigkeit des x von P berücksichtigt, so ergibt die Integration der quasistatischen Gleichung (4) ohne weiteres:

$$P\frac{\partial x}{\partial a} + p = \chi(a, t), \tag{5}$$

mit χ als willkürlicher Funktion von a und t. Ähnlich ergibt die Integration der statischen Gleichung (2):

$$S p + g z = \psi(a, t), \tag{6}$$

mit ψ als weiterer willkürlicher Funktion von a und t. In (1) eingesetzt, folgt schließlich:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial a} = 0. \tag{7}$$

Diese drei Gleichungen (5), (6), (7) bilden in einfachster Form das quasistatische Gleichungssystem für eine autobarotrope Schicht, die im Grundzustand entweder ruht oder sich gleichmäßig translatorisch bewegt. Die beiden willkürlichen Funktionen χ und ψ sind durch die Grenzflächenbedingungen zu bestimmen.

Lagern n autobarotrope Schichten übereinander, so hat man für jede Schicht ein Gleichungssystem (5), (6), (7), mit $2n$ willkürlichen Funktionen χ und ψ, die man wieder durch die Bedingungen an den Grenzflächen bestimmen kann.

113. Eine Schicht. Laplacesche, Lagrangesche und Newtonsche Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Zunächst soll nur eine einzige Schicht vorliegen, die nach unten durch eine starre Horizontalebene begrenzt ist. Wir bezeichnen die Werte der Variablen, die sich auf diese Grenzfläche beziehen, mit dem Index 0. Daß an dieser Grenzfläche keine Vertikalbewegung vorkommt, wird also durch $z_0 = 0$ ausgedrückt. Dieses in die Gleichung **112** (6) eingesetzt, ergibt:

$$\psi(a, t) = S_0 p_0 .$$

Setzt man diesen Wert von ψ in **112** (7) ein, so ergibt sich die untenstehende Gleichung (1), und durch Einsetzen dieses Wertes in **112** (6) erhält man die Gleichung (2). Schließlich ergibt sich die Gleichung (3), indem man die Gleichung **112** (5) für die speziellen Werte $P = P_0$, $p = p_0$ aufschreibt, und diese spezielle Gleichung von der allgemeinen **112** (5) abzieht. Die Störungsgleichungen für eine Schicht, die nach unten durch einen starren horizontalen Boden begrenzt ist, werden somit:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + S_0 \frac{\partial p_0}{\partial a} = 0 . \tag{1}$$

$$S p + g z - S_0 p_0 = 0 . \tag{2}$$

$$P\frac{\partial x}{\partial a} + p - P_0 \frac{\partial x}{\partial a} - p_0 = 0 . \tag{3}$$

Weiter werden wir mit dem Index 1 die speziellen Werte der Variablen an der oberen Grenzfläche bezeichnen, und zwar werden wir zwei verschiedene Fälle betrachten: 1. daß die obere Grenzfläche, genau wie der Boden, eine starre Horizontalebene mit der Vertikalbewegung Null ist: $z_1 = 0$; und 2. daß die obere Grenzfläche eine freie Fläche mit verschwindendem Störungsdruck ist: $p_1 = 0$.

Im Falle der *starren Oberfläche* erhält man wegen $z_1 = 0$ aus den Gleichungen (2) und (3):

$$S_1 p_1 - S_0 p_0 = 0 .$$

$$P_1 \frac{\partial x}{\partial a} + p_1 - P_0 \frac{\partial x}{\partial a} - p_0 = 0 .$$

Wenn man hier p_1 eliminiert und nach p_0 auflöst, findet man:

$$p_0 = S_1 \frac{P_0 - P_1}{S_0 - S_1} \frac{\partial x}{\partial a} = -Q_0 \frac{P_0 - P_1}{Q_0 - Q_1} \frac{\partial x}{\partial a} ,$$

wo im letzten Ausdruck die Dichten anstatt der spez. Volumina eingeführt worden sind. Setzt man diesen Wert von p_0 in (1) ein, so findet man zur Bestimmung der Horizontalverschiebung x die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{P_0 - P_1}{Q_0 - Q_1} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} . \tag{4}$$

Durch Einsetzen desselben Wertes von p_0 in (3) findet man als Wert des Störungsdruckes:

$$p = - \frac{Q_0 (P - P_1) + Q_1 (P_0 - P)}{Q_0 - Q_1} \frac{\partial x}{\partial a} , \tag{5}$$

und setzt man schließlich diesen Wert des Störungsdruckes in (2) ein, so folgt

$$g z = \frac{(Q_0 - Q_1)(P - P_1) - (Q - Q_1)(P_0 - P_1)}{Q (Q_0 - Q_1)} \frac{\partial x}{\partial a} \tag{6}$$

zur Bestimmung der Vertikalverschiebung z.

Im Falle der *freien Oberfläche* erhält man wegen $p_1 = 0$ aus (3) durch Auflösung nach p_0:

$$p_0 = -(P_0 - P_1) \frac{\partial x}{\partial a} .$$

Wenn man diesen Wert von p_0 in (1) einsetzt, findet man zur Bestimmung der Horizontalverschiebung x die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{P_0 - P_1}{Q_0} \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} . \tag{7}$$

Durch Einsetzen desselben Wertes von p_0 in (3) ergibt sich für den Störungsdruck:

$$p = -(P - P_1) \frac{\partial x}{\partial a} , \tag{8}$$

und wenn man diesen Wert von p mit dem speziellen obigen von p_0 in (2) einsetzt, erhält man

$$gz = \left(\frac{P - P_1}{Q} - \frac{P_0 - P_1}{Q_0}\right)\frac{\partial x}{\partial a} \tag{9}$$

zur Bestimmung der Vertikalverschiebung z.

Sowohl bei der starren wie auch bei der freien Oberfläche reduziert sich also das Problem auf die Integration der Gleichung der schwingenden Saite (4) oder (7), welche die Horizontalverschiebung gibt, wonach sich unmittelbar auch die Werte der Vertikalverschiebung und des Störungsdruckes ergeben. Die Lösung läßt sich in beiden Fällen in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{cases} x = A\,\varphi(X - \tilde{\omega}\,t)\,, \\ z = C\,\varphi'(X - \tilde{\omega}\,t)\,, \\ p = D\,\varphi'(X - \tilde{\omega}\,t)\,. \end{cases} \tag{10}$$

Während die Horizontalamplitude A eine Konstante ist, sind die Vertikalamplitude C und die Druckamplitude D von der Vertikalkoordinate P abhängig. φ ist eine willkürliche Funktion, und X ist die Horizontalkoordinate eines Teilchens in der gleichförmigen Grundbewegung mit der Horizontalgeschwindigkeit U, also:

$$X = a + Ut\,. \tag{11}$$

Im Falle der *starren Oberfläche* ergibt sich dann aus (4):

$$(\tilde{\omega} - U)^2 = \frac{P_0 - P_1}{Q_0 - Q_1}\,,$$

oder nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ aufgelöst:

$$\tilde{\omega} = U \pm \sqrt{\frac{P_0 - P_1}{Q_0 - Q_1}}\,. \tag{12}$$

Aus (6) und (5) erhalten wir ferner:

$$C = \frac{A}{g}\,\frac{(Q_0 - Q_1)(P - P_1) - (Q - Q_1)(P_0 - P_1)}{Q(Q_0 - Q_1)}\,. \tag{13}$$

$$D = -A\,\frac{Q_0(P - P_1) + Q_1(P_0 - P)}{Q_0 - Q_1}\,. \tag{14}$$

Die Vertikalamplitude verschwindet, wie man sieht, sowohl am Boden, für $P = P_0$ und $Q = Q_0$, wie auch an der starren Oberfläche, für $P = P_1$ und $Q = Q_1$. Ganz oben und ganz unten hat man also reine Longitudinalbewegung, während sonst in der Schicht auch Vertikalbewegung auftritt, und zwar ist C/A immer positiv, solange die Barotropierelation $Q = Q(P)$ in einem PQ-Diagramm durch eine konvexe Kurve dargestellt wird. Dies ist unter normalen Verhältnissen, wenn keine Konden-

sation von Wasserdampf auftritt, auch der Fall, da die Kompressibilität mit zunehmendem Druck immer abnimmt.

Im Falle einer *freien Oberfläche* erhalten wir, den Gleichungen (12), (13), (14) entsprechend, für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$, die Vertikalamplitude C und die Druckamplitude D:

$$(15)\quad \tilde{\omega} = U \pm \sqrt{\frac{P_0 - P_1}{Q_0}} = U \pm \sqrt{S_0 (P_0 - P_1)}\,.$$

$$(16)\quad C = \frac{A}{g}\left(\frac{P - P_1}{Q} - \frac{P_0 - P_1}{Q_0}\right) = \frac{A}{g}\left[S(P - P_1) - S_0(P_0 - P_1)\right].$$

$$(17)\quad D = -A(P - P_1)\,.$$

Diese Vertikalamplitude verschwindet nur an der unteren Grenzfläche, und außerdem ist hier C/A bei der gewöhnlichen Barotropierelation immer negativ. Der absolute Betrag von C nimmt dann stetig nach oben zu und erreicht seinen Maximalwert

$$(16')\qquad |C|_{\max} = \frac{|A|}{g}\,\frac{P_0 - P_1}{Q_0}$$

an der freien Oberfläche.

Vergleicht man zwei Schichten, die sich nur dadurch unterscheiden, daß die eine nach oben starr begrenzt, die andere aber frei ist, so findet man, daß bei gleich großen Horizontalamplituden im gleichen Druckniveau der absolute Betrag der Vertikalamplitude im Falle der starren Oberfläche (13) immer kleiner ist als im Falle der freien Oberfläche (16). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist gleichzeitig in der Schicht mit starrer Oberfläche größer.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit besteht, wie früher schon angegeben, aus einem konvektiven und einem dynamischen Gliede, von denen wir jetzt nur das dynamische, $\tilde{\omega}_{\text{dyn}}$, in Betracht ziehen wollen. Wir beginnen mit dem Fall einer sehr dünnen Schicht, wo also P_1 von P_0 und Q_1 von Q_0 nur unendlich wenig abweicht. Zwischen den beiden parallelen, einander unendlich nahen starren Grenzflächen ist dann nur eine reine Longitudinalbewegung möglich, denn im Ausdruck (13) von C ist in diesem Falle der Nenner klein von erster, der Zähler jedoch klein von zweiter Ordnung. Die dynamische Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird:

$$(18)\qquad \tilde{\omega}_{\text{dyn}} = \sqrt{\frac{dP}{dQ}}\,.$$

Da P und Q bei dem vorausgesetzten indifferenten Gleichgewichte durch die adiabatische Beziehung miteinander verknüpft sind, ist dies gerade die LAPLACE*sche Schallgeschwindigkeit*. Ist dagegen die Oberfläche frei,

so daß nach oben hin zunehmende Vertikalbewegungen auftreten, so ist der Nenner des Radikanden nicht mehr $Q_0 - Q_1$, sondern Q_0. Für den Druckunterschied im Zähler können wir aber, nach der Gleichgewichtsgleichung, $P_0 - P_1 = g\,Q_0(c_1 - c_0)$ schreiben, wenn $c_1 - c_0$ die Schichtdicke ist, was nach Einsetzen

$$\tilde{\omega}_{\text{dyn}} = \sqrt{g\,(c_1 - c_0)} \tag{19}$$

ergibt. Dies ist die bekannte LAGRANGE*sche Formel,* nach welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit langer Wellen in seichten Flüssigkeitsschichten gleich der Fallgeschwindigkeit ist, die ein frei fallender Körper nach einer Fallhöhe gleich der halben Schichtdicke erreicht. Im LAPLACEschen Fall hat man rein elastische Fortpflanzungsenergie, die auf Expansion und Kompression beruht, im LAGRANGEschen Fall dagegen ist die Fortpflanzungsenergie rein gravitationell, die Teilchen heben und senken sich ohne merkbare Volumenänderung (LAGRANGE selbst betrachtete bekanntlich nur den Fall der vollkommenen Inkompressibilität).

Geht man nun zu Schichten größerer Mächtigkeit über, so muß man für die dynamischen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die vollständigen Formeln

$$\tilde{\omega}_{\text{starr}} = \sqrt{\frac{P_0 - P_1}{Q_0 - Q_1}}, \qquad \bar{\omega}_{\text{frei}} = \sqrt{\frac{P_0 - P_1}{\;}} = \sqrt{S_0(P_0 - P_1)} \tag{20}$$

heranziehen. Die erstere Formel gibt für den Fall der starren Grenzfläche immer kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeiten als die LAPLACEsche (18). Denn die Kurve $Q = Q(P)$ ist, wie gesagt, eine konvexe Kurve, und die durch den Differentialquotienten dQ/dP gegebene Tangente hat eine kleinere Neigung als die durch den Differenzenquotienten gegebene Sekante. Andererseits zeigt die zweite Formel die selbstverständliche Tatsache, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Schichtdicke wächst.

Bei zunehmender Schichtdicke streben die immer abnehmende Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei starrer Oberfläche und die immer zunehmende bei freier Oberfläche gegen den gleichen Grenzwert. Sie werden miteinander identisch, wenn an der oberen Grenzfläche die Dichte des Mediums gleich Null wird; dies ist z. B. für die Atmosphäre der Fall, wenn es sich um Störungsbewegungen in der ganzen adiabatischen Atmosphäre handelt. Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die für die freie oder starre Oberfläche identisch dieselbe ist, hat den Wert:

$$\tilde{\omega}_{\text{dyn}} = \sqrt{\frac{P_0}{Q_0}} = \sqrt{S_0 P_0}, \tag{21}$$

und ist gerade die NEWTON*sche Schallgeschwindigkeit am Erdboden,* da P_0 und S_0 die unter statischen Verhältnissen zusammengehörenden Werte von

Druck und spez. Volumen sind. Wenn wir die Gasgleichung $S_0 P_0 = R\Theta_0$ anwenden, wo für atmosphärische Luft $R = 287$ ist, und die Temperatur am Erdboden gleich $0°$ C setzen, d. h. $\Theta_0 = 273°$, so erhalten wir den bekannten Wert $\tilde{\omega}_{\text{dyn}} = \sqrt{287 \cdot 273} = 280$ m/sec.

Wir erhalten somit das schon in **104** gefundene Resultat: wenn wir die Atmosphäre als eine einzige barotrope Schicht in adiabatischem Gleichgewichte auffassen können, so pflanzen sich Wellen, deren Wellenlänge im Verhältnis zur Höhe der adiabatischen Atmosphäre (27850 m) groß ist, mit NEWTONscher Schallgeschwindigkeit fort.

Um den Zusammenhang zwischen den drei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, der LAPLACEschen, der LAGRANGEschen und der NEWTONschen, noch von einer anderen Seite zu betrachten, können wir für den statischen Druckunterschied zwischen der unteren und oberen Grenzfläche

$$P_0 - P_1 = \int_{c_0}^{c_1} gQ\,dc = g\bar{Q}\,(c_1 - c_0) \tag{22}$$

schreiben, wo $c_1 - c_0$ die Schichtdicke ist und $\bar{Q}$ eine gewisse mittlere Dichte innerhalb der Schicht. Führen wir dies in die beiden Formeln (20) ein, so erhalten wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ausgedrückt durch verallgemeinerte LAGRANGEsche Formeln:

$$\tilde{\omega}_{\text{starr}} = \sqrt{\frac{\bar{Q}}{Q_0 - Q_1}\, g\,(c_1 - c_0)}\,, \qquad \tilde{\omega}_{\text{frei}} = \sqrt{\frac{\bar{Q}}{Q_0}\, g\,(c_1 - c_0)}\,. \tag{23}$$

Im Falle der Inkompressibilität, $\bar{Q} = Q_0 = Q_1$, ergibt die erste Formel, wie zu erwarten, eine unendliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die zweite ergibt die klassische LAGRANGEsche. Beide Formeln zeigen, daß bei zunehmender Kompressibilität und Heterogenität die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten abnehmen, im ersteren Falle von dem Grenzwert ∞ ab, im letzteren Falle von dem LAGRANGEschen Grenzwert $\sqrt{g\,(c_1 - c_0)}$ ab.

114. Ein System von n autobarotropen Schichten. Wir betrachten übereinandergelagerte Schichten, die wir wie früher von unten beginnend mit $I, II, \ldots, K - I, K, K + I, \ldots, N$ numerieren, und deren Grenzflächen $0, 1, 2, \ldots, k - 1, k, \ldots, n - 1, n$ sind. Die Randbedingungen für die Grenzfläche k zwischen den Schichten K und $K + I$ sind jetzt die folgenden: die einander jeweilig gegenüberliegenden Teilchen sollen an der Grenzfläche dieselbe Vertikalkoordinate und denselben Druck haben, d. h. also:

$$z_k^K = z_k^{K+I} \quad \text{und} \quad p_k^K = p_k^{K+I}, \quad \text{wenn} \quad X_k^K = X_k^{K+I}. \tag{1}$$

Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn wir die oberen Indizes der Größen z und p fortlassen.

Aus der Gleichung **112** (5) folgt nun für den Druckunterschied zwischen der unteren und oberen Grenzfläche der Schicht K:

(2) $$(P_{k-1} - P_k)\frac{\partial x^K}{\partial a} + p_{k-1} - p_k = 0\,.$$

Für zwei einander gerade gegenüberliegende Teilchen beiderseits der Grenzfläche k ergibt sich andererseits nach **112** (6):

$$S_k^K p_k + g z_k = \psi^K \quad \text{und} \quad S_k^{K+I} p_k + g z_k = \psi^{K+I}\,, \quad \text{wenn} \quad X_k^K = X_k^{K+I}.$$

Hieraus folgt nun:

(3) $$p_k = \frac{\psi^K - \psi^{K+I}}{S_k^K - S_k^{K+I}}, \quad \text{wenn} \quad X_k^K = X_k^{K+I}.$$

Der entsprechende Ausdruck für p_{k-1} ergibt sich hieraus durch Verminderung aller Indizes um eine Einheit.

Diese Ausdrücke von p_k und p_{k-1} führt man nun in die Gleichung (2) ein und erhält:

(4) $$(P_{k-1} - P_k)\frac{\partial x^K}{\partial a} + \frac{\psi^{K-I} - \psi^K}{S_{k-1}^{K-I} - S_{k-1}^K} - \frac{\psi^K - \psi^{K+I}}{S_k^K - S_k^{K+I}} = 0\,.$$

Da diese Gleichung nur für $X^{K-I} = X^K = X^{K+I}$ gilt, muß man mit Ableitungen derselben vorsichtig sein. Während eine Ableitung nach der Zeit nicht gestattet ist, kann man jedoch die Ableitungen nach a bilden und aus der Gleichung (4) und **112** (7) entweder x oder ψ eliminieren. Behalten wir die Horizontalverschiebung x bei, so wird die Gleichung:

(5) $$(P_{k-1} - P_k)\frac{\partial^2 x^K}{\partial a^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{x^{K-I} - x^K}{S_{k-1}^{K-I} - S_{k-1}^K} - \frac{x^K - x^{K+I}}{S_k^K - S_k^{K+I}}\right\} = 0\,,$$

wo die abhängigen Veränderlichen die Horizontalverschiebungen in den drei aneinandergrenzenden Schichten $K - I$, K und $K + I$ sind.

Eine Gleichung dieser Form gilt für jede Schicht K, die eine Schicht sowohl über wie auch unter sich hat. Wir können deshalb K der Reihe nach die Werte $II, III, \ldots, N - I$ erteilen und erhalten dadurch $n-2$ Gleichungen. Dazu kommen noch die Gleichungen für die unterste und die oberste Schicht, die sich nach den jeweiligen Randbedingungen an den äußeren Grenzflächen vereinfachen. Die unterste Schicht I hat eine unbewegliche untere Grenzfläche; sie verhält sich, als ob sie an eine darunterliegende Schicht grenzt, die unendliche Dichte und keine Bewegung hat: $S_0^0 = 0, x^0 = 0$. Für diese Schicht nimmt also die Gleichung (5) die Form

(6) $$(P_0 - P_1)\frac{\partial^2 x^I}{\partial a^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{x^I}{S_0^I} - \frac{x^I - x^{II}}{S_1^I - S_1^{II}}\right\} = 0$$

an. Ist die oberste Grenzfläche eine unbewegliche starre Ebene, so hat man ganz entsprechend: $S_n^{N+I} = 0$, $x^{N+I} = 0$, und folglich aus (5):

$$(P_{n-1} - P_n)\frac{\partial^2 x^N}{\partial a^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{x^{N-I} - x^N}{S_{n-1}^{N-I} - S_{n-1}^N} - \frac{x^N}{S_n^N}\right\} = 0\,.$$

Ist andererseits die oberste Grenzfläche eine freie Oberfläche, so hat man in (5) gleichzeitig mit $K = N$ noch $S_n^{N+I} = \infty$ einzuführen, entsprechend einer Dichte Null oberhalb dieser Grenzfläche. Dadurch ergibt sich:

$$(P_{n-1} - P_n) \frac{\partial^2 x^N}{\partial a^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{x^{N-I} - x^N}{S_{n-1}^{N-I} - S_{n-1}^N} = 0 .$$

Diese beiden letzten Gleichungen lassen sich übrigens zu einer einzigen Gleichung zusammenfassen:

$$(P_{n-1} - P_n) \frac{\partial^2 x^N}{\partial a^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \frac{x^{N-I} - x^N}{S_{n-1}^{N-I} - S_{n-1}^N} - \frac{x^N}{S_n^N - S_n^{N+I}} \right\} = 0 , \tag{7}$$

wo man bei starrer Oberfläche $S_n^{N+I} = 0$ und bei freier Oberfläche $S_n^{N+I} = \infty$ zu setzen hat.

Wir haben in dieser Weise n partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten von der bekannten Form der Gleichung der schwingenden Saite erhalten, die die n Horizontalverschiebungen $x^I, x^{II}, \ldots, x^N$ bestimmen. Die Lösung für eine beliebige Schicht ist wieder von der Form:

$$x = A \varphi (X - \tilde{\omega} t) , \tag{8}$$

wo noch in jedem einzelnen Fall der betreffende obere Index zu den Größen x, A und X hinzuzufügen ist.

Wir führen jetzt dies in (5) ein. Wenn wir zur Abkürzung die neue Hilfskonstante

$$\eta_k = \frac{1}{S_k^K - S_k^{K+I}} \tag{9}$$

einführen, so ergibt sich:

$$\left\{ \begin{aligned} -\eta_{k-1}(\tilde{\omega} - U^{K-I})^2 A^{K-I} + [P_{k-1} - P_k + (\eta_{k-1} + \eta_k)(\tilde{\omega} - U^K)^2] A^K \\ - \eta_k (\tilde{\omega} - U^{K+I})^2 A^{K+I} = 0 . \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Für die unterste Schicht $K = I$ ist speziell $A^0 = 0$ und $\eta_0 = -\frac{1}{S_0^I}$ zu setzen. Für die oberste Schicht $K = N$ ist $A^{N+I} = 0$, wobei noch bei starrer Grenzfläche $\eta_n = 1/S_n^N$ und bei freier Oberfläche $\eta_n = 0$ zu setzen ist.

Führen wir noch zur Vereinfachung die Größen

$$\left\{ \begin{aligned} -\eta_{k-1}(\tilde{\omega} - U^{K-I})^2 = \lambda^K, \quad P_{k-1} - P_k + (\eta_{k-1} + \eta_k)(\tilde{\omega} - U^K)^2 = \mu^K, \\ -\eta_k (\tilde{\omega} - U^{K+I})^2 = \nu^K \end{aligned} \right. \tag{11}$$

ein, so erhalten wir die folgenden linearen homogenen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad \mu^I A^I + \nu^I A^{II} = 0 , \\
&\lambda^{II} A^I + \mu^{II} A^{II} + \nu^{II} A^{III} = 0 , \\
&\lambda^{III} A^{II} + \mu^{III} A^{III} + \nu^{III} A^{IV} = 0 , \\
&\qquad \cdots \\
&\lambda^{N-I} A^{N-II} + \mu^{N-I} A^{N-I} + \nu^{N-I} A^N = 0 , \\
&\lambda^N A^{N-I} + \mu^N A^N = 0 .
\end{aligned} \tag{12}$$

Bei nichtverschwindenden Werten der Konstanten A muß die Determinante verschwinden, also:

$$
(13)\qquad \begin{vmatrix}
\mu^I & \nu^I & (& 0 & & & \\
\lambda^{II} & \mu^{II} & \nu^{II} & 0 & & & \\
0 & \lambda^{III} & \mu^{III} & \nu^{III} & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \lambda^{N-I} & \mu^{N-I} & \nu^{N-I} \\
 & & & & 0 & \lambda^N & \mu^N
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Da die Koeffizienten λ, μ, ν in $\tilde{\omega}$ vom zweiten Grade sind, ist diese Determinantengleichung in $\tilde{\omega}$ vom Grade $2n$. Entsprechend gibt es $2n$ Wurzeln, von denen die reellen verschieden oder zusammenfallend sein können, die komplexen dagegen immer paarweise konjugiert komplex sind. Für jede Wurzel gibt es ein Wertesystem der Konstanten A, das durch die Gleichungen

$$
(14)\qquad \frac{A^I}{\Delta^I} = \frac{A^{II}}{\Delta^{II}} = \cdots = \frac{A^N}{\Delta^N}
$$

gegeben ist, wo $\Delta^I, \ldots, \Delta^N$ die Unterdeterminanten der Größen einer beliebigen Zeile der Determinante (13) sind.

Wenn die Horizontalamplitude A^K gefunden ist, so folgt aus **112** (5) für die Schicht K:

$$
(P^K - P_k) \frac{\partial x^k}{\partial a} + p^K - p_k = 0 ,
$$

wo P_k der spezielle Wert von P^K und p_k der spezielle Wert von p^K an der Grenzfläche k ist. Hier kann man aber nach (3) p_k durch ψ ersetzen, und diese Größe wiederum nach **112** (7) durch x. Es ergibt sich in dieser Weise für den Störungsdruck in der Schicht K:

$$
(15)\qquad \frac{\partial p^K}{\partial a} = -(P^K - P_k) \frac{\partial^2 x^K}{\partial a^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{x^K - x^{K+I}}{S_k^K - S_k^{K+I}} .
$$

Entsprechend erhalten wir aus **112** (6) und **112** (7):

$$
(16)\qquad \left\{
\begin{aligned}
g \frac{\partial z^K}{\partial a} &= -S^K \frac{\partial p^K}{\partial a} - \frac{\partial^2 x^K}{\partial t^2} \\
&= \quad S^K (P^K - P_k) \frac{\partial^2 x^K}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{(S^K - S_k^K + S_k^{K+I}) x^K - S^K x^{K+I}}{S_k^K - S_k^{K+I}} .
\end{aligned}
\right.
$$

Wenn wir hier den Ausdruck (8) von x^K und x^{K+I} einführen, finden wir schließlich den Störungsdruck p und die Vertikalverschiebung z bei der Störung. Die ganze Lösung für die Schicht K wird somit:

$$
(17)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x^K &= A^K \varphi(X^K - \tilde{\omega} t) , \\
z^K &= C^K \varphi'(X^K - \tilde{\omega} t) , \\
p^K &= D^K \varphi'(X^K - \tilde{\omega} t) ,
\end{aligned}
\right.
$$

wo die Vertikalamplitude C^K und die Druckamplitude D^K als Funktionen der Horizontalamplituden A^K und A^{K+I} durch die Formeln

$$gC^K = S^K(P^K - P_k)A^K + \frac{(S^K - S_k^K + S_k^{K+I})(\tilde{\omega} - U^K)^2 A^K - S^K(\tilde{\omega} - U^{K+I})^2 A^{K+I}}{S_k^K - S_k^{K+I}},$$

$$D^K = -(P^K - P_k)A^K - \frac{(\tilde{\omega} - U^K)^2 A^K - (\tilde{\omega} - U^{K+I})^2 A^{K+I}}{S_k^K - S_k^{K+I}}$$

gegeben sind, oder wenn wir die Größen η einführen:

$$(18)\quad \begin{cases} gC^K = S^K\{[P^K - P_k + \eta_k(\tilde{\omega} - U^K)^2]A^K - \eta_k(\tilde{\omega} - U^{K+I})^2 A^{K+I}\} \\ \qquad\qquad - (\tilde{\omega} - U^K)^2 A^K, \\ D^K = -(P^K - P_k)A^K - \eta_k[(\tilde{\omega} - U^K)^2 A^K - (\tilde{\omega} - U^{K+I})^2 A^{K+I}]. \end{cases}$$

Eine solche Lösung hat man für jede Schicht K.

Man verifiziert unmittelbar, daß man aus den obigen allgemeinen Formeln die im vorigen Abschnitt für eine einzige Schicht gefundenen spezielleren erhält.

115. Zwei Schichten. Wenn zwei Schichten I und II gegeben sind, so haben wir für die Störungskomponenten:

$$(1)\quad \begin{cases} x^I = A^I\varphi(X^I - \tilde{\omega}t), & x^{II} = A^{II}\varphi(X^{II} - \tilde{\omega}t), \\ z^I = C^I\varphi'(X^I - \tilde{\omega}t), & z^{II} = C^{II}\varphi'(X^{II} - \tilde{\omega}t), \\ p^I = D^I\varphi'(X^I - \tilde{\omega}t), & p^{II} = D^{II}\varphi'(X^{II} - \tilde{\omega}t). \end{cases}$$

Die Gleichung **114** (10) ergibt, wenn wir $K = I$ und $K = II$ setzen und den Grenzflächenbedingungen entsprechend $A^0 = A^{III} = 0$ einführen:

$$(2)\quad \begin{cases} [P_0 - P_1 + (\eta_0 + \eta_1)(\tilde{\omega} - U^I)^2]A^I - \eta_1(\tilde{\omega} - U^{II})^2 A^{II} = 0, \\ -\eta_1(\tilde{\omega} - U^I)^2 A^I + [P_1 - P_2 + (\eta_1 + \eta_2)(\tilde{\omega} - U^{II})^2]A^{II} = 0. \end{cases}$$

Nach **114** (18) erhält man für die beiden Vertikalamplituden:

$$(3)\quad \begin{aligned} gC^I &= [S^I(P^I - P_1) + (S^I\eta_1 - 1)(\tilde{\omega} - U^I)^2]A^I - S^I\eta_1(\tilde{\omega} - U^{II})^2 A^{II}, \\ gC^{II} &= [S^{II}(P^{II} - P_2) + (S^{II}\eta_2 - 1)(\tilde{\omega} - U^{II})^2]A^{II}, \end{aligned}$$

und für die beiden Druckamplituden:

$$(4)\quad \begin{aligned} D^I &= -[P^I - P_1 + \eta_1(\tilde{\omega} - U^I)^2]A^I + \eta_1(\tilde{\omega} - U^{II})^2 A^{II}, \\ D^{II} &= -[P^{II} - P_2 + \eta_2(\tilde{\omega} - U^{II})^2]A^{II}. \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen haben η_0, η_1, η_2 nach **114** (9) die folgenden Werte:

$$(5)\quad \eta_0 = -\frac{1}{S_0^I}, \qquad \eta_1 = \frac{1}{S_1^I - S_1^{II}}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{S_2^{II} - S_2^{III}},$$

wo

(6)
bei starrer Oberfläche $S_2^{III} = 0$,
bei freier Oberfläche $S_2^{III} = \infty$

zu setzen ist.

Das Verschwinden der Koeffizientendeterminante in den Gleichungen (2) gibt eine Gleichung vierten Grades in $\tilde{\omega}$, in der wir auch hier wie früher für den Fall zweier Schichten den Index I fortlassen und den Index II durch einen Strich ersetzen:

$$(7)\quad \begin{cases} (\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2)(\tilde{\omega} - U)^2(\tilde{\omega} - U')^2 + (\eta_0 + \eta_1)(P_1 - P_2)(\tilde{\omega} - U)^2 \\ \qquad + (\eta_1 + \eta_2)(P_0 - P_1)(\tilde{\omega} - U')^2 + (P_0 - P_1)(P_1 - P_2) = 0 . \end{cases}$$

Diese Gleichung liefert vier im allgemeinen verschiedene Werte für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$.

Wir werden die Wurzeln dieser Gleichung nur in dem Falle studieren, daß der Dichtesprung an der inneren Diskontinuitätsfläche klein ist. Es werden dann η_0 und η_2 klein im Vergleich zu η_1, und die Gleichung reduziert sich auf:

$$(8)\quad \begin{cases} (\eta_0 + \eta_2)(\tilde{\omega} - U)^2(\tilde{\omega} - U')^2 + (P_1 - P_2)(\tilde{\omega} - U)^2 \\ \qquad + (P_0 - P_1)(\tilde{\omega} - U')^2 + \frac{1}{\eta_1}(P_0 - P_1)(P_1 - P_2) = 0 . \end{cases}$$

Wenn die obere Schicht unendlich dünn ist, $P_1 - P_2 \to 0$, so ergibt sich hieraus nach Einführung von $\eta_0 = -Q_0$ und $\eta_2 = Q_2'$:

$$(8\text{a})\qquad (\tilde{\omega} - U)^2 = \frac{P_0 - P_1}{Q_0 - Q_2'}, \qquad (\tilde{\omega} - U')^2 = 0 .$$

Die erste Wurzel stimmt mit der für eine Schicht gefundenen **113** (12) überein, da hier $Q_2' = Q_1$ ist, während die andere Wurzel eine singuläre Lösung mit verschwindender Orbitalfrequenz liefert. Es ist jedoch wichtig zu beachten, daß $(\tilde{\omega} - U)^2$ und $(\tilde{\omega} - U')^2$ den entsprechenden dynamischen Schichtdicken proportional sind. Wenn auch für den Fall einer endlichen oberen Schichtdicke Wurzeln vorkommen sollten, die sich ähnlich verhalten, was sehr plausibel erscheint, so könnte die Gleichung (8) vereinfacht werden. Wir setzen also versuchsweise voraus, daß $(\tilde{\omega} - U)^2$ von der Größenordnung $\frac{1}{\eta_1}(P_0 - P_1)$ und $(\tilde{\omega} - U')^2$ von der Größenordnung $\frac{1}{\eta_1}(P_1 - P_2)$ ist. Die drei letzten Glieder auf der linken Seite von (8) werden dann von der gleichen Größenordnung $\frac{1}{\eta_1}(P_0 - P_1)(P_1 - P_2)$, während das erste Glied von der kleineren Größenordnung $\frac{\eta_0 + \eta_2}{\eta_1^2}(P_0 - P_1)(P_1 - P_2)$ wird, also von derselben Ordnung wie die schon früher vernachlässigten Glieder. Zwei angenäherte Werte der Wurzeln finden wir deshalb aus der Gleichung:

$$(9)\quad (P_1 - P_2)(\tilde{\omega} - U)^2 + (P_0 - P_1)(\tilde{\omega} - U')^2 + \frac{1}{\eta_1}(P_0 - P_1)(P_1 - P_2) = 0 .$$

Wenn wir nach $\tilde{\omega}$ auflösen und den Wert von η_1 einsetzen, ergeben sich die beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten:

$$(10)\quad \tilde{\omega} = \frac{(P_1 - P_2)U + (P_0 - P_1)U'}{P_0 - P_2} \pm \sqrt{\frac{(P_0 - P_1)(P_1 - P_2)}{P_0 - P_2}\left[S_1' - S_1 - \frac{(U' - U)^2}{P_0 - P_2}\right]} .$$

Die beiden übrigen noch in (8) enthaltenen Wurzeln findet man schließlich, wenn man (8) durch (9) dividiert und das Restglied vernachlässigt. Dies gibt die Gleichung:

$$(11)\quad \begin{aligned}(P_0 - P_1)(\tilde{\omega} - U)^2 + (P_1 - P_2)(\tilde{\omega} - U')^2 + \frac{(P_0 - P_2)}{\eta_0 + \eta_2} \\ - 4\frac{(P_0 - P_1)(P_1 - P_2)}{P_0 - P_2}(U' - U)^2 = 0 .\end{aligned}$$

Durch Auflösung nach $\tilde{\omega}$ und Einführung der Werte von η_0 und η_2 ergibt sich hieraus:

$$(12)\quad \tilde{\omega} = \frac{(P_0 - P_1)U + (P_1 - P_2)U'}{P_0 - P_2} \pm \sqrt{\frac{P_0 - P_2}{Q_0 - Q_2'} + 3\frac{(P_0 - P_1)(P_1 - P_2)}{(P_0 - P_2)^2}(U' - U)^2} .$$

Diese Formel gilt für den Fall einer starren Oberfläche. Bei freier Oberfläche hat man $Q_2' = 0$ zu setzen.

Der charakteristische Unterschied zwischen den beiden Wurzelgruppen (10) und (12) tritt sofort hervor, wenn wir den speziellen Fall betrachten, daß die beiden Schichten dieselbe Translationsgeschwindigkeit haben: $U = U'$. Denn in diesem Falle reduziert sich (12) auf die für eine einzige Schicht bekannte Formel:

$$(13)\quad \omega = U \pm \sqrt{\frac{P_0 - P_2}{Q_0 - Q_2'}},$$

mit $Q_2' = 0$ im Falle einer freien Oberfläche, also auf die Formeln **113** (12) oder (15), während die Formel (10) etwas Neues ergibt:

$$(14)\quad \omega = U \pm \sqrt{(S_1' - S_1)\frac{(P_0 - P_1)(P_1 - P_2)}{P_0 - P_2}}$$

Hieraus folgt: Die Wurzeln (12) geben große Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die nur wenig oder im Grenzfall (13) gar nicht durch die innere Schichtteilung beeinflußt werden, sondern im wesentlichen durch die Verhältnisse an den beiden äußeren Grenzflächen bestimmt sind; sie geben die *äußere Welle*, **92**, S. 320. Die Wurzeln (10) geben dagegen kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die besonders von den Werten der Parameter an der inneren Grenzfläche abhängig sind; sie geben die *innere Welle*, **92**, S. 320.

Wenn man die Werte von $(\tilde{\omega} - U)^2$ und $(\tilde{\omega} - U')^2$ aus den Gleichungen (2) bestimmt und in die Gleichung (11) für die äußere Welle einsetzt, so erhält man unter Vernachlässigung kleinerer Glieder:

$$A^2 - 2\left[1 + 2\frac{Q_0 - Q_2'}{P_0 - P_2}(U' - U)^2\right]AA' + A'^2 = 0 .$$

Wenn die Mächtigkeit der Flüssigkeitsschicht nicht allzu klein ist, wird das letzte Glied in der Klammer der Größenordnung nach gleich dem Quadrate des Verhältnisses zwischen dem Geschwindigkeitssprung und

der NEWTONschen Schallgeschwindigkeit; es ist folglich eine kleine Größe. In erster Annäherung erhalten wir also für das Verhältnis der Horizontalamplituden bei der äußeren Welle:

$$\frac{A}{A'} = 1 \pm 2(U' - U)\sqrt{\frac{Q_0 - Q_2'}{P_0 - P_2}}, \tag{15}$$

das immer sehr nahe gleich 1 und für den Fall eines verschwindenden Geschwindigkeitssprunges genau gleich 1 ist.

Für diesen Fall der freien Oberfläche erhält man aus der zweiten Gleichung (3) als Verhältnis der Vertikalamplituden an der inneren Grenzfläche und an der freien Oberfläche:

$$\frac{C_1}{C_2} = 1 - \frac{S_1'(P_1 - P_2)}{(\bar{\omega} - U')^2}. \tag{16}$$

Da $(\bar{\omega} - U')^2$ von der Größenordnung $S_0(P_0 - P_2)$ ist, wird das letzte Glied rechts immer kleiner als 1, d. h. über einem Wellenberg der inneren Grenzfläche liegt ein noch höherer Wellenberg der Oberfläche.

Die Wellenbewegung bei dieser äußeren Welle ist also im wesentlichen dieselbe wie in einer einzigen ungeteilten Schicht, entsprechend der Tatsache, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten auch wesentlich dieselben sind. Man sieht ferner, daß die dynamische Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser äußeren Welle etwas zunimmt, wenn an der Grenzfläche ein Geschwindigkeitssprung $U' - U$ vorhanden ist. Gleichzeitig geht das konvektive Glied in einen gewissen Mittelwert der beiden Schichtgeschwindigkeiten U und U' über, wobei sich diese Geschwindigkeiten im Verhältnis der Druckdifferenzen $P_0 - P_1$ und $P_1 - P_2$, d. h. im Verhältnis der Massen der Schichten geltend machen.

Wesentlich anders verhält sich die innere Welle. Für das Verhältnis der Horizontalamplituden findet man in diesem Falle aus der Gleichung (9) und einer der Gleichungen (2), wo η_0 und η_2 vernachlässigt werden können:

$$\frac{A}{A'} = -\frac{P_1 - P_2}{P_0 - P_1}. \tag{17}$$

Die Horizontalamplituden, die im übrigen numerisch umgekehrt proportional den Schichtmächtigkeiten sind, haben folglich entgegengesetzte Vorzeichen. Also: *bei der inneren Welle hat man in den beiden Schichten immer entgegengesetzt gerichtete Horizontalbewegungen.* Darin besteht der wesentliche Unterschied gegenüber der äußeren Welle. Dieser Unterschied zeigt sich übrigens in auffälliger Weise sowohl in der konvektiven wie in der dynamischen Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Im konvektiven Gliede machen sich die Schichtgeschwindigkeiten U und U' im umgekehrten Verhältnisse zu den Massen der Schichten geltend, d. h. *die Geschwindigkeit der dünnsten Schicht macht sich am*

stärksten konvektiv geltend, eine sehr überraschende Eigenschaft, auf die wir schon bei der Diskussion der reinen Trägheitswellen, S. 381, aufmerksam gemacht haben. Während der Geschwindigkeitssprung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der äußeren Welle nur wenig beeinflußte, kann sie die ganze Natur der inneren Wellenbewegung verändern: wenn das Quadrat des Geschwindigkeitssprunges dividiert durch den Druckunterschied zwischen unterster und oberster Fläche größer wird als der spez. Volumensprung an der Grenzfläche, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär. Die dynamische Fortpflanzung hört auf; man hat also *Instabilität des Grundzustandes*, selbst langer Wellen gegenüber.

Diese Gesetze gelten unabhängig davon, ob die obere Grenzfläche starr oder frei ist. Daß man in beiden Fällen im wesentlichen dieselben Erscheinungen erhält, rührt natürlich daher, daß an der oberen Grenzfläche die Vertikalbewegung selbst bei freier Oberfläche klein ist. Aus dem Ausdruck (16) für das Verhältnis der Vertikalamplituden an der inneren Grenzfläche und an der freien Oberfläche folgt nämlich in diesem Falle, daß das letzte Glied rechts gänzlich überwiegt. Denn der Zähler für eine nicht allzu kleine obere Schicht ist der Größenordnung nach gleich dem Quadrate der NEWTONschen Schallgeschwindigkeit, der Nenner aber nur gleich dem Quadrate der Grundgeschwindigkeit. Folglich haben C_1 und C_2 immer entgegengesetzte Vorzeichen, und es ist außerdem:

$$|C_1| \gg |C_2|, \tag{18}$$

d. h. über einem Wellenberg der inneren Grenzfläche liegt immer ein viel kleineres Wellental der freien Oberfläche.

Es wäre noch von Interesse zu untersuchen, mit welchem Grad von Genauigkeit die Wurzeln der Gleichung (7) durch die in den Gleichungen (8) bis (14) benutzte angenäherte Lösungsmethode dargestellt werden. Zu dem Zweck setzen wir:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}' + \tilde{\omega}'', \tag{19}$$

wo $\tilde{\omega}'$ die angenäherte Wurzel (10) oder (12) ist, während $\tilde{\omega}''$ eine kleine Größe ist, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Wenn wir zur Abkürzung die linke Seite von (7) mit $F(\tilde{\omega})$ bezeichnen, so erhalten wir folglich die Gleichung

$$F(\tilde{\omega}') + F'(\tilde{\omega}')\,\tilde{\omega}'' + \cdots = 0 \tag{20}$$

zur Bestimmung von $\tilde{\omega}''$ als Funktion von $\tilde{\omega}'$ und den Parametern des Problems.

Für den Fall der äußeren Welle ist $\tilde{\omega}'$ durch (12) gegeben; in (20) eingesetzt, ergibt sich dann, unter Vernachlässigung kleinerer Glieder:

$$\tilde{\omega}'' = \frac{[\eta_0(P_1 - P_2) - \eta_2(P_0 - P_1)]^2}{2\eta_1(\eta_0 + \eta_2)(P_0 - P_2)^2}\,\tilde{\omega}'. \tag{21}$$

$\tilde{\omega}''/\tilde{\omega}'$ ist also von der Größenordnung $(\eta_0 - \eta_2)/\eta_1$, d. h. die Wurzel (12) der äußeren Welle stellt eine sehr gute Näherung dar.

Für den Fall der inneren Welle ist $\tilde{\omega}'$ durch (10) gegeben; es ergibt sich dann in erster Näherung:

$$F(\tilde{\omega}') = -\eta_0 \frac{P_1 - P_2}{P_0 - P_1} (\tilde{\omega}' - U)^4 - \eta_2 \frac{P_0 - P_1}{P_1 - P_2} (\tilde{\omega}' - U')^4,$$

$$\tag{22} \tfrac{1}{2} F'(\tilde{\omega}') = \pm (P_0 - P_1)^{\frac{1}{2}} (P_1 - P_2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{-\frac{P_0 - P_2}{\eta_1} (U' - U)^2 + \frac{\eta_0}{P_0 - P_1} (\tilde{\omega}' - U)^2 - \frac{\eta_2}{P_1 - P_2} (\tilde{\omega}' - U')^2} \left[- (P_1 - P_2)(\tilde{\omega}' - U) + (P_0 - P_1)(\tilde{\omega}' - U') \right]$$

Hier ist $\tilde{\omega}' - U$ von der Größenordnung $U' - U$ und F folglich von der Größenordnung $(\eta_0 + \eta_2)(U' - U)^4$. Wenn die Wurzel von (22) auch von der Größenordnung $U' - U$ ist, so wird $\tilde{\omega}''/\tilde{\omega}'$ der Größenordnung nach gleich dem Quadrate des Verhältnisses zwischen dem Geschwindigkeitssprung und der NEWTONschen Schallgeschwindigkeit; die Wurzeln (10) stellen folglich eine gute Näherung dar. Wenn aber der Wurzelausdruck von (22) von kleinerer Größenordnung ist, so sind $\tilde{\omega}'$ und $\tilde{\omega}''$ von derselben Größenordnung, und die Wurzeln (10) stellen eine schlechte Näherung dar, da die Reihe (20) im allgemeinen nicht mehr konvergiert. Dies ist insbesondere auch für den Übergang zur Instabilität der Fall, wenn der Radikand gleich Null ist. Es wird dann sehr fraglich, ob das durch unser Näherungsverfahren gefundene Stabilitätskriterium, das uns besonders interessiert, auch den richtigen Verhältnissen entspricht. Um dies entscheiden zu können, werden wir eine andere exakte Bestimmung des Stabilitätskriteriums ausführen.

In der Gleichung (7) setzen wir:

$$\tag{23} \tilde{\omega} = \xi + \tfrac{1}{2}(U + U'),$$

d. h. $\tilde{\omega} - U = \xi + \frac{1}{2}\Delta U$, $\tilde{\omega} - U' = \xi - \frac{1}{2}\Delta U$, wo $\Delta U = U' - U$ der Geschwindigkeitssprung ist. Die Gleichung schreibt sich dann:

$$\tag{24} \xi^4 + a\xi^2 + 2b\xi + c = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$a = \frac{(\eta_0 + \eta_1)(P_1 - P_2) + (\eta_1 + \eta_2)(P_0 - P_1)}{\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2} \quad \tfrac{1}{2}(\Delta U)^2$$

$$\tag{25} b = \frac{(\eta_0 + \eta_1)(P_1 - P_2) - (\eta_1 + \eta_2)(P_0 - P_1)}{\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2} \frac{\Delta U}{2},$$

$$c = \frac{(P_0 - P_1)(P_1 - P_2)}{\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2} + \frac{(\eta_0 + \eta_1)(P_1 - P_2) + (\eta_1 + \eta_2)(P_0 - P_1)}{\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2} \frac{(\Delta U)^2}{4} + \frac{(\Delta U)^4}{16}$$

gesetzt ist. Da die Koeffizienten dieser Gleichung reell sind, ist der Übergang zur Instabilität durch das Vorhandensein einer Doppelwurzel gekennzeichnet, d. h. es muß neben (24) auch die aus ihr durch Ableitung nach ξ gebildete Gleichung bestehen:

$$\tag{26} 2\xi^3 + a\xi + b = 0.$$

Elimination von ξ aus diesen beiden Gleichungen gibt uns die folgende Relation zwischen den Koeffizienten a, b, c:

$$(a^2 - 4c)^2 c - b^2(27b^2 + a^3 - 36ac) = 0, \tag{27}$$

woraus wir durch Einführung der Ausdrücke (25) von a, b, c das exakte Stabilitätskriterium erhalten. Für kleine Dichte- und Geschwindigkeitssprünge an der Diskontinuitätsfläche kann die linke Seite dieser Gleichung in eine Doppelreihe nach steigenden Potenzen von $1/\eta_1$ und $(\Delta U)^2$ entwickelt werden; es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\eta_1} + \frac{(\Delta U)^2}{P_0 - P_2} - \frac{4}{\eta_1^2}(P_0 - 2P_1 + P_2)\,\frac{\eta_0(P_1 - P_2) - \eta_2(P_0 - P_1)}{(P_0 - P_2)^2}\\ + 3(\eta_0 + \eta_2)\frac{(\Delta U)^4}{(P_0 - P_2)^2}\left[1 - 9\frac{(P_0 - P_1)(P_1 - P_2)}{(P_0 - P_2)^2}\right] + \quad = 0.\end{aligned} \tag{27'}$$

Durch Nullsetzen der beiden ersten Glieder dieser Reihe ergibt sich nun das früher gefundene Stabilitätskriterium, das sich also in erster Annäherung als richtig erweist. Für größere Dichte- und Geschwindigkeitssprünge gilt aber dieses einfache Kriterium nicht mehr; dann muß vielmehr die vollständige Relation (27) herangezogen werden.

Um die Wurzeln der Gleichung vierten Grades (7) auch in anderen Fällen, selbst bei großen Werten des Dichte- und des Geschwindigkeitssprunges bestimmen zu können, läßt sich eine graphische Methode entwickeln. Wir deuten $(\tilde{\omega} - U)^2$ und $(\tilde{\omega} - U')^2$ als Koordinaten in einem cartesischen Koordinatensystem:

$$(\tilde{\omega} - U)^2 = x, \qquad (\tilde{\omega} - U')^2 = y. \tag{28}$$

Die Elimination von $\tilde{\omega}$ aus diesen Gleichungen ergibt:

$$(x - y)^2 = 2(U' - U)^2\left[x + y - \tfrac{1}{2}(U' - U)^2\right], \tag{29}$$

also die Gleichung einer Parabel, die im positiven Quadranten gelegen ist, in $x = y = \frac{1}{4}(U' - U)^2$ ihren Gipfelpunkt hat, und deren Achse mit den Koordinatenachsen einen Winkel von 45° bildet. *Diese Parabel hängt nur von dem Geschwindigkeitssprunge ab* und artet für $U = U'$ in die 45°-Gerade aus.

Mit den neuen Variablen x und y läßt sich die Frequenzengleichung (7) in der Form

$$\left[x + \frac{(\eta_1+\eta_2)(P_0-P_1)}{\eta_0\eta_1+\eta_0\eta_2+\eta_1\eta_2}\right]\left[y + \frac{(\eta_0+\eta_1)(P_1-P_2)}{\eta_0\eta_1+\eta_0\eta_2+\eta_1\eta_2}\right] - \frac{\eta_1^2(P_0-P_1)(P_1-P_2)}{(\eta_0\eta_1+\eta_0\eta_2+\eta_1\eta_2)^2} = 0 \tag{30}$$

schreiben. Dies ist in der xy-Ebene die Gleichung einer Hyperbel, deren Mittelpunkt die Koordinaten

$$-\frac{(\eta_1 + \eta_2)(P_0 - P_1)}{\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2}, \qquad -\frac{(\eta_0 + \eta_1)(P_1 - P_2)}{\eta_0\eta_1 + \eta_0\eta_2 + \eta_1\eta_2}$$

hat, und deren Asymptoten parallel den Koordinatenachsen sind. Mit derselben Annäherung wie früher reduzieren sich die Koordinaten dieses Mittelpunktes auf

$$\frac{P_0 - P_1}{Q_0 - Q_2'}$$

mit $Q_2' = 0$ bei freier Oberfläche. Der Mittelpunkt ist also in beiden Fällen im positiven xy-Quadranten gelegen. *Diese Hyperbel hängt nur von den Dichten und den Mächtigkeiten der Schichten ab.*

Die Wurzeln der Frequenzengleichung (7) sind nun gegeben durch die Koordinaten der Schnittpunkte von Hyperbel und Parabel. Die Schnittpunkte der Parabel mit dem einen Hyperbelast geben die beiden großen Wurzeln der äußeren Welle, die Schnittpunkte mit dem zweiten Hyperbelast geben die beiden kleinen Wurzeln der inneren Welle. Wenn der Scheitelpunkt der Parabel hinlänglich weit längs der 45°-Geraden hinausrückt, so verschwinden die Schnittpunkte mit dem Hyperbelast, der dem Anfangspunkt der Koordinaten am nächsten liegt: dies gibt den Fall der Instabilität.

Die beiden Gleichungen (9) und (11), die uns die beiden kleinen und die beiden großen Wurzeln lieferten, werden in der xy-Ebene durch zwei Geraden dargestellt, die die beiden Hyperbeläste vertreten. Die Gerade (9) geht angenähert durch die Schnittpunkte der Hyperbel mit den Koordinatenachsen, und die Gerade (11) steht senkrecht auf einer Geraden durch den Anfangspunkt der Koordinaten und den Mittelpunkt der Hyperbel.

Es ist besonders die innere Welle, die uns interessiert. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die obere Grenzfläche mit der Grenze der Atmosphäre, $P_2 = 0$, zusammenfällt, und daß der Druck P_0 an der unteren Grenzfläche gleich dem Normaldruck von 100 cbar ist. Führt man außerdem die Temperatur anstatt der Dichte ein, so wird die Formel (10):

$$\bar{\omega} : U + \frac{100 - P_1}{100} \Delta U \pm \sqrt{\frac{(100 - P_1) P_1}{100} \left\{ \frac{R(\Theta_1' - \Theta_1)}{P_1} - \frac{(\Delta U)^2}{100} \right\}}.$$

Die zehn ersten Spalten der nebenstehenden Tabellen geben den absoluten Betrag des dynamischen Gliedes für drei verschiedene Werte von $\Delta U = U' - U$ in Abhängigkeit von $\Delta \Theta = \Theta_1' - \Theta_1$ und P_1. Die leeren Gebiete der Tabellen entsprechen dem instabilen Fall.

Die letzte Spalte gibt die konvektive Fortpflanzungsgeschwindigkeit relativ zur Grundströmung in der unteren Schicht. Fügt man diese Geschwindigkeit $\frac{100 - P_1}{100} \Delta U$ zur dynamischen hinzu, so erhält man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit relativ zur Grundströmung in der unteren Schicht.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der inneren langen Wellen (m/sec).

$\Delta U = 0$ m/sec.

$\Delta\Theta°$ / P_1 cbar	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	6	8	10	$\frac{100 - P_1}{100} \Delta U$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	7	10	12	14	15	21	30	37	43	48	0
40	6	8	10	12	13	18	26	32	37	42	0
60	5	7	8	9	11	15	21	26	30	34	0
80	3	5	6	7	8	11	15	18	21	24	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\Delta U = 10$ m/sec.

$\Delta\Theta°$ / P_1 cbar	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	6	8	10	$\frac{100 - P_1}{100} \Delta U$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
20	6	9	11	13	15	21	30	37	43	48	8
40	3	7	9	11	12	18	26	32	37	42	6
60		5	7	8	10	15	21	26	30	34	4
80		3	4	6	6	10	15	18	21	24	2
100		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$\Delta U = 20$ m/sec.

$\Delta\Theta°$ / P_1 cbar	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	4	6	8	10	$\frac{100 - P_1}{100} \Delta U$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20
20		5	9	11	13	20	29	36	42	47	16
40			3	7	9	16	24	31	36	40	12
60					4	12	19	24	29	32	8
80						7	13	17	20	23	4
100						0	0	0	0	0	0

Fügt man noch die Geschwindigkeit U hinzu, so ergibt sich schließlich die absolute Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Diese resultierenden Geschwindigkeiten sind von derselben Größenordnung wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Zyklonen, sei es, daß diese stationär oder schnellaufend sind.

Elftes Kapitel.

Störung krummliniger Strömungen.

116. Die Störungen des zirkularen Wirbels im Falle einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit. Von der Störung gradliniger gehen wir jetzt zu der Störung krummliniger Strömungen über. Dabei werden nicht nur die alten Wellentypen in etwas modifizierter Form auftreten, sondern auch ganz neue Wellentypen. Diese Wellen hängen, statt von

der Schwere oder der Elastizität, von der Trägheit der Materie ab, statt gravitationeller oder elastischer Energie haben sie kinetische Fortpflanzungsenergie und sind somit den Wellen in **106** verwandt.

Wir werden zuerst einen Typus von Trägheitswellen betrachten, der den Schwerewellen täuschend ähnlich ist und wegen der Ähnlichkeit der Wirkung von Zentrifugalkraft und Schwerkraft auftreten kann.

Um das einfachste Beispiel solcher Wellen zu geben, betrachten wir einen an beiden Enden geschlossenen Hohlzylinder, der teilweise mit Wasser gefüllt ist und rasch um seine Achse rotiert. Die Flüssigkeit wird gegen die Wand des Zylinders gepreßt, und als freie Oberfläche stellt sich annähernd eine Zylinderfläche ein. Bei einer zweidimensionalen, in der Rotationsebene verlaufenden Störungsbewegung wirkt dann die Zentrifugalkraft auf die Teilchen der gestörten Zylinderfläche in ganz derselben Weise wie die Schwerkraft auf die Teilchen einer gestörten Wasserfläche. Daraus ersieht man unmittelbar, daß sich auf dieser Fläche Wellen fortpflanzen können, ähnlich den Schwerewellen auf einer ruhenden Wasserfläche.

Ist die Flüssigkeit eine heterogene Salzlösung, so hat jedes Teilchen einen seiner Dichte entsprechenden Gleichgewichtsabstand von der Achse, so daß man innerhalb der freien Oberfläche auch Zellularwellen antreffen kann, genau so wie bei den zellularen Schwerewellen.

Die Trägheitswellen von diesem Typus werden wir mit Rücksicht auf ihre Analogie zu den gewöhnlichen Schwerewellen, *gravoide Trägheitswellen* nennen.

Neben diesen gravoiden Trägheitswellen haben wir auch den anderen Typus von Trägheitsschwingungen und Wellen zu betrachten, die in **46** erwähnt wurden, und die den Torsionsschwingungen und Wellen in einem elastischen Ring ähnlich sind. Diese Störungen nennen wir *elastoide Trägheitsschwingungen* und *-wellen.*

Um solche Störungen, also elastoide und gravoide Trägheitswellen, näher zu betrachten, genügt es, die einfachste krummlinige Flüssigkeitsbewegung, den zirkularen Wirbel einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit, als Grundströmung zu wählen und die kleinen Störungen dieser Grundströmung zu untersuchen. Bei dieser Voraussetzung über Homogenität und Imkompressibilität werden wir nur gravoide Trägheitswellen vom nichtzellularen Typus erhalten, so daß wir in diesem Kapitel keine anderen zellularen Wellen studieren werden als die elastoiden und die gemischt elastoiden und gravoiden Trägheitswellen.

Das Studium eben dieses Typus von Trägheitswellen ist, wie wir sehen werden, von prinzipieller Bedeutung für die Theorie der Gezeiten.

In **81** haben wir die LAGRANGEschen Grundzustands- und Störungsgleichungen des allgemeinen zirkularen Wirbels aufgeschrieben. Für

unsere Zwecke genügt es jedoch, denjenigen speziellen Wirbel mit solidifiierbaren Zylinderflächen zu betrachten, bei dem die Winkelgeschwindigkeit der Grundströmung nur eine Funktion des Abstandes von der Zylinderachse ist, $\Omega = \Omega(a)$. In den Gleichungen **81** (2), (3) haben wir also das Glied $\partial\Omega/\partial c$ gleich Null zu setzen und außerdem noch die Vereinfachungen auszuführen, die aus der Homogenität und der Inkompressibilität des Mediums folgen.

Die Bewegungsgleichungen des Grundzustandes bleiben dieselben wie früher:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} -a\Omega^2 + S\frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= 0\,, \\ S\frac{\partial P}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= 0\,, \\ S\frac{\partial P}{\partial c} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} &= 0\,, \end{aligned}\right.$$

und die Kontinuitätsgleichung ist identisch erfüllt.

Als starre Grenzflächen sollen der Einfachheit halber nur Zylinderflächen um die Achse des zirkularen Wirbels in Frage kommen, d. h.

$$(2)\qquad F = a - a_0 = 0\,.$$

An diesen Flächen ist dann die kinematische Grenzbedingung

$$\Omega\frac{\partial F}{\partial b} = 0$$

identisch erfüllt.

Im Falle eines einzigen homogenen Mediums können keine Diskontinuitätsflächen vorkommen, und wir haben nur die Bedingung an einer freien Oberfläche zu berücksichtigen, die

$$P = P(a_1, b_1, c_1) = 0$$

erfordert.

Für die allgemeine Störung dieses Wirbels hat man nun die Bewegungsgleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\ddot{\varrho} - \Omega^2\varrho - 2a\Omega\dot{\psi} + (2a\Omega\dot{\varrho} + a^2\ddot{\psi})\frac{\partial\Omega}{\partial a}t - a\Omega^2\frac{\partial\varrho}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp+\varphi) = 0\,, \\ &a^2\ddot{\psi} \qquad + 2a\Omega\dot{\varrho} \qquad\qquad - a\Omega^2\frac{\partial\varrho}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial b}(Sp+\varphi) = 0\,, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad - a\Omega^2\frac{\partial\varrho}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp+\varphi) = 0 \end{aligned}$$

mit

$$\varphi = \varrho\frac{\partial\Phi}{\partial a} + \psi\frac{\partial\Phi}{\partial b} + z\frac{\partial\Phi}{\partial c} - \varrho\frac{\partial\Omega}{\partial a}\frac{\partial\Phi}{\partial b}t\,,$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$(4)\qquad \frac{\varrho}{a} + \frac{\partial\varrho}{\partial a} + \frac{\partial\psi}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial\varrho}{\partial b}\frac{\partial\Omega}{\partial a}t =$$

Wenn wir nur Wellenstörungen betrachten, die sich in Richtung der Grundströmung fortpflanzen, so ergibt sich sofort $f = 0$; an der starren Grenzfläche (2) besteht dann die kinematische Grenzflächenbedingung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \Omega \frac{\partial \varrho}{\partial b} = 0,$$

die sich in diesem Falle auf

$$\varrho = 0, \quad \text{wenn} \quad a = a_0 \tag{5}$$

reduziert.

An der freien Oberfläche ist schließlich:

$$p = p(a_1, b_1, c_1) = 0. \tag{6}$$

In den folgenden Abschnitten werden wir nun zu speziellen Integrationen dieses Gleichungssystems übergehen.

117. Gravoide Trägheitswellen. Zunächst betrachten wir die denkbar einfachste Grundströmung, nämlich den Fall, wo die ganze Flüssigkeit wie ein starrer Körper rotiert, d. h. $\Omega =$ konst. Gleichzeitig soll die äußere Kraft in der Rotationsebene in Richtung auf die Rotationsachse wirken; ihr Betrag sei ferner umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes von der Achse, so daß sich die Kraft durch das Potential $\Phi = -g\frac{a_1^2}{a}$ ausdrücken läßt.

Die Gleichungen des Grundzustandes werden dann:

$$\left\{\begin{aligned} -a\Omega^2 + S\frac{\partial P}{\partial a} + g\frac{a_1^2}{a^2} &= 0, \\ S\frac{\partial P}{\partial b} &= 0, \\ S\frac{\partial P}{\partial c} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{1a}$$

Durch Integration finden wir den Druck:

$$P = Q\left[g\frac{a_1^2}{a} + \frac{\Omega^2}{2}(a^2 - a_1^2)\right] + \text{konst.} \tag{1b}$$

Wir nehmen zunächst an, daß die Störungsbewegung *zweidimensional* ist und in der ab-Ebene vor sich geht, also von c unabhängig ist, d. h. $z = 0$, $\partial/\partial c = 0$.

Die Störungsgleichungen werden dann:

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{\varrho} - 2a\Omega\dot{\psi} + \frac{\partial}{\partial a}\left(Sp - \Omega^2 a\varrho + g\frac{a_1^2}{a^2}\varrho\right) &= 0, \\ a^2\ddot{\psi} + 2a\Omega\dot{\varrho} + \frac{\partial}{\partial b}\left(Sp - \Omega^2 a\varrho + g\frac{a_1^2}{a^2}\varrho\right) &= 0, \\ \frac{\varrho}{a} + \frac{\partial \varrho}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial b} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Wir suchen ein Integral der Form:

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho = A(a)\cos\mu[b-(\omega-\Omega)t], \\ \psi = B(a)\sin\mu[b-(\omega-\Omega)t], \\ Sp = D(a)\cos\mu[b-(\omega-\Omega)t], \end{cases}$$

wo μ eine ganze Zahl ist.

Diese Störung ist eine periodische Welle, die sich längs der Parallelkreise mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω fortpflanzt; μ gibt die Anzahl der Wellen auf der ganzen Peripherie an.

Beim Einsetzen in das Gleichungssystem (2) fällt der trigonometrische Faktor heraus, und es ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} -\mu^2(\omega-\Omega)^2 A + 2a\Omega\mu(\omega-\Omega)B + D' - \Omega^2(A+aA') + g\frac{a_1^2}{a^3}(aA'-2A) = 0, \\ -\mu^2(\omega-\Omega)^2 a^2 B + 2a\Omega\mu(\omega-\Omega)A - \mu D + \mu\Omega^2 aA - \mu g\frac{a_1^2}{a^2}A = 0, \\ \frac{1}{a}A + A' + \mu B = 0. \end{cases}$$

Nach Elimination von B und D erhält man als Differentialgleichung für die Radialamplitude:

$$(5)\qquad a^2A'' + 3aA' + (1-\mu^2)A = 0.$$

Diese CAUCHYsche Gleichung hat eine partikuläre Lösung der Form a^n. Durch Einsetzen dieses Ausdruckes ergibt sich zur Bestimmung von n die quadratische Gleichung:

$$n(n-1) + 3n + 1 - \mu^2 = 0,$$

d. h. $n = -1 \pm \mu$.

Das allgemeine Integral wird also:

$$(6)\qquad A = A_1 a^{\mu-1} + A_2 a^{-\mu-1}.$$

Das Gleichungssystem (4) ergibt dann die folgenden Werte von B und D:

$$(6')\qquad \begin{cases} B = -A_1 a^{\mu-2} + A_2 a^{-\mu-2}, \\ D = \left\{\mu\left(\frac{\omega-\Omega}{\Omega}\right)^2 + 2\frac{\omega-\Omega}{\Omega} + 1 - \frac{a_1^2 g}{a^3\Omega^2}\right\} A_1\Omega^2 a^{\mu} \\ \quad + \left\{-\mu\left(\frac{\omega-\Omega}{\Omega}\right)^2 + 2\frac{\omega-\Omega}{\Omega} + 1 - \frac{a_1^2 g}{a^3\Omega^2}\right\} A_2\Omega^2 a^{-\mu}. \end{cases}$$

Die rotierende Flüssigkeitsmasse soll jetzt durch eine starre Zylinderfläche vom Radius a_0 begrenzt sein. Die Grenzbedingung **116** (5) ergibt dann:

$$A(a_0) = 0.$$

Benutzt man dies, so kann man die Ausdrücke (6) auch in folgender Form schreiben:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
A &= A_0\left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\mu-1} - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\mu-1}\right],\\
B &= -\frac{A_0}{a_0}\left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\mu-2} + \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\mu-2}\right],\\
D &= a_0\Omega^2 A_0\left[\mu\left(\frac{\omega-\Omega}{\Omega}\right)^2\left\{\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\mu} + \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\mu}\right\}\right.\\
&\qquad\left. + \left(2\frac{\omega-\Omega}{\Omega} + 1 - \frac{a_1^2 g}{a^3\Omega^2}\right)\left\{\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\mu}\right\}\right].
\end{aligned}
$$

Die Analogie der Amplituden A und B mit den entsprechenden in **91** fällt sofort auf, nur ist die Exponentialfunktion der Vertikalkoordinate c hier durch eine Potenzfunktion der Radialkoordinate a ersetzt worden.

Aus dem Ausdruck von A erkennt man sogleich, daß eine zweite starre Zylinderfläche nicht eingeführt werden kann. Wir können aber verlangen, daß die Teilchen $a = a_1$ eine freie Oberfläche bilden sollen. Die Grenzflächenbedingung **116** (6) ergibt dann:

$$p(a_1) = 0,$$

oder als Gleichung für die Frequenz oder Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$
(8)\qquad \mu\left(\frac{\omega-\Omega}{\Omega}\right)^2 + 2\,\frac{\omega-\Omega}{\Omega}\,\frac{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{-\mu}}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu} + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{-\mu}} + \left(1 - \frac{g}{a_1\Omega^2}\right)\frac{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{-\mu}}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu} + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{-\mu}} = 0.
$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$
(9)\qquad k = \frac{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{-\mu}}{\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{\mu} + \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^{-\mu}} = \operatorname{tgh}\left(\mu\log\frac{a_1}{a_0}\right),
$$

so läßt sich (8) in der Form

$$
(10)\qquad \mu\left(\frac{\omega-\Omega}{\Omega}\right)^2 + 2k\,\frac{\omega-\Omega}{\Omega} + k\left(1 - \frac{g}{a_1\Omega^2}\right) = 0
$$

schreiben, oder aufgelöst:

$$
(10')\qquad \omega = \Omega\left(1 - \frac{k}{\mu}\right) \pm \Omega\,\frac{k}{\mu}\sqrt{1 - \frac{\mu}{k}\left(1 - \frac{g}{a_1\Omega^2}\right)}.
$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Welle besteht also aus einem konvektiven und einem dynamischen Gliede, die wir getrennt betrachten werden.

Zuerst merken wir uns folgendes:

k ist positiv für $a_1 > a_0$ und negativ für $a_1 < a_0$. Sein absoluter Betrag liegt immer zwischen 0 und 1, und zwar ergibt sich der Minimalwert für $\mu = 0$ und der Maximalwert für $\mu = \infty$.

Dies gibt die folgende Werteverteilung der konvektiven Winkelgeschwindigkeit:

Wenn die freie Oberfläche außerhalb der starren Zylinderfläche liegt, $a_1 > a_0$, so ist die konvektive Geschwindigkeit immer *kleiner* als die Grundgeschwindigkeit. Wenn die freie Fläche innerhalb des starren Zylinders liegt, ist dagegen die konvektive Geschwindigkeit immer *größer* als die Grundgeschwindigkeit, und zwar bleibt sie dabei immer kleiner als die doppelte Grundgeschwindigkeit. In beiden Fällen hat sie dieselbe Richtung wie die Grundgeschwindigkeit, der sie sich übrigens bei abnehmender Wellenlänge ($\mu \to \infty$) immer mehr nähert. Es ist noch zu beachten, *daß die konvektive Geschwindigkeit von der Anziehung unabhängig ist.*

Die anguläre dynamische Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist reell und die Wellen *stabil*, wenn der Radikand im Ausdrucke (10′) positiv ist, d. h.:

$$(11) \qquad \left(1 - \frac{g}{a_1 \Omega^2}\right) \frac{\mu}{k} - 1 < 0 .$$

Dies ist für alle Wellenlängen in den folgenden Fällen erfüllt:

a) $g > a_1 \Omega^2$, $k > 0$, also wenn die freie Fläche außen liegt und die dort herrschende Schwerebeschleunigung g größer ist als die Zentrifugalkraft $a_1 \Omega^2$; Spezialfall: reine Schwerewellen.

b) $g < a_1 \Omega^2$, $k < 0$, also wenn die freie Fläche innen liegt und die dort herrschende Schwere kleiner ist als die Zentrifugalkraft; Spezialfall: reine Trägheitswellen.

c) $g = a_1 \Omega^2$, k beliebig, die Schwere und die Zentrifugalkraft halten einander das Gleichgewicht an der freien Oberfläche.

Ist dagegen $g > a_1 \Omega^2, k < 0$, oder $g < a_1 \Omega^2, k > 0$, so wird der Radikand immer negativ, wenn man nur μ hinlänglich groß wählt; der Grundzustand ist dann instabil.

Die Orbitalbahnen der Teilchen sind Ellipsen:

$$(12) \qquad \frac{}{\left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\mu}\right]^2} + \frac{a^2 \psi^2}{\left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\mu} + \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\mu}\right]^2} = A_0^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 ,$$

mit der großen Achse längs der Parallelkreise. Das Verhältnis der Achsen ist durch $\left|\operatorname{tgh}\left(\mu \log \frac{a}{a_0}\right)\right|$ gegeben und erreicht somit seinen größten Wert an der freien Oberfläche. Mit abnehmender Wellenlänge wächst das Achsenverhältnis, und im Grenzfall des unendlichen μ wird die Orbitalbahn kreisförmig.

Die Stromlinien sind durch die Gleichung

$$(13) \qquad \left[\left(\frac{a}{a_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-\mu}\right] \cos \mu [b - (\dot{\omega} - \Omega) t] = K$$

gegeben. Man sieht leicht, daß die Stromlinien wie Kettenlinien in den Sektoren vom Sektorwinkel π/μ herunterhängen, wobei ihre Richtung in zwei aneinandergrenzenden Gebieten entgegengesetzt ist (Abb. 56a mit $\mu = 1$ und Abb. 56b mit $\mu = 4$).

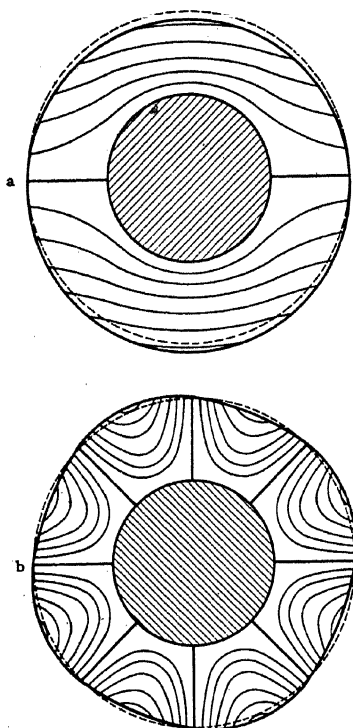



Abb. 56. Stromlinientypen bei gravoiden Trägheitswellen.

Grenzübergang zu angenähert gradliniger Grundströmung.

Es ist von großem Interesse, zu untersuchen, wie sich diese zweidimensionalen Trägheitswellen gestalten, wenn wir zu dem Grenzfall einer verschwindenden Krümmung der Grundströmung übergehen.

Es gehen dann sowohl a_1 wie auch a_0 gegen Unendlich, aber ihre Differenz, $h = a_1 - a_0$, soll endlich bleiben. Ferner wird μ unendlich, aber die Wellenzahl in linearem Maße, $\mu' = \mu/a$, d. h. die Anzahl Wellen pro Länge 2π, soll endlich bleiben. Bezeichnen wir die lineare Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch $\tilde{\omega}$ und die Grundströmung in linearem Maße durch U, so ist $\tilde{\omega} = \omega a$ und $U = \Omega a$. Aus (10′) ergibt sich dann nach Multiplikation mit a und Übergang zur Grenze $a \to \infty$:

$$\tilde{\omega} = U \pm \sqrt{\frac{k a}{\mu' a_1}(g - a_1 \Omega^2)}\,.$$

Jetzt ist aber:
$$k = \operatorname{tgh}\left(\mu' a \log\left(1 + \frac{h}{a_0}\right)\right) \approx \operatorname{tgh} \mu' h\,,$$

und $g - a_1 \Omega^2 = g'$ stellt die effektive Schwere in der freien Oberfläche dar, so daß man

$$\omega = U \pm \sqrt{\frac{g'}{\mu'} \operatorname{tgh} \mu' h} \tag{14}$$

erhält in Übereinstimmung mit **105** (7).

Insbesondere ergibt sich hieraus für Wellen, deren Wellenlänge im Vergleich zur Tiefe sehr klein ist, die STOKESsche Formel für gewöhnliche Oberflächenwellen auf tiefem Wasser:

$$\tilde{\omega} = U \pm \sqrt{\frac{g'}{\mu'}}\,, \tag{14a}$$

und für Wellenlängen, die im Vergleich zur Tiefe sehr lang sind, die LAGRANGEsche Formel für lange Wellen:

(14b) $$\tilde{\omega} = U \pm \sqrt{g'h}\,.$$

Diese Formel läßt sich übrigens auch auf direktem Wege vermittels des Grenzüberganges $a \to \infty$, während μ endlich bleibt, herleiten.

Für die Amplituden in linearem Maße, A und aB, ergibt sich ferner, indem in (7) a_0 durch $a - \alpha$ ersetzt wird:

(15) $$\begin{aligned} A &= A_0 \lim_{a\to\infty}\left[\left(1-\frac{\alpha}{a}\right)^{-\mu' a} - \left(1-\frac{\alpha}{a}\right)^{\mu' a}\right] = A_0\left[e^{\mu'\alpha} - e^{-\mu'\alpha}\right], \\ aB &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; = -A_0\left[e^{\mu'\alpha} + e^{-\mu'\alpha}\right], \end{aligned}$$

also die bei den Schwerewellen geläufigen Ausdrücke der Vertikal- und Horizontalamplitude mit α als Vertikalkoordinate, vgl. **91**.

Hieraus erhält man speziell für kurze Wellen:

(15a) $$A = A_0 e^{\mu'\alpha}, \qquad aB = -A_0 e^{\mu'\alpha},$$

und für lange Wellen:

(15b) $$A = 2A_0 \mu'\alpha\,, \qquad aB = -2A_0\,.$$

Die Gleichung (12) der Orbitalbahnen wird entsprechend, mit $a\psi = \xi$:

(16) $$\frac{\varrho^2}{\sinh^2\mu'\alpha} + \frac{\xi^2}{\cosh^2\mu'\alpha} = 4A_0^2\,,$$

und die Gleichung (13) der Stromlinien schreibt sich, mit $ab = \beta$:

(17) $$\sinh\mu'\alpha\cos\mu'[\beta - (\tilde{\omega} - U)\,t] = \tfrac{1}{2}K\,,$$

beides wieder altbekannte Ausdrücke, vgl. **105**.

118. Einfachste elastoide Drehschwingungen einer krummlinigen Strömung. Nachdem wir in **117** von c unabhängige Integrale untersucht haben, fragen wir jetzt nach Integralen, die von b unabhängig sind. Der Einfachheit halber sehen wir von der äußeren Kraft ab, setzen aber nicht mehr $\Omega =$ konst. voraus. Die Störungsgleichungen **116** (3) und (4) reduzieren sich dann auf:

(1) $$\begin{aligned} &\ddot{\varrho} - \Omega^2\varrho - 2a\Omega\dot{\psi} + (a^2\ddot{\psi} + 2a\Omega\dot{\varrho})\frac{\partial\Omega}{\partial a}t - a\Omega^2\frac{\partial\varrho}{\partial a} + \frac{v}{\partial a}Sp = 0, \\ &a^2\ddot{\psi} \qquad + 2a\Omega\dot{\varrho} = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a\Omega^2\frac{\partial\varrho}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial c}Sp = 0, \\ &\frac{\varrho}{a} + \frac{\partial\varrho}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} = 0. \end{aligned}$$

Wir suchen eine Lösung der Form:

(2) $$\begin{cases} \varrho = A(a)\cos\lambda c\cos\nu t\,, \\ \psi = B(a)\cos\lambda c\sin\nu t\,, \\ z = C(a)\sin\lambda c\cos\nu t\,, \\ Sp = D(a)\cos\lambda c\cos\nu t\,. \end{cases}$$

Eine solche Lösung stellt eine stehende Schwingung dar, die in der Richtung parallel der Wirbelachse eine Wellenzahl λ oder eine Wellenlänge $L_c = 2\pi/\lambda$ hat. Die Form der Lösung setzt also voraus, *daß man die äquidistanten Ebenen senkrecht zur Rotationsachse* $c = n\frac{L_c}{2}$ *solidifiieren kann.* Die Frequenz der Schwingungen ist ν und die Periode $T = 2\pi/\nu$, die Amplituden sind vorläufig noch unbekannte Funktionen von a.

Durch Einsetzen von (2) in (1) ergibt sich nach Elimination des Gliedes mit t mit Hilfe der zweiten Gleichung (1) das folgende System von Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} -\nu^2 A \quad - \Omega^2 A - 2a\Omega\nu B - a\Omega^2 A' + D' &= 0, \\ -a^2\nu^2 B \qquad\qquad - 2a\Omega\nu A \qquad\qquad &= 0, \\ -\nu^2 C \qquad\qquad\qquad + a\Omega^2\lambda A - \lambda D &= 0, \\ \frac{A}{a} + A' + \lambda C \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination von B, C und D ergibt sich für die Radialamplitude A:

$$(4)\qquad A'' + \frac{1}{a}A' + \left(\frac{2\Omega\lambda^2}{\nu^2}(2\Omega + a\Omega') - \lambda^2 - \frac{1}{a^2}\right)A = 0.$$

Diese Gleichung wird im nächsten Abschnitt näher untersucht. Hier beschränken wir uns auf die Diskussion des Spezialfalles, *wo* Ω *von* a *unabhängig ist.* Wir haben dann die vereinfachte Gleichung:

$$(4\text{a})\qquad A'' + \frac{1}{a}A' + \left(\frac{4\Omega^2\lambda^2}{\nu^2} - \lambda^2 - \frac{1}{a^2}\right)A = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich allgemein durch BESSELsche Funktionen erster Ordnung mit dem Argument $\varkappa a$ integrieren, wo

(5)

ist. Die Nullpunkte der Funktion A bestimmen *solidifiierbare koaxiale Zylinderflächen um die Wirbelachse,* die zusammen mit den solidifiierbaren Ebenen ringförmige Zellen von rechteckigem Querschnitt bestimmen: *die stehenden Schwingungen sind zellular.*

Aus der Theorie der BESSELschen Differentialgleichung (4a) folgt weiter, daß Nullpunkte nur dann auftreten können, wenn $\varkappa$ reell ist, d. h. nach (5), wenn $\nu^2 \leqq 4\Omega^2$, oder, wenn man zu der Periode T und zu der Umlaufszeit T_0 im gegebenen Wirbel übergeht, wenn $T \geqq \frac{1}{2}T_0$. Es ergibt sich also das wichtige Resultat:

Die stehenden elastoiden Eigenschwingungen können nie kürzere Perioden haben als die halbe Periode des Umlaufes im Wirbel des Grundzustandes.

Man sieht weiter, daß, wenn T gegen den Grenzwert $\frac{1}{2}T_0$ konvergiert, das Verhältnis $\varkappa/\lambda$ gegen Null konvergiert. Man hat also die

kleinste Periode der elastoiden Schwingungen in Röhren, deren laterale Ausdehnung klein ist im Vergleich zu ihrer radialen Ausdehnung. D. h.:

Die kleinste Schwingungsdauer $\frac{1}{2}T_0$ *tritt in scheibenförmig flachen Röhren auf.*

Die immer zwischen 1 und ∞ liegende Verhältniszahl a_1/a_0, wo a_1 der Radius der äußeren und a_0 derjenige der inneren zylindrischen Grenzfläche der Röhre ist, werden wir das *Krümmungsverhältnis* der Röhre nennen. Eine Röhre heißt um so stärker gekrümmt, je größer diese Verhältniszahl ist. Wir haben *schwach gekrümmte Röhren*, wenn a_1/a_0 in der Nähe von 1 ist. Im Grenzfall $a_1/a_0 = \infty$, d. h. $a_0 = 0$, fällt die innere Zylinderfläche mit der Zylinderachse zusammen, und *die unendlich stark gekrümmte Röhre* ist nichts Anderes als der einfach zusammenhängende Raum innerhalb einer einzigen Zylinderfläche und zwei Ebenen senkrecht zur Achse.

(I) *Spezialfall: schwach gekrümmte Röhren.* Es genügt, ein kleines ringförmiges Gebiet des Wirbels zu betrachten, wo wir $a = a_0 + \alpha$ schreiben können, wo a groß ist und α als eine im Vergleich zu a_0 kleine Größe angesehen werden kann. Annähernd können wir dann in der Gleichung (4a) die Glieder mit $1/a$ und $1/a^2$ vernachlässigen, und die Differentialgleichung wird:

$$A'' + \varkappa^2 A = 0\,, \tag{4b}$$

wo $\varkappa$ durch (5) gegeben ist.

Das Integral von (4b) läßt sich mit genügender Allgemeinheit in der Form

$$A = A_0 \sin\varkappa\alpha \tag{6}$$

schreiben.

Aus (2) und dem Gleichungssysteme (3), das sich durch die Annahme eines großen a entsprechend vereinfacht, ergibt sich leicht die vollständige Lösung:

$$\begin{aligned}
\varrho &= A_0 \sin\varkappa\alpha \cos\lambda c \cos\nu t\,, \\
a\psi &= -\frac{2\Omega}{\nu} A_0 \sin\varkappa\alpha \cos\lambda c \sin\nu t = -\sqrt{1+\frac{\varkappa^2}{\lambda^2}}\, A_0 \sin\varkappa\alpha \cos\lambda c \sin\nu t, \\
z &= -\frac{\varkappa}{\lambda} A_0 \cos\varkappa\alpha \sin\lambda c \cos\nu t\,, \\
Sp &= \left(a\Omega^2 \sin\varkappa\alpha + \frac{\varkappa\nu^2}{\lambda^2}\cos\varkappa\alpha\right) A_0 \cos\lambda c \cos\nu t \\
&= \left(a\Omega^2 \sin\varkappa\alpha + \frac{4}{\lambda^2+\varkappa^2}\cos\varkappa\alpha\right) A_0 \cos\lambda c \cos\nu t\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Parameter können auch durch die entsprechenden Wellenlängen ersetzt werden:

$$L_a = \frac{2\pi}{\varkappa}\,, \qquad L_c = \frac{2\pi}{\lambda}\,,$$

welche die Seiten in den rechteckigen Querschnitten der röhrenförmigen Zellen sind.

Für die Projektion der Stromlinien auf die Meridionalebene erhalten wir die Gleichung:

$$\sin 2\pi \frac{\alpha}{L_a} \sin 2\pi \frac{c}{L_c} = K. \tag{8}$$

Diese Gleichung ist von der Zeit unabhängig und stellt torusförmige Flächen dar, auf welchen die Stromlinien im Raume liegen.

Als Projektion auf die Rotationsebene $c = 0$ findet man die Gleichung:

$$: e^{\frac{\nu}{2\Omega}(\Psi - \Psi_0)\,\mathrm{tg}\,\nu t} \tag{9}$$

Diese Gleichung stellt Zylinderflächen dar, welche die Ebene $c = 0$ in logarithmischen Spiralen schneiden.

Die Stromlinien selbst sind Schnitte dieser Zylinderflächen mit den Torusflächen (8). Wenn t variiert, durchläuft die logarithmische Spirale zweimal in jeder Periode alle ihre Formen, die für $\nu t = \pi/2 + n\pi$ radiale Geraden durch die Zylinderachse und für $\nu t = n\pi$ Kreise um die Zylinderachse sind (Abb. 57).

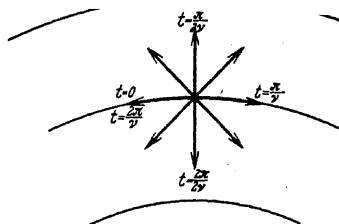



Abb. 57. Drehung der Orbitalebene bei elastoiden Trägheitsschwingungen.

Die Stromlinien sind Kreise in dem Augenblick, wo die Bewegung senkrecht zur Grundströmung umkehrt, und Geraden, wenn diese Bewegung am größten ist.

Die Orbitalellipsen liegen auf der Torusfläche (8) mit der einen Achse in der Meridionalebene und der anderen längs der Parallelkreise. Die Ellipsen sind, wie schon in **46** erwähnt, gerade Linienelemente parallel der Rotationsachse auf dem größten und kleinsten Kreis der Stromröhre, Ellipsen mit der großen Achse längs der Parallelkreise auf den beiden Kreisen von mittlerem Radius (oben und unten), und Kreise in gewissen Mittellagen (vgl. Abb. 24, S. 165).

Die somit beschriebene Bewegung verläuft nach (5) mit der Frequenz $\nu = \frac{2\Omega\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \varkappa^2}}$. Ersetzen wir hier die Winkelgeschwindigkeit Ω durch die Umlaufszeit $T_0 = 2\pi/\Omega$, die Frequenz ν durch die Periode der Störung $T = 2\pi/\nu$ und die Größen $\varkappa$ und λ durch die entsprechenden Wellenlängen, so ergibt sich:

$$T = \tfrac{1}{2} T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^2}. \tag{10}$$

Die Formel zeigt unmittelbar folgendes:

Außer von der Umlaufszeit T_0 hängt die Periode der elastoiden Eigenschwingungen in einer schwach gekrümmten Röhre nur von dem

Verhältnis L_c/L_a der lateralen Seite L_c und der radialen Seite L_a des rechteckigen Querschnittes ab: die kleinste Periode, die gleich der halben Umlaufszeit $T = \frac{1}{2} T_0$ ist, tritt bei den scheibenförmig flachen Röhren auf; die Periode steigt bis $T = T_0/\sqrt{2} = 0{,}7\ T_0$ bei Röhren von quadratischem Querschnitt und wird gleich der Umlaufszeit, $T = T_0$, wenn $L_c = \sqrt{3} L_a = 1{,}7 L_a$. Für breitere Röhren wächst die Periode weiter, und für große Werte von L_c/L_a gilt schließlich:

$$T = \frac{1}{2} \frac{L_c}{L_a} T_0,$$

so daß bei dünnen und breiten Röhren die Periode proportional der Breite der Röhre zunimmt.

Die Ursache dieses Gesetzes für die Periode der elastoiden Schwingungen ist einfach: Entsprechend der elastischen Kraft bei einem festen Körper macht sich hier eine elastoide Kraft geltend, die durch die Änderung der Zentrifugalkraft bei radialer Verschiebung bedingt ist. Diese Änderungen der Zentrifugalkraft kommen zu voller Entwicklung in den scheibenförmig flachen Röhren, wo die Verschiebungen hauptsächlich in radialer Richtung vor sich gehen, dagegen nur zu schwacher Entwicklung in den breiten Röhren, in denen die Verschiebungen in radialer Richtung eng begrenzt sind.

Wir können diese Resultate durch das folgende Beispiel veranschaulichen. Eine Röhre von rechteckigem Querschnitt mit der Höhe L_a und der Breite L_c umgebe die ganze Erde längs des Äquators, und T_0 sei der Sterntag. Ist die Röhre quadratisch mit einem Meter Höhe und einem Meter Breite, so verlaufen die elastoiden Schwingungen in dieser Röhre mit einer Periode von 0,7 Sterntagen. Behalten wir dieselbe Breite der Röhre, aber vergrößern wir die Höhe auf das 100fache, so beträgt die Periode sehr angenähert einen halben Sterntag. Behalten wir dieselbe Höhe 1 m der Röhre und geben wir ihr die Breite $L_c = 1{,}7$ m, so wird die Periode gleich einem ganzen Sterntag. Verbreitert man die Röhre weiter, so nimmt die Schwingungsdauer immer weiter zu, und zwar schließlich proportional der Breite der Röhre.

Solange die Höhe und die Breite der Röhre nur wenige Meter betragen, ist es gleichgültig, ob homogenes inkompressibles Wasser oder Luft in adiabatischem Gleichgewicht die Röhre füllt. Wenn aber Höhe und Breite nach Kilometern messen, müssen wir bei Anwendungen auf die Atmosphäre vorsichtig sein. Deshalb beschränken wir uns im folgenden auf die Betrachtung des Meeres.

Die Periode eines vollen Sterntages würde man weiter bei einer mit Wasser gefüllten Röhre von 17 km Breite und 10 km Tiefe erhalten, welches die Maximaltiefe des Meeres ist. Wollte man das Meer in möglichst große Röhren mit ganztägiger Schwingungsdauer zerlegen,

so würde man bei der mittleren Meerestiefe von 5 km in großer Ausdehnung diese Tiefe und 8,5 km Breite zu nehmen haben. Im Vergleich zu den Dimensionen des Meeres wäre dies jedoch eine Kleinaufteilung: großzügige Bewegungen von diesem Typus können nicht zustande kommen.

Für Schwingungen dieser Art mit einer kleineren Schwingungsdauer als einen Tag liegen die Verhältnisse noch ungünstiger; Schwingungen mit einer Periode kürzer als ein halber Sterntag sind überhaupt ausgeschlossen. Für sehr lange Perioden liegen dagegen die Verhältnisse günstiger, was man bei der Theorie der langperiodischen Gezeiten nicht vergessen darf.

(II) *Der allgemeine Fall: Röhren beliebiger Krümmung.* Die exakte Lösung der Gleichung (4a) ist:

$$A = A_1 J_1(\varkappa a) + A_2 Y_1(\varkappa a)\,, \tag{12}$$

wo $\varkappa$ durch (5) definiert ist und durch die Nullpunkte der BESSELschen Funktionen bestimmt wird. J_1 und Y_1 sind die BESSELschen Funktionen erster Ordnung von der ersten und zweiten Art.

Wir betrachten nur den Fall, wo die Bedingungen am meisten von den eben betrachteten abweichen, nämlich den Fall, wo die Bewegung bis zur Achse reicht. Da Y_1 im Nullpunkt logarithmisch unendlich ist, müssen wir $A_2 = 0$ wählen, und $\varkappa$ ist dann aus der Gleichung

$$J_1(\varkappa a_0) = 0 \tag{13}$$

zu bestimmen. Die vollständige Lösung wird dann:

$$\begin{aligned}
\varrho &= A_1 J_1(\varkappa a) \cos\lambda c \cos\nu t\,,\\
\psi &= -\frac{2\Omega}{\nu a} A_1 J_1(\varkappa a) \cos\lambda c \sin\nu t\,,\\
z &= -\frac{1}{\lambda a} A_1 \frac{d}{da}(a J_1(\varkappa a)) \sin\lambda c \cos\nu t = -\frac{\varkappa}{\lambda} A_1 J_0(\varkappa a) \sin\lambda c \cos\nu t\,,\\
Sp &= A_1\left(\frac{\nu^2\varkappa}{\lambda^2} J_0(\varkappa a) + a\Omega^2 J_1(\varkappa a)\right)\cos\lambda c \cos\nu t\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Für die Stromlinien in der ac-Ebene findet man die Differentialgleichung:

$$-\lambda \frac{\cos\lambda c}{\sin\lambda c}\, dc = \frac{d(aA)}{aA}\,,$$

oder integriert:

$$a J_1(\varkappa a) \sin\lambda c = K\,. \tag{15}$$

Dies gibt geschlossene Kurven von bekannter Form, die von den oben in (8) gefundenen nicht sehr verschieden sind. Es ist nur der trigonometrische Faktor $\sin\varkappa\alpha$ durch $a J_1(\varkappa a)$ ersetzt worden. Für die Projek-

tion der Stromlinien auf die ab-Ebene findet man identisch dieselben Spiralen wie oben (9), die in ganz derselben Weise mit der Zeit variieren.

Die Orbitalbahnen liegen auf den torusförmigen Flächen (15).

119. Untersuchung der Stabilität bei variabler Grundströmung. Wir kehren jetzt zu dem Falle einer von a abhängigen Grundströmung zurück. Wir haben dann die allgemeine Differentialgleichung der Radialamplitude **118** (4) zu diskutieren.

(A) Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Geschwindigkeit der Grundströmung einer Potenz des Abstandes von der Achse proportional ist:

(1) $$\Omega = \Omega_0 a^n$$

Es ergibt sich dann für die Radialamplitude die Differentialgleichung:

(2) $$A'' + \frac{1}{a} A' + \left\{\frac{2\,\Omega_0^2 \lambda^2 a^{2n}}{\nu^2}(2+n) - \lambda^2 - \frac{1}{a^2}\right\} A = 0\,.$$

Durch die Substitution

(3) $$A = a^{-\frac{1}{2}} y$$

ergibt sich für y die Gleichung:

(4) $$y'' + \left\{\frac{2\,\Omega_0^2 \lambda^2 a^{2n}}{\nu^2}(2+n) - \lambda^2 - \frac{3}{4}\frac{1}{a^2}\right\} y = 0\,.$$

Es sei nun $n > -2$. Das erste Glied in der Klammer ist dann positiv für alle reellen ν. Wählt man ν hinlänglich klein, so kann man folglich erzielen, daß innerhalb eines gegebenen Intervalles der Klammerausdruck positiv beliebig groß wird. In diesem Intervalle haben dann y'' und y immer entgegengesetztes Vorzeichen, und die Integralkurven sind immer nach der a-Achse zu gekrümmt (vgl. Abb. 58). Durch geeignete Wahl von ν kann man dann auch erreichen, daß die Integralkurve die a-Achse für $a = a_0$ und $a = a_1$ schneidet, und aus $y(a_0) = y(a_1) = 0$ folgt wieder $A(a_0) = A(a_1) = 0$. Die Zylinder $a = a_0$ und $a = a_1$ kann man also als starre Grenzflächen betrachten, d. h. es ist eine *stabile zellulare Schwingung* möglich.

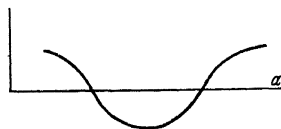



Abb. 58. Bestimmung der solidifiierbaren Ebenen.

Ist dagegen $n < -2$, so wird das Glied mit $1/\nu^2$ für alle reellen ν negativ, dagegen für rein imaginäre ν positiv. In ähnlicher Weise wie oben erkennt man, daß eine *instabile zellulare Schwingung* auftreten kann.

Wenn schließlich $n = -2$ und die Grundströmung folglich wirbelfrei ist, so ist eine zellulare Bewegung nur für $\nu = 0$ möglich; diese stellt jedoch keine Schwingung dar, sondern eine stationäre Zirkulation. Die Gleichung (2) wird unbestimmt, dasselbe gilt für das ursprüngliche

Gleichungssystem **118** (1); und um eine Lösung zu erhalten, müssen wir auf die nichtlinearisierten hydrodynamischen Gleichungen zurückgreifen. Wir finden dann zellulare Zirkulationen, die eine auffällige Ähnlichkeit mit den im vorigen Abschnitte untersuchten zellularen Schwingungen haben.

(B) Wir betrachten ferner die Grundströmung:

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{\Omega_0'}{a^2}\,. \tag{5}$$

Das erste Glied allein gibt eine Rotation wie die eines starren Körpers, das zweite Glied gibt eine wirbelfreie Umlaufsbewegung. Wir verlangen, daß der Wert von Ω an zwei Zylinderflächen $a = a_1$ und $a = a_2$ gegeben sein soll:

$$\Omega(a_1) = \Omega_1\,, \qquad \Omega(a_2) = \Omega_2\,.$$

Dies gibt für Ω_0 und Ω_0':

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{a_2^2\,\Omega_2 - a_1^2\,\Omega_1}{a_2^2 - a_1^2}\,, \\ \Omega_0' &= a_1^2\,a_2^2\,\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{a_2^2 - a_1^2}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Einsetzen von (5) in die Differentialgleichung der Radialamplitude **118** (4) ergibt die BESSELsche Differentialgleichung:

$$A'' + \frac{1}{a}\,A' + \left\{\frac{\lambda^2}{\nu^2}\,4\Omega_0\left(\Omega_0 + \frac{\Omega_0'}{a^2}\right) - \lambda^2 - \frac{1}{a^2}\right\}A = 0\,. \tag{7}$$

Setzt man hier wieder:

$$A = a^{-\frac{1}{2}}\,y\,,$$

so erhält man für y die Gleichung:

$$y'' + \left\{\frac{\lambda^2}{\nu^2}\,4\Omega_0\left(\Omega_0 + \frac{\Omega_0'}{a^2}\right) - \lambda^2 - \frac{3}{4}\,\frac{1}{a^2}\right\}y = 0\,. \tag{8}$$

Das erste Glied in der Klammer entscheidet, ob starre Zylinderflächen möglich sind. Dies Glied wird, wenn man Ω_1 und Ω_2 einführt:

$$4\,\frac{\lambda^2}{\nu^2}\,\frac{a_2^2\,\Omega_2 - a_1^2\,\Omega_1}{(a_2^2 - a_1^2)^2}\left\{\Omega_2\,a_2^2\left(1 - \frac{a_1^2}{a^2}\right) + \Omega_1\,a_1^2\left(\frac{a_2^2}{a^2} - 1\right)\right\}. \tag{9}$$

Wir betrachten sodann die folgenden Fälle:

1. Ω_1 und Ω_2 haben gleiches Vorzeichen, z. B. beide sind positiv. Dann wird der Klammerausdruck positiv, und wir erhalten:

eine *stabile zellulare Lösung* (ν reell), wenn $a_2^2\,\Omega_2 > a_1^2\,\Omega_1$, denn y'' und y haben dann entgegengesetztes Vorzeichen, wenn man ν hinlänglich klein wählt,

eine *instabile zellulare Lösung* (ν rein imaginär), wenn $a_2^2\,\Omega_2 < a_1^2\,\Omega_1$.

2. $\Omega_1 < 0$, $\Omega_2 > 0$. Der Faktor außerhalb der Klammer wird dann positiv. Entscheidend für das Auftreten von Stabilität oder Instabilität wird dann das Vorzeichen der Größe:

$$\Omega_2 a_2^2\left(1 - \frac{a_1^2}{a^2}\right) + \Omega_1 a_1^2\left(\frac{a_2^2}{a^2} - 1\right),$$

das im Intervall a_1 bis a_2 wechselt. Man erhält stabile Lösungen, wenn $\Omega_1 = 0$ ist, und dasselbe gilt, wenn $\Omega_1 < 0$, aber absolut genommen genügend klein ist.

Wir können also auch dann stabile zellulare Lösungen erhalten, wenn Ω_1 und Ω_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben, und die Zirkulation auf einer Strecke nahe dem inneren Zylinder abnimmt. Dies besagt aber nicht, daß die betrachtete Grundbewegung wirklich stabil ist. Durch elementare Überlegung folgt nämlich, daß die Grundbewegung instabil ist gegenüber Störungen in demjenigen Teil der Flüssigkeit, wo die Zirkulation nach außen abnimmt (vgl. **46**). Störungen dieser Form sind aber nicht in unseren Formeln enthalten.

G. I. TAYLOR[1] untersucht dasselbe Problem wie oben, aber mit Berücksichtigung der Reibung. Um die Stabilität zu untersuchen, betrachtet er — in EULERschen Koordinaten — eine dreidimensionale symmetrische Störung, deren Komponenten von der Form $f(\varrho)\begin{Bmatrix}\cos\lambda z\\ \sin\lambda z\end{Bmatrix} e^{\sigma t}$ sind. Je nachdem, ob die reell angenommene Dämpfungskonstante σ größer oder kleiner als Null ist, nimmt die Störung zu oder ab und ist also der Grundzustand instabil oder stabil.

Um die Funktion $f(\varrho)$ zu finden, welche die Störungsgleichungen und Grenzflächenbedingungen befriedigt, benutzt TAYLOR unendliche Reihen von Besselfunktionen der Ordnungen 0 und 1, und erhält zur Bestimmung von σ eine Gleichung in der Form einer unendlichen Determinante. Setzt man hier $\sigma = 0$, so erhält man eine Relation zwischen der Geschwindigkeit der Grundströmung und der Wellenlänge $2\pi/\lambda$ längs der Zylinderachse, für den Fall des Überganges von stabiler zu instabiler Bewegung.

Die Ergebnisse der Untersuchungen TAYLORS sind: Wenn die Zylinder in gleicher Richtung rotieren, so ist die Bewegung stabil, wenn die Zirkulation nicht zu schnell nach außen abnimmt. Wenn die Zylinder entgegengesetzt rotieren, so erhält man Stabilität bei langsamen, Instabilität bei schnellen Rotationen. Ein Vergleich mit **46** zeigt dann sofort, daß die Reibung stabilisierend wirkt. Die Meridionalprojektionen der Stromlinien sind in den beiden Fällen von einer Form, wie in

[1] TAYLOR, G. I.: Stability of a viscous Liquid contained between two rotating Cylinders. Phil. Trans. A, Vol. 223, S. 289, 1922.

den beistehenden Abbildungen angedeutet, wobei die Abb. 59a den Fall darstellt, wo die Zylinder in gleicher Richtung, die Abb. 59b den Fall, wo sie entgegengesetzt rotieren.

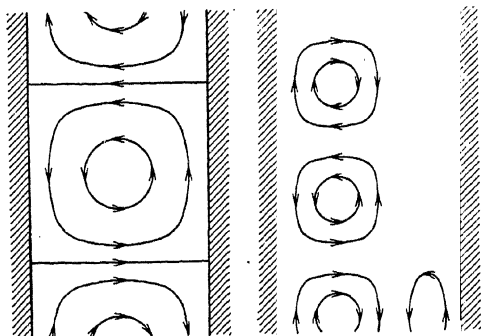



Abb. 59. Stromlinien nach TAYLOR.

Durch Berücksichtigung der Reibung kann man jetzt die Betrachtungen über Turbulenz in **47** etwas vervollständigen. Wir betrachten das Vorbeiströmen einer Flüssigkeit an einer starren Wand (Abb. 60), welche niemals absolut glatt ist. Wegen der Reibung ist die Geschwindigkeit an dieser Fläche immer gleich Null. In einer kleinen Konkavität der Grenzfläche hat man dann einen Teil eines zirkularen Wirbels mit einer Geschwindigkeit, die nach außen gegen Null abnimmt, d. h. schneller abnimmt als $1/r$, wo r der Abstand vom Krümmungszentrum der Strömung ist. Die Zirkulation nimmt also immer nach außen ab, und zwar um so schneller, je größer die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist.

Abb. 60. Turbulenzbildung.

Ist die Geschwindigkeit der Strömung klein, so nimmt die Zirkulation nach außen langsam ab — nach den Resultaten von TAYLOR hat man in diesem Falle Stabilität. Wird aber die Geschwindigkeit immer größer, so nimmt die Zirkulation immer schneller nach außen ab, und bei einer gewissen kritischen Geschwindigkeit setzt Instabilität und damit Turbulenz ein.

120. Fortpflanzung von elastoiden Wellen längs einer krummlinigen Strömung. Die in **118** betrachtete Lösung hat den Charakter einer stehenden Schwingung. Wir gehen jetzt zu dem Fall über, daß sich elastoide Wellen längs der krummlinigen Strömung fortpflanzen. Man findet dann die bekannten Wellenerscheinungen wieder, doch mit einem typischen Unterschied: *es besteht keine vollkommene Symmetrie für die beiden Fortpflanzungsrichtungen, was die Fähigkeit dieser Wellen, sich zu stehenden Wellen zu verbinden, stark begrenzt.*

Wir suchen die Störungsgleichungen **116** (3) und (4), wo Ω konstant angenommen ist, jetzt durch Integrale der folgenden Form zu befriedigen:

$$(1)\quad \begin{cases} \varrho = A(a)\cos\lambda c\cos\mu[b-(\omega-\Omega)t]\,, \\ \psi = B(a)\cos\lambda c\sin\mu[b-(\omega-\Omega)t]\,, \\ z = C(a)\sin\lambda c\cos\mu[b-(\omega-\Omega)t]\,, \\ Sp = D(a)\cos\lambda c\cos\mu[b-(\omega-\Omega)t]\,. \end{cases}$$

Die gewählte Form der Lösung setzt *zwei Systeme von solidifiierbaren Ebenen* voraus: die unbewegten Ebenen $c=\frac{\pi}{\lambda}$, $2\frac{\pi}{\lambda}$, $3\frac{\pi}{\lambda}$, ... senkrecht zur Rotationsachse und die Meridionalebenen $b-(\omega-\Omega)t=\frac{\pi}{\mu}$, $2\frac{\pi}{\mu}$, $3\frac{\pi}{\mu}$, ..., welche die Bewegung der Wellen mitmachen. Beim Einsetzen in die Gleichungen **116** (3) und (4) fallen die trigonometrischen Faktoren fort, und man bekommt das Gleichungssystem:

$$(2)\quad \begin{cases} -\mu^2(\omega-\Omega)^2 A - \Omega^2 A + 2a\mu\Omega(\omega-\Omega)B - a\Omega^2 A' + D' = 0\,, \\ -\mu^2(\omega-\Omega)^2 a^2 B + 2a\mu\Omega(\omega-\Omega)A + a\Omega^2\mu A - \mu D = 0\,, \\ -\mu^2(\omega-\Omega)^2 C + a\Omega^2\lambda A - \lambda D = 0\,, \\ \frac{1}{a}A + A' + \mu B + \lambda C = 0\,. \end{cases}$$

Durch Elimination von B, C und D ergibt sich für die Radialamplitude A die Differentialgleichung:

$$(3)\quad A'' + EA' + FA = 0\,,$$

mit:

$$(3\text{a})\quad E = \frac{1}{a}\,\frac{3\mu^2+\lambda^2a^2}{\mu^2+\lambda^2a^2}\,,\qquad F = \frac{4\Omega^2\lambda^2}{\mu^2(\omega-\Omega)^2} - \lambda^2 - \frac{\mu^2-1}{a^2} - \frac{\omega+\Omega}{\omega-\Omega}\,\frac{2\lambda^2}{\mu^2+\lambda^2a^2}\,.$$

Ehe wir zu dem allgemeinen Fall übergehen, wird es sich lohnen, zwei einfachere Spezialfälle zu betrachten, die beide durch schwach gekrümmte Röhren gekennzeichnet sind.

Spezialfall 1: schwach gekrümmte Röhren; viele Wellen auf der Peripherie. Bei den schwach gekrümmten Röhren ist a groß. Die ganze Zahl μ, welche die Anzahl von Wellen auf dem ganzen Kreisumfang angibt, ist groß, und somit die lineare Wellenlänge in der b-Richtung $2\pi a/\mu$ klein im Vergleich zu a. Wir setzen dann:

$$\mu = a\mu'\,,\qquad \omega-\Omega = \frac{1}{a}(\tilde{\omega}-U)\,,$$

wo μ', die Wellenzahl in linearem Maße, endlich ist, und wo $\tilde{\omega}-U$ die relativ zur Grundströmung gerechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit

in linearem Maße bedeutet. Wenn man dies in (3) einführt und die kleinen Glieder mit $1/a$ und $1/a^2$ vernachlässigt, so wird die Gleichung:

(4) $$A'' + \varkappa^2 A = 0\,,$$

wobei

(5) $$\varkappa^2 = \frac{4\,\Omega^2\lambda^2}{\mu'^2(\tilde{\omega} - U)^2} - \lambda^2 - \mu'^2 = \left(\frac{4\,\Omega^2}{\nu'^2} - 1\right)\lambda^2 - \mu'^2$$

ist. Hier bedeutet $\nu' = \mu'(\tilde{\omega} - U)$ die Orbitalfrequenz. Für $\mu' = 0$, d. h. unendliche Wellenlänge, erhält man wieder die Formel **118** (5).

Die Gleichung (4) gibt unmittelbar A als eine Sinusfunktion von $\alpha = a - a_0$, und mit diesem Wert von A findet man aus (2) die übrigen Amplituden. Es ergibt sich:

(6) $$\begin{aligned} A &= A_0 \sin\varkappa\alpha\,, \\ aB &= A_0 \left[\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+\varkappa^2+\mu'^2}}{\lambda^2+\mu'^2}\sin\varkappa\alpha \cdot \frac{\varkappa\mu'}{\lambda^2+\mu'}\cos\varkappa\alpha\right. \\ C &= -A_0\left[\frac{\mu'\sqrt{\lambda^2+\varkappa^2+\mu'^2}}{\lambda^2+\mu'^2}\sin\varkappa\alpha + \frac{\varkappa\lambda}{\lambda^2+\mu'^2}\cos\varkappa\alpha\right] \\ D &= A_0 \; {}^2\left[\left(a + \frac{4\mu'\lambda}{(\lambda^2+\mu'^2)\sqrt{\lambda^2+\mu'^2+\varkappa^2}}\right)\sin\varkappa\alpha + \frac{4\varkappa\lambda^2}{(\lambda^2+\mu'^2)(\lambda^2+\mu'^2+\varkappa^2)}\cos\varkappa\alpha\right]. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (1) ergibt sich die vollständige Wellenlösung.

Die Lösung hat dieselben solidifiierbaren Ebenen und Zylinderflächen wie früher, die in den Abständen $L_c/2$ bzw. $L_a/2$ aufeinanderfolgen, wo

(7a) $$L_c = \frac{2\pi}{\lambda}\,, \quad L_a = \frac{2\pi}{\varkappa}$$

sind. In diesen Röhren, also in der b-Richtung, pflanzen sich Wellen fort, die in linearem Maße die Wellenlänge

(7b) $$I \quad \frac{2\pi}{\mu'}$$

besitzen.

Die Gleichung (5) bestimmt die Orbitalfrequenz $\nu' = \mu'(\tilde{\omega} - U)$, die Orbitalperiode $T' = 2\pi/\nu'$ und die lineare Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\tilde{\omega}$ als Funktion der Röhrendimensionen und der Wellenlänge L_b. Wenn wir (5) nach ν' auflösen und (7a) und (7b) benutzen, so ergibt sich:

(8a) $$\nu' = \pm\frac{2\,\Omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^2 + \left(\frac{L_c}{L_b}\right)^2}}\,.$$

Da $\nu' = \mu'(\tilde{\omega} - U) = \frac{2\pi}{L_b}(\tilde{\omega} - U)$ und $\Omega = \frac{2\pi}{T_0}$, so erhält man:

(8b)
$$\tilde{\omega} = U \pm \frac{2\frac{L_b}{T_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^2 + \left(\frac{L_c}{L_b}\right)^2}}$$

und

(8c)
$$T' = \tfrac{1}{2} T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^2 + \left(\frac{L_c}{L_b}\right)^2}.$$

$\mu' = 0$ oder $L_b = \infty$ führt wieder zu dem bei den elastoiden Schwingungen gefundenen Werte von T, vgl. **118** (10).

Spezialfall 2: Schwach gekrümmte Röhren, wenige Wellen auf der Peripherie. Wie oben bleibt a groß, μ dagegen ist eine kleine ganze Zahl, $\mu = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Die Differentialgleichung (3) wird dann:

(9)
$$A'' + \varkappa^2 A = 0$$

mit

(10)
$$\varkappa^2 = \left(\frac{4\Omega^2}{\mu^2(\omega - \Omega)^2} - 1\right)\lambda^2.$$

Diese Gleichung kann man auch in folgender Form schreiben:

(10′)
$$\mu(\omega - \Omega) = \pm \frac{2\Omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^2}}.$$

Setzt man hier:

(11)
$$\nu' = \mu(\omega - \Omega), \qquad T' = \frac{2\pi}{\nu'},$$

so ergibt sich, genau entsprechend **118** (10):

(12)
$$T' = \tfrac{1}{2} T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^2},$$

wo jetzt T' die Orbitalperiode ist.

Abb. 61. Stromlinientypen bei elastoiden Wellen in schwach gekrümmten Röhren.

Setzt man wie früher $\alpha = a - a_0$, so ergibt sich für die Amplituden:

(13)
$$\begin{aligned}
A &= A_0 \sin \varkappa\alpha, \\
aB &= \frac{2\Omega}{\mu(\omega - \Omega)} A_0 \sin \varkappa\alpha, \\
C &= -\frac{\varkappa}{\lambda} A_0 \cos \varkappa\alpha, \\
D &= a\Omega^2 A_0 \sin \varkappa\alpha + \frac{\mu^2(\omega - \Omega)^2 \varkappa}{\lambda^2} A_0 \cos \varkappa\alpha.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (1) ergeben sich die vollständigen Integrale der Störungsbewegung. Die Projektionen der Stromlinien auf die Meridionalebene sind von demselben Typus wie früher **118** (8). Die Form der Äquatorprojektion erkennt man aus Abb. 61 für $\mu = 1$ und $\mu = 2$.

Wir betrachten jetzt wieder die um die ganze Erde herumlaufenden Röhren, die uns in **118** (S. 433) als Beispiele dienten. Mit Ω als Winkelgeschwindigkeit der Erde und ω als absoluter angulärer Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen wird $\omega - \Omega$ die relative anguläre Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche die Erdbewohner den Wellen zuschreiben. Nach Formel (12) ist die Orbitalperiode dieser Wellen die gleiche wie nach **118** (10) für die stehenden Schwingungen in denselben Röhren: sie ist von der Wellenlänge unabhängig und hängt außer von dem Sterntag T_0 nur von dem Verhältnis der lateralen Seite L_c zur radialen Seite L_a des rechteckigen Querschnittes ab. Die relative Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist nach (10'):

$$(14) \qquad \omega - \Omega = \frac{2\pi}{\mu T'} \qquad \frac{2\Omega}{\mu \sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_a}\right)}}$$

Sie verhält sich umgekehrt wie μ und ist also der Wellenlänge L_b in der Fortpflanzungsrichtung proportional. Bei gegebener Wellenlänge hat diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ihren größten Wert

$$\omega - \Omega = \frac{2\Omega}{}$$

in den scheibenförmig flachen Röhren, wo L_c/L_a gegen Null konvergiert; und zwar hat man als größtmögliche relative Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$\omega - \Omega = 2\Omega\,,$$

d. i. die doppelte Winkelgeschwindigkeit der Erde, wenn $\mu = 1$, so daß die Wellenlänge gleich dem vollen Erdumfang ist. Kürzere Wellen und breitere Röhren ergeben immer kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Wenn $\omega = 0$, ergibt sich der wichtige Fall, daß die Wellen im Raume ruhen, also daß sie für die Erdbewohner im Laufe eines Tages einmal um die Erde herumlaufen. Wenn wir diesen Wert von ω in (14) einsetzen und nach L_c/L_a auflösen, finden wir die Querschnittsformen unserer Röhren, die diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit geben:

$$(15) \qquad \frac{L_c}{L_a} = \sqrt{\qquad 1}$$

Setzen wir hier $\mu = 1$, so daß die Wellenlänge gleich dem vollen Erdumfang ist, so hat man die Querschnittsform:

$$(16) \qquad L_c = \sqrt{3}\, L_a = 1{,}7 L_a\,,$$

die für Schwingungen, vgl. **118**, wie für Wellen eine Orbitalperiode von einem Tage ergibt. Wir finden also:

In Röhren mit der Querschnittsform (16) *hat man sowohl für stehende Schwingungen wie für Wellen eine Orbitalperiode von einem Sterntag, und in diesen Röhren vollenden Wellen, deren Wellenlänge gleich dem Erdumfang ist, einen vollen Umlauf um die Erde in einem Sterntage.*

Will man jedoch das Meer in Röhren mit dieser Fortpflanzungsgeschwindigkeit aufteilen, so kommt man, wie in **118** bemerkt, zu einer Kleinaufteilung, die großzügige Meeresbewegungen ausschließt.

Allgemeiner Fall: beliebig stark gekrümmte Röhren. Wir kehren jetzt zu der allgemeinen Differentialgleichung (3) für A und zu der entsprechenden Gleichung für C zurück:

$$C'' + \frac{1}{a} C' + \left[\left(\frac{4\Omega^2}{\mu^2(\omega-\Omega)^2} - 1\right)\lambda^2 - \frac{\mu^2}{a^2}\right] C = 0\,. \tag{17}$$

Da diese Gleichung eine Besselsche Differentialgleichung ist, läßt sich die allgemeine Lösung durch Besselsche Funktionen ausdrücken. Wenn wir

$$\varkappa_1^2 = \left(\frac{2\Omega}{\mu(\omega-\Omega)} + 1\right)\lambda\,, \qquad \varkappa_2^2 = \left(\frac{2\Omega}{\mu(\quad\Omega)} \quad 1\right)\lambda\,, \qquad \varkappa = \varkappa_1\varkappa_2 \tag{18}$$

einführen, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A &= A_1\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} J_{\mu+1}(\varkappa a) + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} J_{\mu-1}(\varkappa a)\right) + A_2\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} Y_{\mu+1}(\varkappa a) + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} Y_{\mu-1}(\varkappa a)\right),\\
B &= \frac{A_1}{a}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} J_{\mu+1}(\varkappa a) - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} J_{\mu-1}(\varkappa a)\right) + \frac{A_2}{a}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} Y_{\mu+1}(\varkappa a) - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} Y_{\mu-1}(\varkappa a)\right),\\
C &= -2A_1 J_\mu(\varkappa a) - 2A_2 Y_\mu(\varkappa a)\,,\\
D &= A_1\left[\frac{2\mu^2(\omega-\Omega)^2}{\lambda} J_\mu(\varkappa a) + a\Omega^2\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} J_{\mu+1}(\varkappa a) + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} J_{\mu-1}(\varkappa a)\right.\right.\\
&\quad + A_2\left[\frac{2\mu^2(\omega-\Omega)^2}{\lambda} Y_\mu(\varkappa a) + a\Omega^2\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} Y_{\mu+1}(\varkappa a) + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} Y_{\mu-1}(\varkappa a)\right)\right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Wir betrachten eine Bewegung innerhalb der starren Fläche $a = a_0$. Da die Integrale A, aB, C und D für $a = 0$ nicht unendlich werden sollen, muß $A_2 = 0$ sein. Für $a = a_0$ soll ferner $A = 0$ sein. Dies ergibt die folgende Frequenzengleichung:

$$\frac{J_{\mu+1}(\varkappa a_0)}{J_{\mu-1}(\varkappa a_0)} \qquad \frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2} \qquad \frac{1 - \frac{2\Omega}{\mu(\omega-\Omega)}}{1 + \frac{2\Omega}{\mu(\omega-\Omega)}} \tag{20}$$

Setzt man:

$$\frac{1 - \frac{2\Omega}{\mu(\omega-\Omega)}}{1 + \frac{2\Omega}{\mu(\omega-\Omega)}} = \xi\,, \qquad \varkappa a_0 = \lambda a_0 \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\mu^2(\omega-\Omega)^2} - 1} = \eta\,, \tag{21}$$

so wird die Frequenzengleichung:

$$\frac{J_{\mu+1}(\eta)}{J_{\mu-1}(\eta)} = \xi \,, \tag{20'}$$

die man leicht rechnerisch verwerten kann. Von ξ, η gelangt man leicht wieder zu den ursprünglichen Variablen ω und a_0.

Die Frequenzengleichung ist in der Abb. 62 in einer a_0/L_c, $(\omega-\Omega)/(2\Omega)$-Ebene gezeichnet. Aus der Abbildung ersieht man: $|\omega - \Omega|$ ist immer kleiner als $|2\Omega|$ und nähert sich diesem Wert, wenn a_0/L_c gegen unendlich geht, also für unendlich flache Zylinder. $|\omega - \Omega|$ geht gegen Null, wenn a_0 klein wird im Vergleich zur Höhe, also für sehr hohe Zylinder. Man erhält unendlich viele Lösungen, aber nur die beiden ersten, die äußeren Kurven der Abb. 62, geben eine Bewegung, die direkt zwischen $a = a_0$ und der Achse stattfindet, ohne dazwischenliegende solidifiierbare Flächen. Für die eine der beiden Wurzeln ist $\omega - \Omega < 0$, für die andere ist $\omega - \Omega > 0$. Die beiden Wellen verlaufen also in entgegengesetzter Richtung relativ zur Grundströmung, nicht aber mit gleicher Geschwindigkeit. Den beiden inneren Kurven der Abbildung entspricht eine Bewegung, bei der sich ein solidifiierbarer Zylinder zwischen dem Zentrum und dem Zylinder $a = a_0$ befindet.

Abb. 62. Diagramm der Frequenzengleichung bei elastoiden Trägheitswellen.

Für die Meridionalprojektionen der Stromlinien ergibt sich:

$$\log \sin \lambda c = \lambda \int \frac{J_\mu(\varkappa a)\, da}{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0} J_{\mu+1}(\varkappa a) + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} J_{\mu-1}(\varkappa a)} + \text{konst.} \tag{22}$$

Die Kurven haben verschiedene Gestalt, je nachdem ob $\omega - \Omega < 0$ oder $\omega - \Omega > 0$ ist (Abb. 63a und 63b, oben).

Für die Äquatorprojektionen der Stromlinien erhält man die Gleichung:

$$\log \sin \mu(\Psi - \omega t) = \int \frac{1}{a} \frac{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} J_{\mu+1}(\varkappa a) - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} J_{\mu-1}(\varkappa a)}{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} J_{\mu+1}(\varkappa a) + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} J_{\mu-1}(\varkappa a)}\, da + \text{konst.} \tag{23}$$

Auch hier ist der Verlauf etwas verschieden, je nachdem ob $\omega - \Omega < 0$ oder $\omega - \Omega > 0$ ist (Abb. 63a und 63b, unten).

Die Stromlinien selbst sind Schnittkurven von torusförmigen Flächen mit Meridionalschnitten wie in der oberen Abb. 63 und Zylinderflächen mit Querschnitten wie in der unteren Abb. 63.

Aus der Frequenzengleichung (20) folgt für beliebig stark gekrümmte Röhren dasselbe Gesetz wie für die schwach gekrümmten, nämlich, *daß die Orbitalperiode T der Störung, außer von der Umlaufszeit T_0 nur noch*

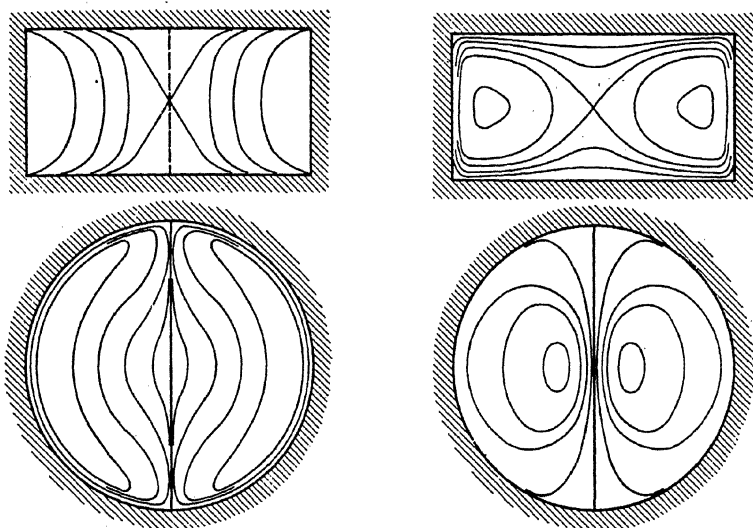



Abb. 63. Projektion der Stromlinien der elastoiden Wellen auf der Meridionalebene (oben) und auf der Rotationsebene (unten).

von der Verhältniszahl L_c/L_a der Seitenlängen des rechteckigen Querschnittes der Röhre abhängt.

Wir betrachten wieder den wichtigen Fall, wo die Orbitalperiode der Störung gleich der Umlaufszeit ist, $T' = T_0$. Bei den schwach gekrümmten Röhren war dabei das Seitenverhältnis $L_c/L_a = 1{,}7$. Mit zunehmender Krümmung der Röhre nimmt diese Verhältniszahl langsam zu. Wenn im Grenzfall eines zylindrischen Raumes ohne innere Begrenzung die Bewegung Abb. 63b vorliegt, so findet man aus der untersten Kurve der Abb. 62 mit großer Annäherung $a_0/L_c = \frac{1}{4}$, wo a_0 der Radius des Zylinders ist. Wir finden also:

In einem Zylinder, dessen Höhe $L_c^!/2$ gleich dem Durchmesser $2a_0$ der Endflächen ist, ist die Orbitalperiode der Störung angenähert gleich der Periode der Rotation um die Zylinderachse.

Im Polarmeer kann man sich solche Zylinder um die Erdachse mit etwa 5, 10, 15, ... km Durchmesser und 5 km Tiefe denken: hier

ergibt sich, ganz wie in den äquatorialen Meeren, nur eine Kleinaufteilung, die großzügige Meeresbewegungen ausschließt. Im flüssigen Erdinneren innerhalb der festen Erdkruste würde jedoch ein Zylinder von etwa 10000 km Höhe und gleichem Durchmesser der Endflächen Platz finden können: hier sind deshalb großzügige ganztägige Störungsbewegungen möglich, die man in der Theorie der inneren Gezeiten der Erde nicht vergessen darf. Es ist natürlich wünschenswert, das Problem auch für die kugelförmige Begrenzung zu lösen. Man kann jedoch mit ziemlicher Sicherheit ein Annäherungsresultat voraussehen. Einen Zylinder, dessen Höhe und Durchmesser gleich sind, kann man sowohl um eine Kugel umschreiben wie in eine Kugel einbeschreiben. In beiden Zylindern ist die Orbitalperiode der Störung angenähert gleich der Umlaufszeit bei der Rotation um die Zylinderachse. Daraus kann man schließen, daß auch für die zwischen beiden Zylindern verlaufende Kugel die Störungsperiode von der Umlaufszeit nicht sehr viel abweichen kann. Diese angenäherte Gleichheit von Störungsperiode und Rotationsperiode ist von den Dimensionen der Kugel unabhängig: sie wird zutreffen auch für einen Körper wie die Sonne oder für einen Riesenstern wie Arkturus, immer vorausgesetzt, daß die Oberfläche starr ist und man das Innere als eine homogene und inkompressible Flüssigkeit betrachten kann. Daß wir von der Schwere abgesehen haben, ist dabei belanglos, solange wir an der Starrheit der Oberfläche und der Homogenität und Inkompressibilität des Inneren festhalten, wie man sogleich im nächsten Abschnitt sehen wird.

Neue Probleme von größter Wichtigkeit für die Frage von der Stabilität der Sterne treten dagegen auf, wenn man, unter Einführung der Schwerkraft, eine freie Oberfläche zuläßt und auf die Kompressibilität und Heterogenität der inneren Massen Rücksicht nimmt.

121. Gravoid-elastoide Oberflächenwellen. Um die elastoiden Störungsbewegungen in reinster Form kennen zu lernen, haben wir bis jetzt von der Schwerkraft abgesehen und als äußere Begrenzung des Wirbels eine starre Zylinderfläche eingeführt. Jetzt soll aber dieselbe äußere Kraft wie in **117** eingreifen, eine gegen die Wirbelachse gerichtete Schwerkraft, die das Potential $\Phi = -g\frac{a_1^2}{a}$ hat.

Der Druck im Grundzustand ist dann durch die Gleichung **117** (1b) gegeben, und in den Störungsgleichungen **116** (3) kann φ nicht mehr vernachlässigt werden, sondern man hat $\varphi = g\frac{a_1^2}{a^2}\varrho$ einzuführen. Man erkennt dann leicht, daß es eine von b unabhängige Störung nach den Gleichungen **118** (1) und eine von b abhängige Lösung nach **120** (2) gibt, mit unveränderten Werten der Koordinaten ϱ, ψ, z und nur mit einem anderen Wert des Störungsdruckes p. *Das kinematische Bild der*

gravoid-elastoiden Störung bleibt deshalb — in homogener inkompressibler Flüssigkeit — *dasselbe wie bei den rein elastoiden Störungen.* Nur der Druck ist ein anderer, und zwar wird hier $Sp + \varphi$ gleich dem früheren Wert von Sp.

Wir beschränken uns darauf, diesen Druck im Falle konstanter Rotation, $\Omega =$ konst., und für schwach gekrümmte Röhren zu bestimmen, so daß wir $a = a_0 + \alpha$ setzen können, wo a_0 groß und α klein ist. Für den Störungsdruck p im Falle einer stehenden Schwingung finden wir dann aus **118** (7):

$$(1) \qquad Sp = \left\{\left[-g\frac{a_1^2}{a^2} + a\Omega^2\right]\sin\varkappa\alpha + \frac{\varkappa\nu^2}{\lambda^2}\cos\varkappa\alpha\right\}A_0\cos\lambda c\cos\nu t\,,$$

wo nach **118** (5)

$$(2) \qquad \varkappa^2 = \left(\frac{4\Omega^2}{\nu^2} - 1\right)\lambda^2$$

ist. $p = 0$ gibt die freie Oberfläche. Soll diese aus den Teilchen $a = a_1$ bestehen, so erhält man mit $p = 0$ und $\alpha = a_1 - a_0$ aus Gleichung (1), wenn man gleichzeitig die effektive Schwere $g' = g - a_1\Omega^2$ einführt, die folgende Frequenzengleichung:

$$(3) \qquad \nu^2 = g'\frac{\lambda^2}{\varkappa}\operatorname{tg}\varkappa(a_1 - a_0)\,,$$

wo $a_1 - a_0$ die Mächtigkeit der Schicht mit freier Oberfläche ist. Ist diese Mächtigkeit klein im Vergleich zu der radialen Seite $L_a/2 = \pi/\varkappa$ einer Zelle, so folgt hieraus einfacher:

$$(3\,\mathrm{a}) \qquad \nu^2 = g'\lambda^2(a_1 - a_0)\,.$$

Für eine längs der Parallelen sich fortpflanzende Welle ergibt sich entsprechend aus **120** (1) und (13) für den Störungsdruck:

$$(4) \qquad \begin{aligned} Sp = \Big\{&\left[-g\frac{a_1^2}{a^2} + a\Omega^2\right]\sin\varkappa\alpha \\ &+ \frac{\mu^2(\omega-\Omega)^2\varkappa}{\lambda^2}\cos\varkappa\alpha\Big\}A_0\cos\lambda c\cos\mu[b - (\omega-\Omega)t]\,, \end{aligned}$$

wo nach **120** (10):

$$(5) \qquad \varkappa^2 = \left(\frac{4\Omega^2}{\mu^2(\omega-\Omega)^2} - 1\right)\lambda^2\,.$$

Die Frequenzengleichung ist folglich:

$$(6) \qquad \mu^2(\omega-\Omega)^2 = g'\frac{\lambda^2}{\varkappa}\operatorname{tg}\varkappa(a_1 - a_0)\,,$$

die sich auch hier bei kleiner Schichtmächtigkeit reduziert und

$$(6\,\mathrm{a}) \qquad \mu^2(\omega-\Omega)^2 = g'\lambda^2(a_1 - a_0)$$

ergibt.

Schließlich können wir die Formel (3a) für stehende Schwingungen und die Formel (6a) für sich fortpflanzende Wellen auf eine und dieselbe Form bringen. In (3a) und (6a) können wir wie in **118** und **120** die Umlaufszeit T_0 im zirkularen Wirbel, die Orbitalperiode T' der Störungsbewegung und die laterale Seitenlänge L_c des Röhrenquerschnittes einführen und nach $a_1 - a_0$ auflösen. Man erhält dann die Formel:

$$a_1 - a_0 = \frac{1}{g'} \frac{L_c^2}{T'^2}. \tag{7}$$

Diese Formel gibt jetzt, sowohl für stehende Schwingungen wie für sich fortpflanzende Wellen von gravoid-elastoidem Charakter in einer Schicht mit freier Oberfläche die Beziehung zwischen der Schichtdicke $a_1 - a_0$, der Schichtbreite L_c und der Orbitalperiode T'.

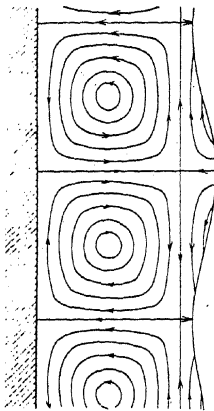



Abb. 64. Meridionalprojektion der Stromlinien bei gravoid-elastoiden Trägheitsschwingungen.

Ehe wir zu der allgemeinen Diskussion übergehen, bemerken wir noch, daß $\varkappa$ imaginär wird, wenn in (2) $\nu^2 > 4\Omega^2$ und in (5) $\mu^2(\omega - \Omega)^2 > 4\Omega^2$ ist; man erhält dann in (3) bzw. in (6) statt des trigonometrischen den hyperbolischen Tangens, entsprechend einer nicht mehr zellularen Störungsbewegung, die uns in dieser Verbindung nicht interessiert.

Die Abb. 64 veranschaulicht die Bewegung in einer Meridionalebene. Die beiden Systeme von Geraden stellen die Ebenen senkrecht zu der Wirbelachse und die Zylinderflächen um die Achse dar, Ebenen und Zylinderflächen, die man je nach Belieben solidifiieren kann oder nicht. Nur die beiden Ebenen, welche die äußeren Grenzen des Systems bilden, müssen notwendig starr sein. Denkt man sich sämtliche Flächen solidifiiert, so führen die Schichten mit freier Oberfläche plätschernde Bewegungen zwischen den Seitenwänden der offenen Kanäle aus. Wenn sich sämtliche Teilchen in der gleichen Phase bewegen, hat man stehende Schwingungen zwischen den Kanalwänden, ändert sich die Phase von Teilchen zu Teilchen in der Längsrichtung des Kanals, so pflanzt sich eine plätschernde Wellenbewegung längs des Kanals fort. Diese Bewegung im offenen Kanal ist die gleiche wie die Bewegung einer Schicht gleicher Mächtigkeit am Boden der entsprechenden vollständigen Röhre. Je nach dem Verhältnis von Zentrifugalkraft zu reiner Anziehungskraft liegt die freie Oberfläche hoch oder niedrig im offenen Kanal.

Um Beispiele zu haben, können wir wieder die in **118** und **120** betrachteten Röhren heranziehen, die in der Äquatorgegend die ganze Erde umgeben. Eine Röhre von 17 km Breite und 10 km Tiefe (größte Meerestiefe) gab für stehende Schwingungen wie auch für sich fortpflanzende Wellen die Periode eines Tages, und bei einer Wellenlänge gleich dem vollen Erdumfang einen Umlauf um die Erde im Verlaufe eines Tages. In der Formel (7) ist L_c die doppelte Breite der Röhre, also $L_c = 34000$ m; gleichzeitig ist $g' = 9{,}78$, und der Sterntag T_0 beträgt 86164 Sekunden. Man findet folglich die Mächtigkeit der freien Schicht zu $a_1 - a_0 = 0{,}016$ m, d. h. 16 mm. In einem offenen Kanal von 17 km Breite führt also eine 16 mm hohe Flüssigkeitsschicht genau dieselbe Bewegung aus wie eine Schicht von 16 mm Höhe am Boden der vollständig gefüllten, mit starrer Decke versehenen Röhre von 10 km Tiefe. Legt man diese 16 mm dicke Schicht oben auf die starre Decke der Röhre, so kann man diese Decke wegnehmen: es stellt sich von selbst eine Bewegung ein, wo 16 mm unter der freien Oberfläche sich eine unbewegte Fläche befindet. Oberhalb dieser Fläche hat man die plätschernde Bewegung der freien Schicht, unterhalb die vollständige elastoide Zellularbewegung. Auf die Röhren von 5 km Tiefe und 8,5 km Breite, in die man ein Meer der konstanten Tiefe von 5 km zerlegen kann, braucht man oben nur eine Schicht von 4 mm Dicke aufzusetzen, um in 4 mm Tiefe unter der freien Oberfläche eine unbewegte Fläche zu haben. Dieses Beispiel zeigt schlagend, wie bedeutungslos diese *inneren* elastoiden Schwingungen des Meeres für Niveauänderungen der Ozeane sind.

Das Bild verändert sich jedoch, wenn wir diese gravoid-elastoiden Oberflächenstörungen in Schichten beliebiger Tiefe betrachten. Ganztägige Störungen dieser Art können nach der Formel (7) in offenen Kanälen vorkommen bei den folgenden zusammengehörigen Werten von Breite und Tiefe des Kanals:

Breite:	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	10000 km
Tiefe:	0,55	14	55	218	492	873	1360	2000	5500 m

Bei hinlänglicher Breite erreicht der Kanal ozeanische Tiefen, z. B. die Tiefe von 2000 m bei einer Breite von 6000 km, entsprechend dem Abstand zwischen dem nördlichen und dem südlichen Wendekreis, und die mittlere Meerestiefe von 5000 m bei einer Breite des Kanals gleich dem Erdquadranten. Wir schließen also, daß *in den Ozeanen gravoid-elastoide Oberflächenwellen von der Periode eines ganzen Tages auftreten können.* Dabei kann die Bewegung den Charakter stehender Schwingungen haben, so daß die Wassermassen überall in dem Kanal während 12 Stunden nach Norden und dann während 12 Stunden nach Süden strömen usf. Oder sie kann in einer Wellenbewegung mit einer ganzen Wellenlänge gleich dem Erdumfang bestehen, so daß die Wassermassen dann auf dem einen halben Erdumfang nach Norden und auf

dem anderen halben Erdumfang nach Süden strömen; diese Wellenbewegung ist im Raume stationär und scheint für die Erdbewohner in einem Tage einen vollen Umlauf um die Erde auszuführen.

122. Die ganztägigen Gezeiten und die allgemeine Gezeitentheorie. Es steht nach dem Obigen fest, daß in den Ozeanen ganztägige gravoid-elastoide Oberflächenwellen auftreten *können*, und daß folglich solche Wellen auch auftreten *müssen*, wenn die gezeitenerregenden Kräfte eingreifen, die bekanntlich auch eine ganztägige Periode haben. Aber auch ohne diese Kräfte explizite einzuführen, können wir einige nützliche qualitative Schlüsse über diese Gezeiten ziehen.

Es befinde sich der gezeitenerregende Himmelskörper z. B. am nördlichen Wendekreis. Man hat dann nach der statischen Gezeitentheorie am nördlichen Wendekreis die Tagesflutwelle und diametral gegenüber am südlichen Wendekreis die Nachtflutwelle. Während das Meer mit der Erde rotiert, erhalten sich diese Flutwellen unbeweglich relativ zu dem Himmelskörper, und zur Erhaltung dieser Flutwellen müssen die an der Rotationsbewegung teilnehmenden Flüssigkeitsmassen zusammenströmen, indem sie sich dem Meridiane dieser Flutwellen nähern, und auseinanderströmen, nachdem sie diesen Meridian passiert haben. Ein Teilchen, das sich am Morgen des Gezeitentages am Äquator befindet, wird sich nach Norden bewegen, bis es den Meridian der Tagesflutwelle erreicht hat, dann nach Süden umkehren, den Äquator am Abend des Gezeitentages überqueren, die größte südliche Breite erreichen, indem es den Meridian der Nachtflutwelle passiert, um dann nach einem vollen Gezeitentag den Äquator wieder zu erreichen: dies gibt *eine reine ganztägige Periode*. Flüssigkeitsteilchen, die einander am Äquator diametral gegenüberliegen, haben die entgegengesetzt gleiche Bewegung. Man hat also quer über den Äquator eine ganztägige erzwungene Strömung, die auf dem einen halben Äquatorumfang nach Norden gerichtet ist, während sie auf dem anderen halben Äquatorumfang nach Süden gerichtet ist. Diese Halbwellen der Nordwärtsströmung und der Südwärtsströmung machen für die Erdbewohner den Umlauf um die Erde in einem Tage — wir brauchen bei diesen qualitativen Überlegungen keinen Unterschied zwischen Stern-Tag, Sonnen-Tag und Mond-Tag zu machen.

Diese erzwungene ganztägige Bewegung, welche die statische Theorie zur Erhaltung des Niveaus der gegebenen Flutwellen verlangt, kann aber nicht bestehen, ohne die dynamische Konsequenz zu haben, daß die entsprechenden Eigenschwingungen des Meeres, darunter auch die ganztägigen elastoid-gravoiden Oberflächenwellen, ausgelöst werden. Würde das Meer z. B. um die ganze Erde herum einen Kanal von 2000 m Tiefe bilden, der durch Vertikalwände an den Wendekreisen

begrenzt ist, so wäre Resonanz vorhanden zwischen den erzwungenen und den mit gleicher Geschwindigkeit sich fortpflanzenden freien gravoid-elastoiden Oberflächenwellen: es könnten Gezeiten mit verheerenden Wirkungen auftreten, und dieser kanalförmige Ozean würde durch Gezeitenerosion verändert werden, bis die ganztägigen Gezeiten zu mäßiger Intensität reduziert sind.

Der Nachweis dieses neuen Typus von Gezeiten veranlaßt uns einige allgemeine Bemerkungen über die Theorie der Gezeiten zu machen. NEWTONS „statische" Theorie gab die Erklärung der Haupterscheinungen, erwies sich jedoch als unvollständig, weil die möglichen Eigenschwingungen des Meeres nicht berücksichtigt wurden. Diese Lücke auszufüllen, war das Ziel der LAPLACEschen „dynamischen" Theorie. Nach allgemeinen dynamischen Prinzipien müssen alle möglichen freien Eigenschwingungen des Meeres berücksichtigt werden. Zwar bleiben die Perioden der Bewegung, die sich schließlich einstellt, diejenigen der störenden Kraft; die Amplituden und Phasen dieser Bewegung sind jedoch durch die möglichen Eigenschwingungen des Meeres mitbestimmt, und zwar um so stärker, je näher einander die Perioden der Eigenschwingung und der störenden Kraft kommen.

Für die ganztägigen Gezeiten führt diese LAPLACEsche Theorie zu dem Resultat, daß in einem Meere konstanter Tiefe, das die ganze Erde bedeckt, zwar eine Gezeitenbewegung vorhanden ist, jedoch in Form einer Nutation um die Erdachse, die das Meer so ausführt, als wäre es ein fester Körper. Da diese Bewegung das Meeresniveau unverändert läßt, gipfelt seine Untersuchung in dem berühmten Satz: „Die ganztägigen Gezeiten sind Null in einem Meere konstanter Tiefe." Diesen Satz findet man immer noch in allen Darstellungen der Gezeitentheorie[1], obgleich er zu so fühlbaren Schwierigkeiten führt, daß eine Autorität in der Lehre von den Gezeiten, wie G. H. DARWIN ausdrücklich sagt: „In der Tat kommt das Verschwinden der täglichen Ungleichheit der Wahrheit nicht viel näher, als die große von der Gleichgewichtstheorie behauptete Ungleichheit, und beide Theorien müssen verlassen werden, wenn es sich um eine befriedigende Erklärung des wahren Zustandes des Dinges handelt[2]".

Ohne die Untersuchungen auf den Fall einer Kugel unter expliziter Einführung der gezeitenerregenden Kräfte auszudehnen, können wir behaupten, daß unsere oben abgeleiteten Resultate in unvereinbarem Widerspruch mit dem Satz von LAPLACE stehen. Die von LAPLACE gefundene Nutation ist ohne Zweifel eine mögliche ganztägige Gezeiten-

[1] Z. B. H. POINCARÉ: Leçons de Mécanique Céleste. III. Théorie des Marées (1910), S. 146.
[2] DARWIN, G. H.: Ebbe und Flut (1911), S. 175.

bewegung eines Meeres konstanter Tiefe. Es ist aber unrichtig, wenn er diese Bewegung als *die einzige mögliche* ganztägige Gezeitenbewegung eines Meeres konstanter Tiefe hinstellt; und zwar kann sein Irrtum nur darauf beruhen, daß er die möglichen inneren elastoiden Trägheitswellen und die entsprechenden Oberflächenwellen in rotierenden Flüssigkeitsmassen nicht beachtet hat.

Eine äußerst wichtige Frage ist es aber dann, wie die Störungen von diesem Typus sowohl LAPLACE wie sämtlichen nachfolgenden Gezeitentheoretikern entgehen konnten. Die Hauptursache ist, daß weder LAPLACE noch seine Nachfolger den vollen Schritt von der statischen zu der exakt dynamischen Gezeitentheorie gemacht haben: sie haben die Bewegungsgleichungen nur für die Horizontalkomponenten der Bewegung eingeführt, aber zur Vereinfachung für die Vertikalkomponente die Gleichgewichtsgleichung beibehalten. Auf die Vorteile wie auf die innere Schwäche dieser quasistatischen Methode haben wir schon aufmerksam gemacht (**111**). Die Folgen dieser inneren Schwäche sehen wir jetzt: wenn man die Methode auf ein rotierendes System wie die Erde anwendet, gehen die Lösungen verloren, welche die zellularen elastoiden Trägheitswellen und die entsprechenden Oberflächenwellen darstellen. Wir werden später (**144**) Gelegenheit haben, ganz explizite zu zeigen, daß der Hauptfehler eben hier liegt. Der große Erfolg, den die bisher benutzte *halbdynamische* oder *quasistatische* Methode trotzdem in der Gezeitenforschung gehabt hat, beruht auf dem glücklichen Umstand, daß die gravoid-elastoiden Störungen nur als Grenzfall die für die Gezeiten wichtigste Periode, die halbtägige, haben können. Ihre tiefeingreifende Bedeutung gewinnen sie erst für die ganztägige und für noch längere Perioden, wie vielleicht für die von WEICKMANN[1] studierten mehrtägigen Druckwellen im Polargebiet.

Für unsere Arbeit, die speziell auf atmosphärische Wellenbewegungen und die Zyklonentheorie hinzielt, ist die Erkenntnis der Unzulänglichkeit der quasistatischen Methode von grundlegender Bedeutung. Es schien uns von Anfang an verlockend, die Vorteile dieser Methode bis zum äußersten auszunutzen, bis es sich schließlich zeigte, daß sie nicht zum Ziele führte. Wir werden deshalb in den Kapiteln XIII und XIV die Wellenbewegung auf der rotierenden Erde und die Zyklonentheorie nach der exakt dynamischen Methode behandeln.

Auf die verwandte Theorie der atmosphärischen wie der ozeanischen Gezeitenerscheinungen werden wir dabei nicht eingehen. Es würde zu weit führen, diese Theorie schon hier in ihre exakte Form durchzuführen, und einer von uns behält sich vor, später auf diese Aufgabe zurückzukommen.

---

[1] WEICKMANN, L.: Wellen im Luftmeer. Abh. sächs. Akad. XXXIX, 1925.

Zwölftes Kapitel.

Die Berücksichtigung der Erddrehung.

123. Übergang zu einem rotierenden Koordinatensystem. Durch die Bewegungsgleichungen **29** (1) eines materiellen Punktes lassen sich erfahrungsgemäß die meisten im täglichen Leben beobachteten Bewegungen in befriedigender Weise beschreiben, wenn wir ein mit der Erde fest verbundenes Koordinatensystem zugrunde legen. Dank diesem glücklichen Umstande hat sich die GALILEI-NEWTONsche Dynamik entwickeln können. Ausnahmen treten jedoch auf bei der genauen Beobachtung der Fallbewegung eines Körpers, der Schwingungen eines Pendels oder der Rotation eines Gyroskopes und besonders auffällig bei Bewegungen in großem Ausmaße, wie die der Atmosphäre oder des Meeres. Um die Gleichungsform **29** (1) dennoch als Grundlage beibehalten zu können, sucht man fundamentalere Koordinatensysteme. Eine große Gruppe der Ausnahmeerscheinungen ordnet sich ins Schema der Gleichungen **29** (1) ein, wenn man den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt der Erde verlegt und den Achsen eine unveränderliche Richtung relativ zum Fixsternenhimmel gibt. Noch bilden aber die Gezeitenerscheinungen eine Ausnahme. Aber auch diese gehorchen den Gleichungen **29** (1), wenn man den Anfangspunkt der Koordinaten nicht in den Mittelpunkt der Erde, sondern für die Mondgezeiten nach dem gemeinsamen Schwerpunkte von Erde und Mond und für die Sonnengezeiten nach dem gemeinsamen Schwerpunkte von Erde und Sonne verlegt. Geht man von den irdischen Bewegungen zu den himmlischen über, so muß man den Anfangspunkt der Koordinaten noch weiter verlegen, je nach dem Problem in den Mittelpunkt der Sonne, in den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und des Planetensystems, künftig vielleicht einmal in den Schwerpunkt der Milchstraße usw. In dieser Weise kann man durch die Einführung immer fundamentalerer Koordinatensysteme und daneben immer „besser" gehender Uhren den Gültigkeitsbereich der Gleichungen **29** (1) immer weiter ausdehnen. Die grundlegende Arbeitshypothese der NEWTONschen Mechanik ist, daß dieses empirische Suchen nach einem immer fundamentaleren Koordinatensystem und einer immer besser gehenden Uhr einen Sinn hat. Oder kurz ausgedrückt: Man kann sich die Bewegungen der ganzen physikalischen Welt auf ein solches Koordinatensystem und auf eine solche Uhr bezogen denken, daß sie sämtlich den Gleichungen **29** (1) gehorchen.

Bei jeder konkreten Aufgabe ist jedoch die abstrakt denkbare Fundamentaluhr und das abstrakt denkbare fundamentale Koordinatensystem durch eine konkrete Uhr und ein konkret

definiertes Koordinatensystem zu ersetzen. Für uns bleiben dabei die kleinen Unsicherheiten der Zeitdefinition belanglos, aber um so wichtiger ist die Wahl des Koordinatensystems. Hat man nun ein Koordinatensystem gefunden, relativ zu dem sich eine betrachtete Gruppe von Bewegungen mittels der Gleichung **29** (1) beschreiben läßt, so nennt man die auf dieses Koordinatensystem bezogenen Bewegungen — kurz, wenn auch sehr unberechtigt — *absolute Bewegungen.* Wir haben im vorhergehenden diesen Ausdruck oft benutzt für die Bewegung relativ zu einem Koordinatensystem, das zwar die Translation, jedoch nicht die Rotation der Erde mitmacht.

Ein solches „genügend fundamentales" Koordinatensystem liegt dann der Lösung der betrachteten Gruppe von Bewegungen zugrunde, aber es braucht deshalb nicht das zweckmäßigste System zu sein, relativ zu dem man die Bewegung beschrieben zu sehen wünscht. Man kann dann auf zwei Wegen zu dem erwünschten Resultat gelangen. Man löst das Problem unter Anwendung der Gleichung **29** (1) und des hinlänglich fundamentalen Koordinatensystems und bezieht nachher das Endresultat auf das weniger fundamentale, aber aus praktischen Gründen vorzuziehende Koordinatensystem. Oder man kann die Gleichung **29** (1) umformen, so daß sie unmittelbar die Lösung relativ zu dem aus praktischen Gründen vorgezogenen Koordinatensystem gibt.

Wir haben bisher immer die erstere Methode vorgezogen, weil sie die einzige ist, durch die man die Dynamik der Erscheinungen klarlegt. Von jetzt an werden wir aber aus praktischen Gründen zu der zweiten Methode übergehen.

Die LAGRANGEsche Transformation der Bewegungsgleichungen auf ganz allgemeine Koordinaten **29** (4) enthält nun in sich die volle Theorie der relativen Bewegung, weil die allgemeinen Koordinaten relativ zu den ursprünglichen auch beliebig bewegt sein können. Es genügt für unseren Zweck, diese Transformation auf zwei cartesische Koordinatensysteme anzuwenden, denen Anfangspunkt und z-Achse gemeinsam sind, während das eine System relativ zu dem anderen um diese gemeinsame Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert. Es seien nun x', y', z' die Koordinaten eines bewegten Massenpunktes m relativ zu dem fundamentalen, als unbewegt angesehenen Koordinatensystem und x, y, z die Koordinaten desselben Punktes relativ zum rotierenden Koordinatensystem. Man hat dann:

$$
\begin{aligned}
x' &= x \cos\Omega t - y \sin\Omega t\,, \\
y' &= x \sin\Omega t + y \cos\Omega t\,, \\
z' &= z\,.
\end{aligned}
$$

Die kinetische Energie des materiellen Punktes m, die relativ zu dem ruhenden System $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2)$ ist, drückt sich dann in den neuen Variablen durch

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega^2(x^2 + y^2) - 2\Omega y\dot{x} + 2\Omega x\dot{y} + \dot{z}^2) \tag{2}$$

aus. Wir bilden die Gleichungen **29** (4) oder, wie wir sie jetzt schreiben werden:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = -m\frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = -m\frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial y},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = -m\frac{\partial \varphi'}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2\Omega\dot{x}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3}$$

Hier ist das Potential φ durch die Gleichung

$$\varphi = \varphi' - \tfrac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) \tag{4}$$

gegeben.

Was wir als Schwerepotential beobachten, ist also gleich der Summe des Potentials φ' der reinen Massenanziehung und des Potentials $-\frac{1}{2}\Omega^2(x^2 + y^2)$ der Zentrifugalkraft bei der Rotationsbewegung des bewegten Systems um die z-Achse.

Die Größen

$$2\Omega\dot{y}, \quad -2\Omega\dot{x}, \quad 0 \tag{5}$$

sind die Komponenten längs der Achsen x, y, z eines Vektors

$$-\mathfrak{c} = \dot{\mathfrak{r}} \times 2\boldsymbol{\Omega}, \tag{5'}$$

der das Vektorprodukt ist aus der Relativgeschwindigkeit des Punktes und der doppelten Winkelgeschwindigkeit $2\boldsymbol{\Omega}$ des rotierenden Systems. Das ist der bekannte Ausdruck *der Corioliskraft oder der ablenkenden Kraft der Erddrehung.*

Den Gleichungen (3) und (4), die durch eine spezielle Wahl des Koordinatensystems x, y, z, gewonnen waren, haben wir somit eine geometrische Deutung gegeben, welche von dieser speziellen Koordinatenwahl unabhängig ist. Wenn wir dementsprechend das Achsensystem x, y, z mit ganz beliebigem Anfangspunkt und ganz beliebigen

Achsenrichtungen im rotierenden System wählen, so werden die Gleichungen (3):

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\Omega_z \dot{y} - 2\Omega_y \dot{z}, \\
\ddot{y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2\Omega_x \dot{z} - 2\Omega_z \dot{x}, \\
\ddot{z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2\Omega_y \dot{x} - 2\Omega_x \dot{y}
\end{aligned}
$$

oder in Vektorform:

$$
(6') \qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla\varphi + \dot{\boldsymbol{r}} \times 2\boldsymbol{\Omega}
$$

mit der oben in (4) angegebenen Bedeutung des Potentials. Die explizite Darstellung des Potentials ergibt sich, wenn man in (4) die neuen Koordinaten einführt.

Die Vektorgleichung (6′) läßt sich aus der Gleichung **29** (1) unmittelbarer auf dem folgenden vektoranalytischen Wege herleiten.

Bezeichnen wir Differentiationen in bezug auf das absolute Koordinatensystem mit d' und Differentiationen in bezug auf das relative Koordinatensystem mit d, so hat ein Punkt im Abstande $\boldsymbol{r}$ von der Rotationsachse die absolute Geschwindigkeit $d'\boldsymbol{r}/d't$, die gleich ist der Summe von der relativen Geschwindigkeit $d\boldsymbol{r}/dt$ und der Führungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$. Es besteht also die Identität:

$$
\frac{d'}{d't} = \frac{d}{dt} + \Omega \times .
$$

Durch zweimalige Anwendung dieses Operators ergibt sich für die absolute Beschleunigung:

$$
(7) \quad \frac{d'}{d't}\left(\frac{d'\boldsymbol{r}}{d't}\right) = \left(\frac{d}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times\right)\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}\right) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}).
$$

Da das letzte Glied rechts nach **7** (5′) auch in der Form $-\Omega^2 \boldsymbol{r}$ geschrieben werden kann, besitzt es ein Gradientenpotential $\frac{1}{2}\Omega^2 r^2$.

Durch Einführung des Ausdruckes (7) für die absolute Beschleunigung in die Gleichung **29** (1) ergibt sich dann:

$$
\ddot{\boldsymbol{r}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} - \nabla(\tfrac{1}{2}\Omega^2 r^2) = -\nabla\varphi'.
$$

Da nach (4) φ' durch $\varphi + \frac{1}{2}\Omega^2 r^2$ zu ersetzen ist, stimmt dies mit (6′) überein.

Durch Integration von (6) oder (6′) findet man die Bewegung eines Massenpunktes, so wie sie relativ zu einem mit der Erde fest verbundenen Koordinatensystem verläuft.

124. Die ablenkende Kraft der Erddrehung. Am auffälligsten unterscheidet sich die Gleichung **123** (6′) von der entsprechenden **29** (1) durch das Auftreten der Corioliskraft:

$$
(1) \qquad -\boldsymbol{c} = \dot{\boldsymbol{r}} \times 2\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{v} \times 2\boldsymbol{\Omega}.
$$

Nach den Eigenschaften des Vektorproduktes ist diese Kraft senkrecht zu der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und folglich zu der Tangente der Bahn. Gleichzeitig ist sie senkrecht zu $\boldsymbol{\Omega}$, d. h. zur Erdachse, oder parallel der Äquatorebene. Sie wirkt deshalb nur auf die Äquatorprojektion der Bewegung, während sie die Bewegungskomponente parallel der Erdachse ungeändert läßt. Sie sucht die auf die Äquatorebene projizierte Bahn, wie wir sagen werden, *antizyklonisch zu krümmen*, d. h. ihr diejenige Krümmung zu erteilen, die in Äquatorprojektion einen Umlauf entgegen der Erddrehung gibt (vgl. zyklonische und antizyklonische Zirkulation, S. 147). Für die entsprechende Projektion auf die Erdoberfläche ergibt sich auf der nördlichen Halbkugel eine Krümmung nach rechts, auf der südlichen nach links.

Die Komponente der Corioliskraft in einer durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{L}_I$ bestimmten Richtung ist durch das dreifache Produkt

$$c_L = \boldsymbol{L}_I \cdot \dot{\boldsymbol{r}} \times 2\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{L}_I \times \dot{\boldsymbol{r}} \cdot 2\boldsymbol{\Omega} \tag{2}$$

gegeben. Hier ist $\boldsymbol{L}_I \times \dot{\boldsymbol{r}}$ gleich dem Flächeninhalt, den die Längeneinheit $\boldsymbol{L}_I$ pro Zeiteinheit erzeugt, wenn sie die Bewegung des Punktes mitmacht. Von diesem Flächeninhalt geht in das skalare Produkt mit $2\boldsymbol{\Omega}$ nur die Projektion auf die Äquatorebene ein. Die gesuchte Komponente wird gleich diesem auf die Äquatorebene projizierten Flächeninhalt multipliziert mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde; es ergibt sich deshalb die folgende Regel, um die Komponente der Corioliskraft in einer beliebigen Richtung zu bestimmen:

(I) *Mit dem bewegten Punkte verbindet man eine Längeneinheit von der Richtung der gesuchten Komponente. Die Projektion dieser Längeneinheit auf die Äquatorebene beschreibt pro Zeiteinheit einen gewissen Flächeninhalt. Dieser Flächeninhalt, multipliziert mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde, gibt die Komponente der ablenkenden Kraft in der Richtung der Längeneinheit.*

Die Komponente in der gewählten Richtung hängt von zwei Variablen ab: von der Geschwindigkeitskomponente v_n des Punktes senkrecht zu der gewählten Richtung und von dem Winkel φ, den der beschriebene Flächeninhalt mit der Äquatorebene bildet. Die Tabelle III am Ende des Buches, die schon in Abschnitt **42** besprochen wurde, gibt die Komponente der ablenkenden Kraft als Funktion der beiden Variablen v_n und φ. Der Gebrauch der Tabelle geht aus den Bemerkungen in Abschnitt **42** hervor.

Wählt man in Formel (2) die Längeneinheit $\boldsymbol{L}_I$ horizontal und ist die Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$ ebenfalls horizontal, so beschreibt die Längeneinheit eine horizontale Fläche, deren Winkel φ mit der Äquatorebene das Komplement der Breite ist. Legt man ferner die Längeneinheit senkrecht zu der Horizontalgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, so wird die in

der Horizontalebene pro Zeiteinheit beschriebene Fläche gleich v, folglich ihre Projektion auf die Äquatorebene gleich $v \sin\varphi$. Man findet somit für die Horizontalkomponente $\mathfrak{c}_h$ der ablenkenden Kraft:

$$\mathfrak{c}_h = 2\Omega v \sin\varphi = 2\Omega_z v\,, \tag{3}$$

wo Ω_z die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die lokale Vertikale ist. Wir finden somit das praktisch wichtige Resultat:

(II) *Bei horizontaler Bewegung ist die Horizontalkomponente der ablenkenden Kraft gleich dem Produkt der Geschwindigkeit des Teilchens mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde um die lokale Vertikale.*

Die Kraft sucht, wie schon hervorgehoben, die Bahn des Teilchens antizyklonisch zu krümmen, d. h. nach rechts auf der nördlichen, nach links auf der südlichen Halbkugel.

Ist diese ablenkende Kraft die einzige in horizontaler Richtung wirkende Kraft, so muß sich das Teilchen mit einer Zentripetalbeschleunigung $v^2/\varrho = \mathfrak{c}_h$ bewegen. Der Krümmungsradius ϱ der Bahn ist:

$$\varrho = \frac{v}{2\Omega_z} = \frac{v}{2\Omega \sin\varphi} \tag{4}$$

also nur von der Geschwindigkeit v und der geographischen Breite φ abhängig. Ändert sich die Breite infolge der Bewegung unbedeutend, so ist der Krümmungsradius der Bahnkurve nahezu konstant. Die Bahn wird annähernd ein Kreis, gewöhnlich *Trägheitskreis* genannt, weil diese Kreisbewegung bei dieser Relativbewegung gewissermaßen eine ähnliche Rolle spielt wie die geradlinige bei der Absolutbewegung. Die Tabelle IV am Schluß des Buches gibt den Radius des Trägheitskreises als Funktion der geographischen Breite und der Geschwindigkeit.

Die als Argument dienende Geschwindigkeit und der tabulierte Radius sind in beliebigen, einander entsprechenden Einheiten gegeben, so daß man in jedem Fall eine zweckmäßige Wahl treffen kann. Bei einer Breite von 60° findet man für die Geschwindigkeiten 1 mm/sec, 1 cm/sec, 1 m/sec die Radien 7,92 m, 79,2 m und 7,92 km. Dies sind Geschwindigkeiten, wie man sie im Meere trifft, und die Durchmesser der hier denkbaren Trägheitskreise sind im allgemeinen klein im Vergleich zu den Querdimensionen der Meeresströme, eine Tatsache, die für die Dynamik des Meeres sicher von Bedeutung ist. Geht man zu den gewöhnlichen Geschwindigkeiten der Luft über, wie 10, 20, 30 m/sec, so findet man auf derselben Breite Radien von 79, 158, 238 km. Die entsprechenden Durchmesser 158, 317, 476 km sind fast von gleicher Größenordnung wie die Querdimensionen mächtiger Luftströme und können in deren Dynamik ernstlich eingreifen. Bei 30 m/sec Windgeschwindigkeit nähert sich der Durchmesser des Trägheitskreises dem halben Durchmesser einer außertropischen Zyklone. Dieselben Ge-

schwindigkeiten bei 20° Breite geben Durchmesser von 400, 800, 1200 km, die sich den meridionalen Dimensionen der geschlossenen Isobarkurven der subtropischen Antizyklonen nähern.

Das FOUCAULTsche Pendel gibt uns unmittelbar die Winkelgeschwindigkeit $\Omega_z = \Omega \sin\varphi$ der Erde um die lokale Vertikale; die entsprechende Periode eines vollen Umlaufes der Schwingungsebene bezeichnet man als *Pendeltag*. Der Umlauf im Trägheitskreis verläuft mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit $2\Omega_z$ und vollzieht sich in einem *halben Pendeltag*.

Wir haben die Bewegung im Trägheitskreise von der ablenkenden Kraft der Erddrehung abgeleitet. Ihre dynamische Natur findet man aber erst, wenn man die Bewegung als absolut betrachtet. Die ellipsoidisch geformte Erdoberfläche ist relativ zu den sehr nahe kugelförmigen Niveauflächen der reinen Anziehung geneigt. Auf dieser als absolut glatt gedachten ellipsoidischen Erdoberfläche könnte ein materielles Teilchen nicht ruhen, sondern es müßte nach dem Pol hinuntergleiten. Nur durch einen Umlauf längs der Parallelen, und zwar genau mit der Winkelgeschwindigkeit der Erde, erhält das Teilchen die nötige Zentrifugalkraft, um auf der Parallelen zu bleiben.

Dieser Umlauf des Teilchens längs einer Parallelen, den wir Ruhe relativ zur rotierenden Erde nennen, ist eine stabile Bewegung. Wir erkennen es durch Überlegungen, mit denen wir schon vertraut sind. Wir erteilen dem Teilchen einen störenden Impuls, der beispielsweise meridional polwärts gerichtet ist. Durch die erzeugte Meridionalbewegung nähert sich das Teilchen der Erdachse, und seine Umlaufsgeschwindigkeit um die Erdachse nimmt nach dem Flächensatz zu. Es erreicht folglich die mehr polaren Breiten mit einer größeren Winkelgeschwindigkeit als diejenige der rotierenden Erde. Der steigende Überschuß an Zentrifugalkraft erzeugt dann eine steigende äquatorwärts gerichtete Beschleunigung, welche die Meridionalbewegung zur Umkehr bringt. Wenn das Teilchen wieder am Ausgangsparallelkreis angelangt ist, hat es äquatorwärts dieselbe Meridionalgeschwindigkeit wie zu Beginn polwärts und es setzt seine Bewegung äquatorwärts fort. Jetzt ergibt sich nach dem Flächensatz eine verkleinerte Umlaufsgeschwindigkeit um die Erdachse, d. h. eine tragende Zentrifugalkraft kleiner als die polwärts gerichtete Komponente der reinen Anziehung. Die Meridionalbewegung wird wieder zur Umkehr gebracht und es erfolgen Schwingungen um den Ausgangsparallelkreis.

Diese Periodizität der Meridionalkomponente des Teilchens ist untrennbar mit einem Rhythmus seiner Zonalkomponente verbunden: Das Teilchen hat einen Überschuß an Zonalbewegung auf der polaren Seite des Gleichgewichtsparallelkreises, ein Defizit auf der äquatorialen Seite und ist bei dieser Zonalbewegung am weitesten zurück, wenn

es den Gleichgewichtsparallelkreis polwärts überquert, und am weitesten voraus, wenn es ihn äquatorwärts überquert. Das Teilchen beschreibt deshalb relativ zur rotierenden Erde eine antizyklonisch durchlaufene geschlossene Kurve, und zwar, wie die exakte Rechnung zeigt, angenähert einen Kreis, nämlich den Trägheitskreis. Relativ zu einem nichtrotierenden Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Mittelpunkt dieser Kreisbahn wird die Kreisbahn mit einer Winkelgeschwindigkeit entgegengesetzt gleich derjenigen der Erde um die lokale Vertikale durchlaufen. *Von der rotierenden Erde aus jedoch erscheint dies als eine doppelt so große Winkelgeschwindigkeit.* Deshalb tritt als Periode des Umlaufes der *halbe* und nicht der *ganze* Pendeltag auf.

Da die Bewegung im Trägkeitskreise unvermeidlich mit einer Änderung der geographischen Breite verbunden ist, sind die Bedingungen der Kreisbewegung nie exakt erfüllt. Da die Corioliskraft bei gegebener Geschwindigkeit mit der Breite zunimmt, ist die Bahn in den mehr polaren Breiten stärker gekrümmt als in den mehr äquatorialen. Die genaue Bahn wird dadurch eine trochoidförmige Kurve mit fast kreisförmigen, dicht aufeinanderfolgenden Ösen. Da man aber gewöhnlich nur Gelegenheit hat, kurze Stücke der Bahn zu verfolgen, gibt die Auffassung der Bahn als Kreis gewöhnlich genügende Annäherung. Die immer vorhandene Tendenz des angenähert oder exakt horizontal bewegten Teilchens, diese antizyklonisch gekrümmte Bahn einzuschlagen, spielt, wie wir mehrfach sehen werden, für die Dynamik der atmosphärischen Bewegungen eine außerordentlich wichtige Rolle.

Die Bahn, die relativ zur Erde als Trägheitskreis oder genauer als Trochoide erscheint, ist tatsächlich in absoluter Bewegung angenähert eine zonal verlaufende Sinusoide mit einer Wellenlänge, die mindestens gleich dem halben Umfang der Gleichgewichtsparallele ist.

Um nach dem Satz (I), S. 457, die Vertikalkomponente der ablenkenden Kraft zu finden, legen wir die Längeneinheit $\boldsymbol{L}_I$ vertikal. Die zonale Horizontalkomponente der Geschwindigkeit bestimmt dann die Fläche, welche die Projektion der Längeneinheit auf der Äquatorebene pro Zeiteinheit beschreibt. Wenn deshalb die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit den Winkel θ mit der Meridionalebene bildet, so wird die Vertikalkomponente der ablenkenden Kraft:

$$\mathfrak{c}_v = 2\Omega v_h \sin\theta \cos\varphi .$$

Für diese Komponente bleibt also die Rotation um die lokale Vertikale belanglos, und alles hängt von der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde um eine horizontale Achse in der Meridionalebene ab.

125. Einfache Bewegungen des materiellen Punktes auf der rotierenden und auf der ruhenden Erde. Um mit den Wirkungen der Erd-

drehung vertraut zu werden, wird es zweckmäßig sein, verschiedene einfache Bewegungen eines einzigen materiellen Punktes zu untersuchen und dabei die Bewegung von den beiden Bezugssystemen der rotierenden und der nichtrotierenden Erde aus zu betrachten.

Der materielle Punkt — oder das Teilchen — soll gezwungen sein, sich auf einer gegebenen Fläche

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

zu bewegen. Da ∇f ein zu der Fläche senkrechter Vektor ist, kann man durch $\lambda \nabla f$ eine beliebige zu der Fläche senkrechte Kraft bezeichnen und sich λ so bestimmt denken, daß diese Kraft das Teilchen verhindert, die Fläche zu verlassen. Die Bewegungsgleichung des Teilchens, das die Masse Eins haben soll, können wir dann in der Form

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\varphi + \lambda \nabla f + \dot{\mathbf{r}} \times 2\boldsymbol{\Omega} \tag{2}$$

schreiben, wo die vorläufig unbestimmte Größe λ (der LAGRANGEsche Multiplikator) so zu bestimmen ist, daß die Koordinaten x, y, z des Teilchens immer die Gleichung (1) befriedigen. Die Gleichung (2) gibt die Bewegung des Punktes relativ zu einem mit der rotierenden Erde fest verbundenen Koordinatensystem. Setzen wir $\boldsymbol{\Omega} = 0$, und ersetzen wir φ durch das Potential φ' der reinen Massenanziehung, so findet man dieselbe Bewegung bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Achsen die Rotation der Erde nicht mitmachen. Die Vektorgleichung (2) lautet in Komponentendarstellung:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + 2\Omega_z\dot{y} - 2\Omega_y\dot{z}, \\
\ddot{y} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} + 2\Omega_x\dot{z} - 2\Omega_z\dot{x}, \\
\ddot{z} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} + 2\Omega_y\dot{x} - 2\Omega_x\dot{y},
\end{aligned} \tag{3}$$

deren Aussage wir jetzt in einfachen Spezialfällen durch Integration untersuchen werden.

I. *Bewegung in einer Horizontalebene.* Die Fläche (1) soll die Horizontalebene $f \equiv z = 0$ sein. Die Ableitungen von φ nach x, y, z im konstanten, längs z gerichteten Schwerefelde werden $0, 0, g$, und die Ableitungen von f werden $0, 0, 1$. Da jede Bewegung längs z ausgeschlossen ist, hat man $\ddot{z} = \dot{z} = 0$, und die Bewegungsgleichungen (3) werden:

$$\left\{\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\Omega_z\dot{y}. \\
\ddot{y} &= -2\Omega_z\dot{x}. \\
\lambda &= g + 2\Omega_x\dot{y} - 2\Omega_y\dot{x}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Die beiden ersten Gleichungen bilden ein System für sich. Sie sind linear, und wenn man in erster Annäherung von der Abhängigkeit des Ω_z von x und y (d. h. ursprünglich von der geographischen Breite) absieht, haben sie konstante Koeffizienten. Unter dieser Voraussetzung verifiziert man, daß sich das Integral in der Form

$$(5)\qquad \begin{cases} x = x_0 + r_0 \cos(-2\Omega_z t + \psi_0), \\ y = y_0 + r_0 \sin(-2\Omega_z t + \psi_0) \end{cases}$$

schreiben läßt, wo x_0, y_0, r_0, ψ_0 Integrationskonstanten sind. Die Gleichungen stellen den antizyklonischen Umlauf des Teilchens mit der Winkelgeschwindigkeit $-2\Omega_z$ im Trägheitskreise

$$(5')\qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2$$

dar. Ist r der Radiusvektor, gemessen von dem Punkte x_0, y_0, z_0 aus, und ψ der Winkel desselben mit der x-Achse, so wird diese Kreisbewegung in Polarkoordinaten:

$$(5'')\qquad r = r_0, \quad \psi = -2\Omega_z t + \psi_0.$$

Die Gleichungen (5), (5'), (5'') stellen dieselbe Bewegung im Trägheitskreise dar, die wir früher durch die Formel **124** (4) ausgedrückt haben. Ist $\dot{x}$, $\dot{y}$ gefunden, so gibt die dritte Gleichung (4) als ergänzendes Resultat den Druck des Teilchens gegen die Horizontalebene. Legen wir die x-Achse tangentiell zum Parallelkreis mit positiver Richtung nach Osten, so ist $\Omega_x = 0$, und die dritte Gleichung (4) wird:

$$(6)\qquad \lambda = g - 2\Omega_y \dot{x} = g - 2\Omega \dot{x} \cos\varphi.$$

Der Druck, den die Horizontalebene auszuhalten hat, wechselt also periodisch mit der Zonalkomponente der Geschwindigkeit: bei positivem $\dot{x}$, d. h. Ostwärtsgeschwindigkeit, hat die Ebene weniger als das Gewicht des Teilchens zu tragen; bei negativem $\dot{x}$, d. h. Westwärtsbewegung, mehr als das Gewicht. Betrachtet man die Absolutbewegung, so erkennt man die Ursache in der vergrößerten Zentrifugalkraft bei der Ostwärts- und der verkleinerten Zentrifugalkraft bei der Westwärtsbewegung.

II. *Bewegung auf einer geneigten Fläche.* Der materielle Punkt soll jetzt unter Einwirkung der konstanten Schwere längs eines Parallelkreises vom Radius ϱ auf einer Rotationsfläche mit vertikaler Achse herumlaufen mit der „tragenden" horizontalen Geschwindigkeit v oder mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/\varrho$:

Durch Transformation der Gleichung (3) auf Zylinderkoordinaten unter Beachtung von

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0, \qquad \ddot{\varrho} = \dot{\varrho} = \ddot{z} = \dot{z} = \ddot{\psi} = 0, \quad \dot{\psi} = \omega =$$

findet man, daß die Gleichung für die ψ-Koordinate identisch erfüllt ist. Die Gleichungen für die ϱ- und z-Koordinate werden:

$$
(8) \qquad \begin{aligned} \frac{v^2}{\varrho} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \varrho} + 2\Omega_z v\,, \\ 0 &= \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - g - 2\Omega_\varrho v \end{aligned}
$$

Hieraus findet man:

$$
(9) \qquad \lambda = \frac{g + 2\Omega_\varrho v}{\frac{\partial f}{\partial z}} = -\frac{\frac{v^2}{\varrho} + 2\Omega_z v}{\frac{\partial f}{\partial \varrho}}
$$

und

$$
(10) \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \varrho}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{v^2}{\varrho} + 2\Omega_z v}{g + 2\Omega_\varrho v}\,.
$$

θ ist hier, vgl. Abb. 65, das Komplement des Scheitelwinkels desjenigen Kegels, der die Rotationsfläche längs der Kreisbahn berührt. Die Gleichung (10) gibt also, bei gegebener Geschwindigkeit des Punktes, die zur Erhaltung der Bewegung nötige Neigung oder, bei gegebener Neigung, die „tragende" Geschwindigkeit.

Abb. 65. Umlauf eines Teilchens auf einem Kegel.

Wir betrachten gewöhnlich Geschwindigkeiten der Größenordnung 10 m/sec und selten oder nie solche von 100 m/sec. Da Ω_ϱ höchstens gleich der Winkelgeschwindigkeit der Erde $0{,}0000729\,\text{sec}^{-1}$ werden kann und g von der Größenordnung $10\,\text{m}\,\text{sec}^{-2}$ ist, ist das zweite Glied des Nenners der Größenordnung nach mindestens 500mal kleiner als das erste Glied. Wir können deshalb die Formel (10) meistens mit großer Annäherung durch

$$
(11) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\;}{g\varrho} + \frac{2\Omega_z}{\;} v
$$

ersetzen

Ist der Krümmungsradius klein, so daß die Winkelgeschwindigkeit v/ϱ groß ist im Vergleich zu der Winkelgeschwindigkeit Ω_z der Erde um die lokale Vertikale, so wird das letzte Glied bedeutungslos, und man hat die Relation

$$
(12) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\;}{g\varrho}
$$

zwischen der Steilheit des Kegels und der tragenden Geschwindigkeit v auf einem Kreis mit dem Radius ϱ. Da die Geschwindigkeit nur als Quadrat vorkommt, ist die Umlaufsrichtung belanglos.

Es sei aber der Radius ϱ jetzt so groß, daß bei den vorkommenden Geschwindigkeiten die beiden Glieder in (11) von gleicher Größenordnung werden können. Wir müssen dann zwischen den Fällen unterscheiden, wo die Winkelgeschwindigkeit v/ϱ des Teilchens der Winkelgeschwindigkeit Ω_z um die lokale Vertikale gleich- oder entgegengesetzt gerichtet ist, d. h. der Umlauf zyklonisch oder antizyklonisch ist.

Beim *zyklonischen* Umlauf haben beide Glieder rechts in (11) dasselbe Vorzeichen. Bei gleicher tragender Geschwindigkeit findet man dann nach der vollständigen Formel (11) einen steileren Kegel als nach der vereinfachten Formel (12).

Beim *antizyklonischen* Umlauf haben dagegen die beiden Glieder rechts in (11) entgegengesetzte Vorzeichen. Solange v hinlänglich groß ist, wird aber das erste quadratische Glied das Vorzeichen bestimmen. Der Kegel bleibt fortwährend trichterförmig, aber flacher bei gleichem Wert der tragenden Geschwindigkeit v. Nimmt nun v ab, so wird das negative Glied im Vergleich zum positiven immer größer, der Trichter wird immer flacher und geht in eine Horizontalebene über, wenn

$$\frac{}{\varrho} = -2\Omega_z \tag{13}$$

ist. Das Teilchen läuft dann mit der Winkelgeschwindigkeit $-2\Omega_z$ in dem Trägheitskreis auf der Ebene herum. Nimmt nun die Geschwindigkeit v noch weiter ab, so überwiegt das negative Glied. Der Winkel θ wechselt sein Vorzeichen, und der Punkt läuft *auf der Außenseite eines Kegels* herum, dessen Scheitel oben liegt. Dieser konvexe Kegel wird bei abnehmendem v zunächst steiler und dann wieder flacher, um bei der Bewegung Null wieder in eine Horizontalebene überzugehen. Der Neigungswinkel nimmt seinen maximalen Wert an, wenn $v/\varrho = -\Omega_z$, also wenn die Winkelgeschwindigkeit bei der relativen Bewegung der Winkelgeschwindigkeit um die lokale Vertikale entgegengesetzt gleich ist und folglich die resultierende Winkelgeschwindigkeit in der absoluten Bewegung Null wird. Diese größtmögliche Neigung der Erzeugenden des konvexen Kegels wird:

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{\Omega_z^2 \varrho}{g} = \frac{\Omega_z v}{g}. \tag{14}$$

Schließlich können wir den Fall eines sehr großen Radius ϱ betrachten. Das erste Glied in (11) verschwindet dann, und man hat:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\Omega_z}{g} v. \tag{15}$$

Bei diesen sehr großen und sehr flachen Kegeln ergibt sich bei gleichgroßer negativer oder positiver Neigung derselbe absolute Betrag der tragenden Geschwindigkeit. Beim Konkavkegel wirkt jedoch nur der zyklonische Umlauf und beim Konvexkegel nur der antizyklonische

Umlauf tragend. Lösen wir nach v auf, so finden wir auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel θ die tragende Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\quad}{2\,\Omega_z} \operatorname{tg} \theta . \tag{16}$$

Die tragende Geschwindigkeit hat jedoch jetzt eine gebundene Richtung. Ein Beobachter, der in die Richtung der Bewegung sieht, hat auf der nördlichen Halbkugel das Gefälle der Fläche von rechts nach links, auf der südlichen Halbkugel von links nach rechts.

Diese Horizontalbewegung eines Teilchens auf einer Kegelfläche, einschließlich des Grenzfalles einer schiefen Ebene, ist stabil. Wenn die Ebene horizontal und also die tragende Geschwindigkeit gleich Null ist, löst jede kleine Störung einen Umlauf im Trägheitskreise aus. Läuft der Punkt auf einer schiefen Ebene mit der tragenden Geschwindigkeit v, so gibt die Störung eine Überlagerung einer Trägheitskreisbewegung auf der geradlinigen Bewegung. Der Punkt beschreibt eine Trochoide, und zwar je nach der relativen Stärke der tragenden Geschwindigkeit und der Störungsgeschwindigkeit eine Trochoide mit Öse, mit Spitze (Zykloide) oder nur eine wellenförmige Trochoide.

III. *Foucaults Pendel.* Als Folge der Erddrehung stellen sich, wie wir gesehen haben, gewisse schwingende Bewegungen, die Umläufe im Trägheitskreise, ein. Von besonderer Wichtigkeit wird es sein, das Zusammenwirken dieser auf der Erddrehung beruhenden Schwingungen mit Schwingungen anderen dynamischen Ursprungs kennenzulernen. Das einfachste Beispiel haben wir in dem FOUCAULTschen Pendel.

Wir legen den Anfangspunkt der Koordinaten in den Pol und die z-Achse längs der Erdachse. Man hat dann:

$$\Omega_x = \Omega_y = 0 , \qquad \Omega_z = \Omega .$$

Die Fläche (1) sei eine Umdrehungsfläche um die Erdachse und berühre die Erde am Pol. Wir entwickeln die Gleichung in der Nähe des Berührungspunktes nach TAYLOR und erhalten, wenn R der Radius der oskulierenden Kugel ist:

$$f = z - \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) + \cdots \tag{17}$$

Die partiellen Ableitungen nach x, y, z sind:

$$-\frac{x}{R} , \qquad -\frac{y}{R} , \qquad 1 . \tag{18}$$

Als äußere Kraft wirkt die Schwere, welche die Resultierende von Massenanziehung und Zentrifugalkraft ist (vgl. Abb. 66). Der absolute Betrag dieser Schwere am Pol sei g; ihre Richtung ist, weil die Erde eine Niveaufläche der Schwere ist, nach dem Krümmungszentrum der

Erdoberfläche am Pol gerichtet. Ist R_0 die Größe des Krümmungsradius, so wird das Kraftpotential in der Nähe des Pols:

$$\varphi = \frac{R_0^2 g}{r}$$

wo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + R_0)^2}$$

der Abstand des Punktes (x, y, z) vom Krümmungszentrum ist. Dies gibt die folgenden Kraftkomponenten:

$$-g\frac{R_0^2}{r^3}x, \quad -g\frac{R_0^2}{r^3}y, \quad -g\frac{R_0^2}{r^3}(z + R_0).$$

In der Nähe des Pols ist aber angenähert:

$$r = R_0, \quad z = 0,$$

und die Kraftkomponenten vereinfachen sich zu:

$$(19) \qquad -\frac{g}{R_0}x, \quad -\frac{g}{R_0}y, \quad -g.$$

Abb. 66. Krümmungszentrum und Anziehungszentrum.

Um die Komponenten der *reinen Anziehung* zu erhalten, muß man die Komponenten der Zentrifugalkraft $\Omega^2 x, \quad \Omega^2 y, \quad 0$

subtrahieren. Dies gibt als Komponenten der reinen Anziehung:

$$\left(-\frac{g}{R_0} - \Omega^2\right)x, \quad \left(-\frac{g}{R_0} - \Omega^2\right)y, \quad -g.$$

Wir können hier eine nützliche Hilfsgröße einführen, nämlich:

$$R_1 = \frac{R_0}{1 + \frac{R_0 \Omega^2}{g}}.$$

Die Komponenten der reinen Anziehung werden dann:

$$-\frac{g}{R_1}x, \quad -\frac{g}{R_1}y, \quad -g.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Ausdrücken (19), so sieht man: die Schwere (Resultierende von Anziehung und Zentrifugalkraft) ist nach dem Punkte $(0, 0, -R_0)$ — dem Krümmungszentrum der Erdoberfläche am Pol — gerichtet, während die reine Anziehung nach dem Punkte $(0, 0, -R_1)$ — den wir im folgenden das *Anziehungszentrum* nennen wollen — gerichtet ist. Den entsprechenden Radius R_1 nennen wir den *Anziehungsradius*. Dieser ist kleiner als der Krümmungsradius am Pol.

Durch Einführung von (18) und (19) und Beachtung von $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$ wird das Gleichungssystem (3):

$$\ddot{x} = -\left(\frac{\lambda}{R} + \frac{g}{R_0}\right)x + 2\Omega\dot{y} = -\left(\frac{\lambda}{R} + \frac{g}{R_1} - \Omega^2\right)x + 2\Omega\dot{y},$$

$$(20) \quad \ddot{y} = -\left(\frac{\lambda}{R} + \frac{g}{R_0}\right)y - 2\Omega\dot{x} = -\left(\frac{\lambda}{R} + \frac{g}{R_1} - \Omega^2\right)y - 2\Omega\dot{x},$$

$$\lambda =$$

Die Form, wo man R_1 statt R_0 eingeführt hat, ist besonders bequem, weil dort der ganze Einfluß der Erddrehung — Corioliskraft und Zentrifugalkraft — explizite auftritt.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$(21) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{g}{R_1}} = \sqrt{\frac{g}{R} + \frac{g}{R_0} + \Omega^2},$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$(20') \qquad \begin{cases} \ddot{x} = -(\omega^2 - \Omega^2)x + 2\Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} = -(\omega^2 - \Omega^2)y - 2\Omega\dot{x}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir, weil ω von Ω, der Winkelgeschwindigkeit der Erde, unabhängig ist, mit gleicher Bequemlichkeit die absolute und die relative Bewegung untersuchen.

Zunächst können wir von der Erddrehung absehen, also $\Omega = 0$ setzen. Relativ zum nichtrotierenden Koordinatensystem haben wir dann die Gleichungen:

$$(22) \qquad \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x, \\ \ddot{y} = -\omega^2 y. \end{cases}$$

Es läßt sich jede Gleichung für sich integrieren. Der Parameter ω kann sowohl reell wie imaginär sein. Setzen wir $\omega = i\,\omega'$, so können wir nach Belieben die Lösung trigonometrisch mit ω oder hyperbolisch mit ω' aufschreiben. Mit spezialisierten Integrationskonstanten bzw. bei spezieller Wahl der Richtungen der Achsen x und y erhält man dann in den beiden Fällen:

$$(23) \qquad \begin{aligned} x &= A\cos\omega t, \\ y &= B\sin\omega t \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x &= A\cosh\omega' t, \\ y &= B\sinh\omega' t. \end{aligned}$$

Die Bahnen, die das bewegte Teilchen in dem einen oder dem anderen Falle durchläuft, sind:

$$(24) \qquad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

also bei der trigonometrischen Lösung eine Ellipse, bei der hyperbolischen eine Hyperbel. A ist die reelle Achse der Hyperbel und soll die größere Achse der Ellipse sein. Bei der trigonometrischen Lösung

bleibt der Punkt immer in der Nähe des Gleichgewichtspunktes, er entfernt sich nie weiter als um die Strecke A von ihm, und kommt ihm nie näher als auf den Abstand B. Bei der hyperbolischen Lösung durchläuft der Punkt den einen Ast einer Hyperbel und nähert sich dabei nur einmal dem Gleichgewichtspunkte bis zu dem minimalen Abstand A, um sich dann endgültig zu entfernen. Die Lösung ist aber nur gültig, solange sich der Punkt in der Nähe des Gleichgewichtspunktes befindet. Bei $A = B$ geht die Ellipse in einen Kreis über bzw. die Hyperbel wird gleichschenklig. Bei $B = 0$ artet die elliptische Bahn in eine Gerade der Länge $2A$ längs der x-Achse aus, die hyperbolische artet in einen einseitig begrenzten Teil der x-Achse aus.

Ist die Pendellänge R kurz im Vergleich zum Anziehungsradius R_1, so hat man die trigonometrische Lösung mit der bekannten Frequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{25}$$

Wächst R an, so nimmt die Frequenz ab, aber allmählich langsamer als nach Formel (25), weil sich jetzt das zweite Glied unter der Wurzel in (21) neben dem ersten geltend macht. Wird R unendlich, so daß sich der Punkt in einer Ebene bewegt, welche die Erde am Pole berührt, so wird die Frequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R_1}}, \tag{26}$$

wo also R_1 der Anziehungsradius ist. Geht nun R durch unendlich zu negativen Werten (wobei man den Pendelfaden durch eine Pendelstange ersetzen muß), so nimmt die Frequenz immer weiter ab. Wird dabei $R = -R_0$, so wird, wie aus dem letzten Ausdruck von ω in (21) hervorgeht, die Frequenz der Pendelschwingungen gleich der Winkelgeschwindigkeit der Erde:

$$\omega = \pm\Omega. \tag{27}$$

Die Schwingungsdauer des Pendels beträgt dann 24 Stunden. Schwingt dabei das Pendel kreisförmig und in der Umdrehungsrichtung der Erde, so führt es einen vollen Umlauf in 24 Stunden aus; die Bewohner der rotierenden Erde werden sagen, daß der Punkt relativ zur Erde *ruht*. Schwingt das Pendel umgekehrt (antizyklonisch), so werden die Erdbewohner eine Umlaufszeit von 12 Stunden finden und die Bewegung des Teilchens einen Umlauf im Trägheitskreis nennen. Wird das Pendel noch kürzer, so nimmt die Frequenz immer weiter ab, und die Periode wird länger als ein Tag.

Schließlich wird die Frequenz Null und die Periode unendlich, wenn $R = -R_1$, d. h. wenn das Pendel im Anziehungszentrum unterstützt ist. Wird die Pendellänge noch kürzer, so wird die Frequenz imaginär, und wir gelangen zu der hyperbolischen Lösung.

Wir werden die trigonometrische Lösung (23) in der Form

$$x = \frac{A+B}{2} \cos \omega t + \frac{A-B}{2} \cos \omega t, \tag{28}$$
$$y = \frac{A+B}{2} \sin \omega t - \frac{A-B}{2} \sin \omega t$$

schreiben, die den späteren Übergang zu der relativen Bewegung erleichtert. Dementsprechend können wir die Bewegung in zwei Partialbewegungen zerlegen:

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2, \\ y = y_1 + y_2, \end{cases} \tag{29}$$

wo

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos \omega t, & x_2 = l_2 \cos(-\omega t), \\ y_1 = l_1 \sin \omega t, & y_2 = l_2 \sin(-\omega t) \end{cases} \tag{30}$$

ist. Jede dieser Partialbewegungen ist eine Kreisbewegung, die erste positiv oder zyklonisch mit dem Radius l_1, die zweite negativ oder antizyklonisch mit dem Radius l_2. Man kann jetzt (29) durch die Vektorgleichung

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 \tag{31}$$

ersetzen und erhält in Polarkoordinaten:

$$r_1 = l_1, \qquad r_2 = l_2, \tag{32}$$
$$\psi_1 = \omega t, \qquad \psi_2 = -\omega t.$$

Man kann sich also die Bahn in folgender Weise erzeugt denken: ein Radiusvektor der Länge l_1 ist mit dem einen Ende im Koordinatenanfangspunkt befestigt und dreht sich um diesen Punkt mit der konstanten Geschwindigkeit ω in positiver Richtung. An dem freien Endpunkt dieses Radiusvektors ist ein zweiter Radiusvektor der Länge l_2 befestigt, der sich mit der entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit $-\omega$ dreht. Der freie Endpunkt dieses letzten Radiusvektors beschreibt die elliptische Bahn. Diese Bahn wird zyklonisch oder antizyklonisch durchlaufen, je nachdem, ob der erste oder der zweite Radiusvektor der längere ist. Als Spezialfälle merke man sich: $l_2 = 0$ gibt eine zyklonisch und $l_1 = 0$ eine antizyklonisch durchlaufene zirkulare Bahn, und $l_1 = l_2$ gibt eine geradlinige Bahn in Richtung der x-Achse, deren Richtung in der Horizontalebene jedoch beliebig gewählt werden kann.

Wir denken uns jetzt einen Beobachter, der die Bewegung von der rotierenden Erde aus betrachtet. Weil er sich selbst mit der Winkelgeschwindigkeit Ω in zyklonischer Richtung dreht, wird er dem zyklonischen Umlaufe die Winkelgeschwindigkeit $\omega - \Omega$ und dem anti-

zyklonischen die Winkelgeschwindigkeit $-\omega - \Omega$ zuschreiben. Statt der beiden Kreisbewegungen (28) wird er die Kreisbewegungen:

$$(33) \qquad \begin{cases} x_1 = l_1 \cos(\omega - \Omega)\, t & x_2 = l_2 \cos(-\omega - \Omega)\, t\,, \\ y_1 = l_1 \sin(\omega - \Omega)\, t\,; & y_2 = l_2 \sin(-\omega - \Omega)\, t \end{cases}$$

sehen. Man verifiziert auch ohne weiteres, daß diese Ausdrücke und ebenfalls ihre Summen den Gleichungen (20) genügen. Stellt man die Bewegung nach (31) mittels zweier sich drehenden Radiivektoren mit den konstanten Längen l_1 und l_2 dar, so bilden diese die Winkel

$$\psi_1 = (\omega - \Omega)\, t\,, \qquad \psi_2 = (-\omega - \Omega)\, t$$

mit der x-Achse. Wenn $l_1 = l_2$, passiert der materielle Punkt periodisch den Gleichgewichtspunkt, und die Kurve hat das Aussehen der mittleren Kolonne, Abb. 67. Wenn l_1 und l_2 verschiedene Längen haben, z. B. $l_1 > l_2$, so berührt die Bahnkurve abwechselnd einen äußeren Kreis mit dem Radius l_1 und einen inneren Kreis mit dem Radius l_2.

Die Abb. 67 zeigt die Bahntypen für verschiedene Winkelgeschwindigkeiten ω und für drei gewählte Radienpaare l_1 und l_2, nämlich: (*a*) $l_1 = 2l_2$, (*b*) $l_1 = l_2$ und (*c*) $l_1 = \frac{1}{2}l_2$. Die Figuren *I* geben die möglichen Bahnformen auf der ruhenden Erde, also die absoluten Bahnen: eine zyklonisch durchlaufene Ellipse (*a*), eine zur Geraden entartete Ellipse (*b*) und eine antizyklonisch durchlaufene Ellipse (*c*). Betrachtet man diese Ellipsen von der rotierenden Erde aus, so sieht man Bahnen wie *II*—*VI*, je nach der relativen Größe von ω und Ω. Für sehr große ω, d. h. kurze Pendellängen, geben die Kurven *I* angenähert gültige Bahnen, aber für immer abnehmende ω, d. h. wachsende Perioden, ergeben sich Bahnen der Typen *II* und *III*. Ist diese Periode gleich 24 Stunden, d. h. $\omega = \Omega$, so wird die Bahn des Teilchens in allen drei Fällen ein Kreis, der Trägheitskreis (*IV*), und für noch größere Perioden besteht kein qualitativer Unterschied zwischen den bei der absoluten Bewegung zyklonisch gekrümmten (*Va*, *VIa*) und antizyklonisch gekrümmten Bahnen (*Vc*, *VIc*).

Die allgemeine Tendenz eines isolierten Teilchens, sich unter Einfluß der Erddrehung antizyklonisch zu bewegen, tritt somit klar hervor, und zwar treten nur antizyklonische Bahnen auf, sobald die Umlaufsperiode länger als 24 Stunden ist. Schon auf Grund der Abbildung 67 würde man also erwarten, daß bei den großen atmosphärischen Bewegungen die Luftteilchen in der Regel antizyklonische Bahnen beschreiben, während zyklonische langperiodische Bahnen nur unter besonderen kinematischen und dynamischen Bedingungen auftreten. Dies wird auch durch die empirischen Untersuchungen durchaus bestätigt, vgl. **173**.

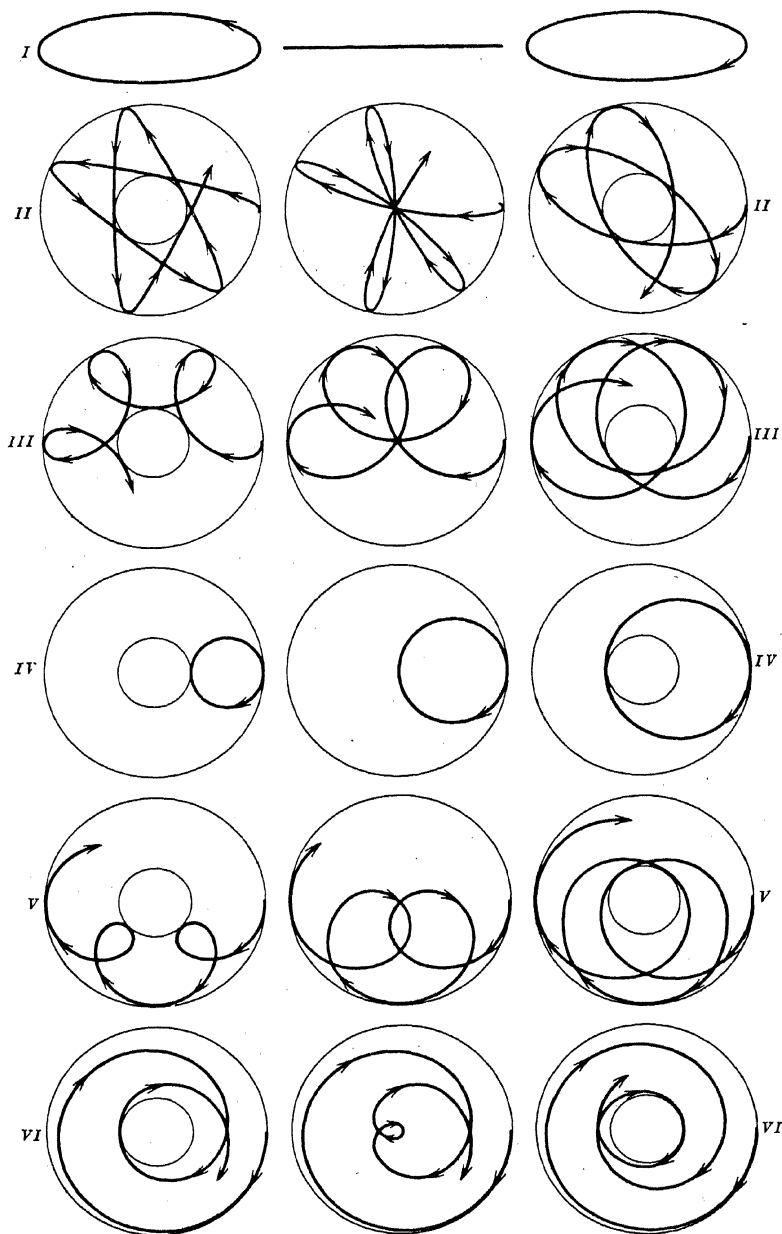



Abb. 67. Bahnen des FOUCAULTschen Pendels.

126. Die hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Erddrehung. Von den Bewegungsgleichungen **123** (6) oder (6′) des freien Punktes geht man nun, ganz wie früher, zu den entsprechenden hydrodynamischen Gleichungen in ihrer primären, physikalisch einfachsten Form über. Den Gleichungen **30** (4) entsprechend erhält man dann in Komponentenform:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - s\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega_z \dot{y} - 2\Omega_y \dot{z}\,,\\
\ddot{y} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - s\frac{\partial p}{\partial y} + 2\Omega_x \dot{z} - 2\Omega_z \dot{x}\,,\\
\ddot{z} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - s\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega_y \dot{x} - 2\Omega_x \dot{y}\,.
\end{aligned}
$$

In Vektorform ist dies:

$$
(1')\qquad \ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla\varphi - s\nabla p + \dot{\boldsymbol{r}} \times 2\boldsymbol{\Omega}\,.
$$

Von dieser Gleichungsform geht man in derselben Weise wie früher zu den voll entwickelten LAGRANGEschen oder EULERschen Gleichungsformen über.

Um eine bequeme Schreibweise zu erzielen, bringen wir die Erddrehungsglieder auf die linke Seite der Gleichung, wo sie als Coriolisbeschleunigung auftreten. Die Vektorgleichung wird dann:

$$
(2)\qquad \ddot{\boldsymbol{r}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} = -\nabla\varphi - s\nabla p\,.
$$

Zur Abkürzung werden wir, wie schon früher **123** erwähnt, die Coriolisbeschleunigung und deren Komponenten mit

$$
(3)\qquad \mathfrak{c} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}\,,\qquad
\begin{cases}
\mathfrak{c}_x = 2\Omega_y \dot{z} - 2\Omega_z \dot{y}\\
\mathfrak{c}_y = 2\Omega_z \dot{x} - 2\Omega_x \dot{z}\,,\\
\mathfrak{c}_z = 2\Omega_x \dot{y} - 2\Omega_y \dot{x}
\end{cases}
$$

bezeichnen.

Die LAGRANGEsche hydrodynamische Gleichung in Vektorform wird dann:

$$
(4)\qquad \nabla\boldsymbol{r} \cdot (\ddot{\boldsymbol{r}} + \mathfrak{c}) + s\nabla p + \nabla\varphi = 0\,,
$$

und in cartesischer Entwicklung:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
(\ddot{x} + \mathfrak{c}_x)\frac{\partial x}{\partial a} + (\ddot{y} + \mathfrak{c}_y)\frac{\partial y}{\partial a} + (\ddot{z} + \mathfrak{c}_z)\frac{\partial z}{\partial a} + s\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= 0\,,\\
(\ddot{x} + \mathfrak{c}_x)\frac{\partial x}{\partial b} + (\ddot{y} + \mathfrak{c}_y)\frac{\partial y}{\partial b} + (\ddot{z} + \mathfrak{c}_z)\frac{\partial z}{\partial b} + s\frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} &= 0\,,\\
(\ddot{x} + \mathfrak{c}_x)\frac{\partial x}{\partial c} + (\ddot{y} + \mathfrak{c}_y)\frac{\partial y}{\partial c} + (\ddot{z} + \mathfrak{c}_z)\frac{\partial z}{\partial c} + s\frac{\partial p}{\partial c} + \frac{\partial \varphi}{\partial c} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Beim Übergang zu den EULERschen Variablen hat man in der Gleichung (2) $\dot{\boldsymbol{r}}$ durch $\boldsymbol{v}$ und $\ddot{\boldsymbol{r}}$ durch $\dot{\boldsymbol{v}}$ zu ersetzen und die letztere Zeitableitung als die individuelle zu deuten. Dies gibt:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} + s\nabla p + \nabla\varphi = 0\,. \tag{6}$$

Oder in cartesischer Entwicklung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} + 2\Omega_y v_z - 2\Omega_z v_y + s\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0\,,\\
&\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} + 2\Omega_z v_x - 2\Omega_x v_z + s\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\,,\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} + 2\Omega_x v_y - 2\Omega_y v_x + s\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Die Grenzflächenbedingungen bleiben genau dieselben wie früher, sie werden durch die Berücksichtigung der Erddrehung nicht modifiziert. Dasselbe gilt für die Reibungsglieder, wenn man sie hinzufügen will.

Von den entwickelten Gleichungsformen (5) oder (7) werden wir später bei der Lösung von Spezialproblemen Gebrauch machen. Zunächst gehen wir jedoch zu der Diskussion der allgemeinen Eigenschaften der Stromfelder über und legen dabei die physikalisch einfachste Gleichungsform (1′) zugrunde. Die Diskussion verläuft genau parallel mit der in Kapitel IV geführten; es treten nur die Modifikationen ein, die aus dem neu hinzugekommenen Erddrehungsgliede folgen.

127. Potential- und Druckfeld. Die Gleichungen des Abschnittes **36** können wir ohne weiteres für die relative Bewegung neu aufschreiben, wobei wir nur den neuen Vektor $\mathfrak{c}$ oder dessen Komponenten hinzuzufügen haben.

Die Beziehung zwischen Druckfeld und Potentialfeld kann man wie früher in zweierlei Weise darstellen: durch *Karten der dynamischen Topographie gewisser Isobarflächen* oder durch *Isobarkarten in gewissen Niveaus*. Die Beziehung zwischen dieser Kartendarstellung und den Feldgrößen müssen wir jedoch neu untersuchen.

Die Gleichung **126** (1′) wird:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g} + s\boldsymbol{G} - \mathfrak{c} \tag{1}$$

und läßt sich durch Auflösung erstens nach der Schwerebeschleunigung $\boldsymbol{g}$ und zweitens nach dem Druckgradienten $\boldsymbol{G}$ schreiben in den Formen:

(2A) $\boldsymbol{g} = -(s\boldsymbol{G} - \dot{\boldsymbol{v}} - \mathfrak{c})\,,$ (2B) $\boldsymbol{G} = -q(\boldsymbol{g} - \dot{\boldsymbol{v}} - \mathfrak{c})\,,$

oder

(2′A) $\nabla\varphi = (-s\nabla p - \dot{\boldsymbol{v}} - \mathfrak{c})\,,$ (2′B) $\nabla p = q(-\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{v}} - \mathfrak{c})\,.$

Diese Gleichungen kann man formal als Gleichgewichtsgleichungen deuten, wobei die auf den rechten Seiten stehenden Ausdrücke als scheinbare Kräfte aufgefaßt werden. Dadurch gelangt man zu den Sätzen:

(A) Die Niveauflächen verlaufen senkrecht zu der scheinbaren Kraft, welche die Vektorsumme von Druckkraft, Trägheitskraft und Corioliskraft ist; die Dicke der Einheitsäquipotentialschichten ist gleich dem reziproken Zahlenwert dieser auf die Masseneinheit bezogenen scheinbaren Kraft:

$$(3\text{A})\qquad h_\varphi = \frac{1}{|s\mathbf{G} - \dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{c}|}$$

(B) Die Isobarflächen verlaufen senkrecht zu der scheinbaren Kraft, welche die Vektorsumme von Schwere, Trägheitskraft und Corioliskraft ist; die Dicke der Einheitsisobarschichten ist gleich dem reziproken Zahlenwert dieser auf die Volumeneinheit bezogenen scheinbaren Kraft:

$$(3\text{B})\qquad h_p = \frac{1}{q|\mathbf{g} - \dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{c}|}$$

Den Gleichungen **36** (4A) und (4B) entsprechend erhalten wir für die Differentiale des Potentials bzw. des Druckes längs eines Linienelementes $d\mathbf{r}$:

$$(4\text{A})\quad d\varphi = (-s\nabla p - \dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{c})\cdot d\mathbf{r}, \qquad (4\text{B})\quad dp = q(-\nabla\varphi - \dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{c})\cdot d\mathbf{r}.$$

Die Niveauflächen verlaufen senkrecht zu dem zusammengesetzten Vektor, der in der ersten Gleichung als Faktor von $d\mathbf{r}$ auftritt, und die Isobarflächen verlaufen senkrecht zu dem zusammengesetzten Vektor, der in der zweiten Gleichung als Faktor von $d\mathbf{r}$ auftritt. Als Differentialgleichungen der Niveau- bzw. der Isobarflächen findet man:

$$(5\text{A})\quad (-s\nabla p - \dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{c})\cdot d\mathbf{r} = 0, \qquad (5\text{B})\quad (-\nabla\varphi - \dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{c})\cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Während man durch die Integration dieser Gleichungen den Verlauf der einzelnen Flächen findet, bestimmt man durch die Lininenintegrale von (4) die Potential- bzw. die Druckunterschiede zwischen den Isobar- bzw. den Niveauflächen:

$$(6\text{A})\qquad \varphi_1 - \varphi_0 = -\int_{p_0}^{p_1} s\,\delta p - \int \dot{\mathfrak{v}}\cdot d\mathbf{r} - \int^{1} \mathfrak{c}\cdot d\mathbf{r},$$

$$(6\text{B})\qquad p_1 - p_0 = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} q\,\delta\varphi - \int_0^1 q\,\dot{\mathfrak{v}}\cdot d\mathbf{r} - \int^{1} q\,\mathfrak{c}\cdot d\mathbf{r}.$$

Hier ist (6A) die vollständige Formel für die barometrische Höhenmessung.

Für Kurven, die senkrecht verlaufen sowohl zu der Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ wie zu der Corioliskraft $-\mathfrak{c}$, fallen die beiden letzten Integrale fort, und die Formeln reduzieren sich auf:

$$\text{(7A)} \quad \varphi_1 - \varphi_0 = -\int_{p_0}^{p_1} s\,\delta p\,, \qquad \text{(7B)} \quad p_1 - p_0 = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} q\,\delta\varphi\,,$$

die mit den entsprechenden Formeln für die absolute Bewegung **36** (7A) und (7B) identisch sind. Diese Formeln kann man ohne Fehler in der Atmosphäre und im Meere anwenden, wenn man diese als zirkulare Wirbel um die Erdachse ansieht und längs einer beliebigen Parallelen zur Erdachse integriert. Denn die Corioliskraft ist immer senkrecht zu dieser Achse und ebenfalls die Beschleunigung $\dot{\mathfrak{v}}$ bei den längs der Parallelen gerichteten Bewegungen. Gewöhnlich kann man die Formel (7A) auch zur barometrischen Höhenmessung auf jeder quasivertikalen Kurve (**36**) verwenden.

Weiter erhält man als Spezialfall von (6A), wenn man die Kurve in eine Isobarfläche legt, und von (6B), wenn man die Kurve in eine Niveaufläche legt:

$$\text{(8A)} \quad \varphi_1 - \varphi_0 = \int^{1} (-\dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{c}) \cdot d\mathbf{r}\,, \qquad \text{(8B)} \quad p_1 - p_0 = \int^{1} q(-\dot{\mathfrak{v}} - \mathfrak{c}) \cdot d\mathbf{r}$$

Die erste Formel gibt die Potentialdifferenz zwischen verschiedenen Punkten der gleichen Isobarfläche, die zweite die Druckdifferenz zwischen Punkten der gleichen Niveaufläche. Der Unterschied gegenüber den entsprechenden Formeln für den Fall der absoluten Bewegung **36** (8A) und (8B) ist der, daß an Stelle der absoluten Beschleunigung jetzt die Vektorsumme von relativer Beschleunigung und Coriolisbeschleunigung tritt. Indem man die Folgerungen dieses Unterschiedes berücksichtigt, findet man unmittelbar die folgenden Resultate aus den entsprechenden des Abschnittes **36**:

Die Vektorsumme von relativer Beschleunigung und Coriolisbeschleunigung steht senkrecht auf den Schnittlinien der Isobarflächen mit den Niveauflächen.

Weiter:

Die zweidimensionale, in einer Isobarfläche enthaltene Komponente der Vektorsumme von relativer Beschleunigung und Coriolisbeschleunigung ist ein potentieller Vektor mit dem Wert des Schwerepotentials in dieser Fläche als Potential.

Die zweidimensionale, in einer Niveaufläche enthaltene Komponente der mit der Dichte multiplizierten Vektorsumme von relativer Beschleunigung und Coriolisbeschleunigung ist ein potentieller Vektor mit dem Wert des Druckes in dieser Fläche als Potential.

Wir können diese Sätze durch die folgenden Formeln symbolisieren:

(9A) $\dot{\mathfrak{v}}_{is} + \mathfrak{c}_{is} = -\nabla_{is}\varphi$, (9B) $q(\dot{\mathfrak{v}}_h + \mathfrak{c}_h) = -\nabla_h p$,

wo der Index *is* isobar und der Index *h* horizontal bedeutet, vgl. **36** (9A) und (9B). Man sieht, daß die Karten der dynamischen Topographie der Isobarflächen die lamellare Darstellung des Vektors $\dot{\mathfrak{v}}_{is} + \mathfrak{c}_{is}$ geben, und daß dementsprechend die Isobarkarten in gegebenen Niveaus die lamellare Darstellung des Vektors $q(\dot{\mathfrak{v}}_h + \mathfrak{c}_h)$ geben.

Weiter findet man der Gleichung **36** (11) entsprechend für den Winkel θ_p, den eine Isobarfläche mit einer Niveaufläche bildet:

$$|\sin\theta_p| = \frac{|\dot{\mathfrak{v}}_{is} + \mathfrak{c}_{is}|}{|g|}. \tag{10}$$

Drückt man die Isobarkomponenten durch die entsprechenden Horizontal- und Vertikalkomponenten aus, so erhält man, der Gleichung **36** (12) entsprechend:

$$|\operatorname{tg}\theta_p| = \frac{|\dot{\mathfrak{v}}_h + \mathfrak{c}_h|}{|g + \dot{v}_v + \mathfrak{c}_v|}. \tag{11}$$

Legt man ein Koordinatensystem mit der z-Achse vertikal und der x-Achse tangential zu den Schnittlinien der äquipotentiellen und isobaren Flächen und führt man die rechtwinkligen Komponenten von $\mathfrak{c}$ ein, so hat man die explizite Formel:

$$\operatorname{tg}\theta_p = \frac{-\dot{v}_y + 2(\Omega_x v_z - \Omega_z v_x)}{g + \dot{v}_z - 2(\Omega_y v_x - \Omega_x v_y)}, \tag{12}$$

die sich wieder nur um die Erddrehungsglieder von der entsprechenden **36** (12) unterscheidet. Wenn die Beschleunigung und Geschwindigkeit rein horizontal sind, $v_z = \dot{v}_z = 0$, so vereinfacht sich die Formel zu:

$$\operatorname{tg}\theta_p = \frac{-\dot{v}_y - 2\Omega_z v_x}{g - 2(\Omega_y v_x - \Omega_x v_y)}. \tag{13}$$

Bei den atmosphärischen oder den ozeanischen Bewegungen können wir gewöhnlich, wie in (7) durchgeführt, die vertikalen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen vernachlässigen, weil sie neben den entsprechenden horizontalen klein sind. Bei allen wirklich vorkommenden Luft- und Meeresbewegungen sind auch ferner die Größen $2\Omega_y v_x$ und $2\Omega_x v_y$ klein im Vergleich zur Schwerebeschleunigung g. Die Formel (13) reduziert sich dann auf:

$$\operatorname{tg}\theta_p = -\frac{\dot{v}_y}{g} - \frac{2\Omega_z v_x}{g}. \tag{14}$$

Wenn ein auf der positiven y-Achse sich befindliches Flüssigkeitsteilchen sich parallel zur x-Achse bewegt, so ist $\dot{v}_y$ eine reine Zentripetalbeschleunigung, und es ergibt sich:

$$\dot{v}_y = -\frac{v_x^2}{\varrho} = -\varrho\,\omega^2,$$

wo ϱ der Krümmungsradius der Bahn und $\omega = -\frac{v_x}{\varrho}$ die Winkelgeschwindigkeit ist.

Der Neigungswinkel der Isobarflächen wird dann durch die Gleichung

$$(15) \qquad \operatorname{tg} \theta_p = \frac{1}{g} \frac{v_x^2}{\varrho} - \frac{2\,\Omega_z v_x}{g} = \frac{\varrho\,\omega}{g} (\omega + 2\,\Omega_z)$$

gegeben. Setzt man hier $v_x = -v$, was natürlich ist, wenn man die Bahn als Teil eines zirkularen Wirbels betrachtet, so erhält man die Formel **125** (11). Die weitere Diskussion der Formel (15) führt, wie wir sehen werden, zu ganz ähnlichen Ergebnissen wie jene Formel.

Ist nun die Winkelgeschwindigkeit ω der relativen Bewegung groß im Vergleich zu $2\,\Omega_z$, so überwiegt das erste Glied, und wir erhalten wieder die Formel **38** (14):

$$(16) \qquad \operatorname{tg} \theta_p = \frac{1}{g} \frac{v_x^2}{\varrho} = \frac{\omega^2 \varrho}{g},$$

welche die Neigung der Isobarflächen im zirkularen Wirbel gibt.

Bei Strömungen, die in der relativen Bewegung schwach gekrümmt oder geradlinig erscheinen, d. h. bei Strömungen, wo ω klein ist relativ zu $2\,\Omega_z$, überwiegt dagegen das letzte Glied in (15), und man erhält die Formel:

$$(17) \qquad \operatorname{tg} \theta_p = -\frac{2\,\Omega_z v_x}{g},$$

welche *die* BUYS-BALLOTsche *Regel* enthält. Auf der nördlichen Halbkugel, wo Ω_z positiv ist, steigen im Falle $v_x > 0$ die Isobarflächen in Richtung negativer y an. Also: *Ein Beobachter auf der nördlichen Halbkugel, der in die Richtung des Windes sieht, hat den höheren Druck rechts und den tieferen links* — auf der südlichen Halbkugel umgekehrt.

Lösen wir die Gleichung (17) nach der Geschwindigkeit v_x auf, so erhalten wir den *Gradientwind*:

$$(18) \qquad -\frac{g}{2\,\Omega_z} \operatorname{tg} \theta_p,$$

d. h. den stationären Wind, der dem gegebenen Neigungswinkel der Isobarflächen entspricht. Diesen Wind findet man auch aus der zweiten Gleichung **126** (1), wenn man $\ddot{y} = 0$, $\dot{z} = 0$ setzt und nach $v_x = \dot{x}$ auflöst:

$$(19) \qquad v_x = -\frac{s}{2\,\Omega_z} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Da $\operatorname{tg} \theta_p = \frac{dz}{dy} = -\frac{\partial p / \partial y}{\partial p / \partial z}$ und $\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{s}$, so hat man:

$$(20) \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{g}{s} \operatorname{tg} \theta_p.$$

Führt man (20) in die Gleichung (19) ein, so erhält man ebenfalls wieder die Gleichung (18).

Nach der Formel (17) hat man in zyklonischen Wirbeln Tiefdruck und in antizyklonischen Hochdruck. Wird aber die Zirkulation genügend intensiv, so ist die Formel (17) nicht mehr gültig, und die Neigung der Isobarflächen muß dann nach der vollständigeren Formel (15) berechnet werden, wo noch die Zentrifugalkraft in der relativen Bewegung berücksichtigt ist. In der Zyklone, wo ω und Ω_z gleiches Vorzeichen haben, werden mit wachsendem ω die Vertiefungen der Isobarflächen immer größer. Theoretisch hat die Tiefe der zyklonischen Depression keine Grenze. In der Antizyklone dagegen, wo ω und Ω_z entgegengesetztes Vorzeichen haben, erreicht mit wachsendem ω die Neigung der in der Antizyklone aufgewölbten Isobarflächen ein Maximum, und zwar wenn:

$$\omega = -\Omega_z ,$$

d. h. wenn in der absoluten Bewegung keine Winkelgeschwindigkeit vorkommt. Der entsprechende maximale Neigungswinkel der Isobarflächen ist:

$$\operatorname{tg}\theta_p = -\frac{\Omega_z}{g}$$

Verläuft die antizyklonische Zirkulation noch schneller, so nimmt die Neigung der Isobarflächen wieder ab, und ihre Erhöhungen gehen schließlich in Depressionen über. Beispiele davon hat man in den hinlänglich kleinen Wirbeln (Tornados, Tromben, Wasserhosen), wo unabhängig von der Richtung des Umlaufes Wirbeltrichter vorhanden sind.

128. Die Diskontinuitätsflächen. Wir betrachten jetzt in relativer Bewegung den Fall, wo Dichte, Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Durchgang durch eine Fläche ihre Werte plötzlich von bzw. q, $\boldsymbol{v}$, $\dot{\boldsymbol{v}}$ zu bzw. q', $\boldsymbol{v}'$, $\dot{\boldsymbol{v}}'$ ändern. Die Formeln für diese Diskontinuitätsfläche ergeben sich entweder aus den Gleichungen des Abschnittes **37** für Diskontinuitätsflächen bei absoluter Bewegung durch Hinzufügen des Erddrehungsgliedes, oder direkt aus den Gleichungen **127** für die Isobarflächen in relativer Bewegung, wenn $\boldsymbol{v}$, $\dot{\boldsymbol{v}}$ durch die zusammengesetzten, schon in **37** (3) definierten Größen $\boldsymbol{v}^*$, $\dot{\boldsymbol{v}}^*$ ersetzt werden.

Die Gleichung der Diskontinuitätsfläche in endlicher Form ist nach **37** (1):

$$p - p' = 0 . \tag{1}$$

Nun hat man nach **127** (4B):

$$\begin{aligned} dp &= (-q\nabla\varphi - q\dot{\boldsymbol{v}} - q\mathfrak{c}) \cdot d\boldsymbol{r} , \\ dp' &= (-q'\nabla\varphi - q'\dot{\boldsymbol{v}}' - q'\mathfrak{c}') \cdot d\boldsymbol{r} , \end{aligned} \tag{2}$$

wo

$$\mathfrak{c} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} , \qquad \mathfrak{c}' = 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}'$$

ist. Setzen wir diese Druckdifferentiale einander gleich, so ergibt sich:

$$[(q - q')\nabla\varphi + q\dot{\mathfrak v} - q'\dot{\mathfrak v}' + q\mathfrak c - q'\mathfrak c']\cdot d\mathfrak r = 0\,,$$

oder

$$[(q - q')\nabla\varphi + q\dot{\mathfrak v} - q'\dot{\mathfrak v}' + 2\boldsymbol\Omega \times (q\mathfrak v - q'\mathfrak v')]\cdot d\mathfrak r = 0\,.$$

Zur Abkürzung setzen wir wie früher:

$$(3)\qquad \mathfrak v^* = \frac{q\mathfrak v - q'\mathfrak v'}{q - q'}\,,\qquad \dot{\mathfrak v}^* = \frac{q\dot{\mathfrak v} - q'\dot{\mathfrak v}'}{q - q'}\qquad \mathfrak c^* = \frac{q\mathfrak c - q'\mathfrak c'}{q - q'}$$

und erhalten als Differentialgleichung der Diskontinuitätsfläche:

$$(4)\qquad (\nabla\varphi + \dot{\mathfrak v}^* + \mathfrak c^*)\cdot d\mathfrak r = 0$$

oder:

$$(4')\qquad (\nabla\varphi + \dot{\mathfrak v}^* + 2\boldsymbol\Omega \times \mathfrak v^*)\cdot d\mathfrak r = 0\,.$$

Diese Gleichung ist von ganz derselben Form wie die Differentialgleichung **127** (5 B) der Isobarflächen.

Für den Neigungswinkel θ_d der Diskontinuitätsfläche gegen die Horizontalebene ergeben sich aus **127** (10), (11), (12) die folgenden Formeln:

$$(5)\qquad |\sin\theta_d| = \frac{|\dot{\mathfrak v}^*_{is} + \mathfrak c^*_{is}|}{\;}$$

$$(6)\qquad |\mathrm{tg}\,\theta_d| = \frac{|\dot{\mathfrak v}^*_h + \mathfrak c^*_h|}{|g + \dot v^*_v + \mathfrak c^*_v|}$$

$$(6')\qquad \mathrm{tg}\,\theta_d = \frac{-\dot v^*_y + 2(\Omega_x v^*_z - \Omega_z v^*_x)}{g + \dot v^*_z - 2(\Omega_y v^*_x - \Omega_x v^*_y)} = \frac{-q\dot v_y + q'\dot v'_y + 2[\Omega_x(q v_z - q'v'_z) - \Omega_z(q v_x - q'v'_x)]}{g(q - q') + q\dot v_z - q'\dot v'_z - 2[\Omega_y(q v_x - q'v'_x) - \Omega_x(q v_y - q'v'_y)]}\,,$$

wo die Bedeutung von $\mathfrak v^*_{is}\ldots$ aus (3) hervorgeht.

Vernachlässigt man im Nenner $\dot v^*_z$ und $\Omega_y v^*_x - \Omega_x v^*_y$, was erlaubt ist, wenn nicht $\dot{\mathfrak v}^*$ und $\mathfrak v^*$ zu groß sind, d. h. $q - q'$ nicht allzu klein, und formt man den Zähler mit Hilfe der Bewegungsgleichungen in der Horizontalebene:

$$\dot v_y + 2\Omega_z v_x - 2\Omega_x v_z = -\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y}\,,$$

$$\dot v'_y + 2\Omega_z v'_x - 2\Omega_x v'_z = -\frac{1}{q'}\frac{\partial p'}{\partial y}$$

um, so ergibt sich:

$$(7)\qquad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y} = g(q - q')\,\mathrm{tg}\,\theta_d\,,$$

welches die Beziehung zwischen den y-Komponenten der horizontalen Druckgradienten beiderseits der Fläche ist.

Soll jetzt die schwerere Masse keilförmig unter der leichteren liegen (der entgegengesetzte Zustand würde instabil sein), so hat man, je

nachdem, ob die positive y-Achse von der schwereren Masse q nach der leichteren q' gerichtet ist, oder umgekehrt:

d. h.
$$\mathrm{tg}\,\theta_d = \frac{dy}{dz} \lessgtr 0,$$

Hieraus ergibt sich:
$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y} \lessgtr 0.$$

In der Diskontinuitätsfläche ist immer $\partial^2 p/\partial y^2 = +\infty$, ein Fundamentalgesetz für die Analyse der synoptisch-meteorologischen Karten.

Aus **127** (20) ergeben sich die Relationen:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g\,q\,\mathrm{tg}\,\theta_p, \qquad \frac{\partial p'}{\partial y} = g\,q'\,\mathrm{tg}\,\theta'_p.$$

Führt man dies in (7) ein, so findet man:

(8)
$$\mathrm{tg}\,\theta_d = \frac{q\,\mathrm{tg}\,\theta_p - q'\,\mathrm{tg}\,\theta'_p}{q - q'} = (\mathrm{tg}\,\theta_p)^*,$$

wodurch die Neigung der Diskontinuitätsfläche direkt durch die Neigungen der Isobarflächen beiderseits der Fläche ausgedrückt ist.

Ein wichtiger Spezialfall von (6') ergibt sich, wenn die Bewegung beiderseits der Fläche rein horizontal ist, d. h. $\dot{v}_z^* = v_z^* = 0$. Dann wird die Gleichung:

(9)
$$\mathrm{tg}\,\theta_d = \frac{-\dot{v}_y^* - 2\,\Omega_z v_x^*}{g - 2(\Omega_y v_x^* - \Omega_x v_y^*)},$$

oder, wenn man im Nenner nur das erste Glied beibehält:

(10)
$$\mathrm{tg}\,\theta_d = \frac{\quad}{g} \quad \frac{2\Omega_z v_x^*}{g} - \frac{q\dot{v}_y - q'\dot{v}'_y}{g(q-q')} - \frac{2\Omega_z}{g}\,\frac{q v_x - q' v'_x}{q - q'}.$$

Bewegt sich schließlich die Diskontinuitätsfläche mit konstanter Geschwindigkeit, der Fall der Ruhe mit einbegriffen, so wird $\dot{v}_y = 0$, $\dot{v}'_y = 0$, d. h. $\dot{v}_y^* = 0$, und die obige Gleichung geht in die bekannte MARGULES*sche Formel*

(11)
$$\mathrm{tg}\,\theta_d = -\frac{2\Omega_z v_x^*}{g} = -\frac{2\Omega_z}{g}\,\frac{q v_x - q' v'_x}{q - q'}$$

über.

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß die stationären Diskontinuitätsflächen auf der rotierenden Erde im allgemeinen Falle geneigt sind. Horizontal sind sie nur in zwei Spezialfällen: erstens, wenn $q v_x - q' v'_x = 0$ ist, d. h. die spezifischen Bewegungsgrößen beider Strömungen einander gleich sind, zweitens, wenn $\Omega_z = 0$ ist, d. h. die Diskontinuitätsfläche sich am Äquator befindet.

Ist der Dichtesprung klein und setzt man $\bar{q} = (q + q')/2$, so hat man angenähert:

(11a)
$$\mathrm{tg}\,\theta_d = -\frac{2\Omega_z}{g}\,\frac{\bar{q}}{q - q'}\,(v_x - v'_x),$$

oder:

(11'a)
$$- v'_x = -\frac{g}{2\Omega_z}\,\frac{q - q'}{\bar{q}}\,\mathrm{tg}\,\theta_d.$$

In dieser Formel sind die Größen g, $q - q'$ und $\bar{q}$ immer positiv. Je nach den Vorzeichen von $\operatorname{tg}\theta_d$ und Ω_z bekommt man somit die folgenden vier Fälle:

1. $\operatorname{tg}\theta_d > 0\,,\quad \Omega_z > 0 \quad v'_x - v_x > 0\,.$
2. $\operatorname{tg}\theta_d < 0\,,\quad \Omega_z > 0 \quad v_x - v'_x > 0\,.$
3. $\operatorname{tg}\theta_d > 0\,,\quad \Omega_z < 0 \quad v'_x - v_x < 0\,.$
4. $\operatorname{tg}\theta_d < 0\,,\quad \Omega_z < 0 \quad v_x - v'_x < 0\,.$

In der letzten Reihe steht jedesmal die Vertikalkomponente des Gleitwirbels an der Diskontinuitätsfläche. Gemäß **5** (12) ist dieser gleich $v_x - v'_x$, wenn die positive y-Achse von der schwereren Masse q nach der leichteren q' gerichtet ist, welches in den Fällen 2 und 4 zutrifft, während in den Fällen 1 und 3, wo die positive y-Achse umgekehrt gerichtet ist, die Vertikalkomponente der Gleitwirbel gleich $v'_x - v_x$ wird. Wie ersichtlich ist, hat diese Komponente immer das gleiche Vorzeichen wie Ω_z, d. h. positiv auf der Nordhalbkugel (Fälle 1 und 2) und negativ auf der Südhalbkugel (Fälle 3 und 4). Es läßt sich diese Regel auch so ausdrücken:

Die Vertikalkomponente des Gleitwirbels an atmosphärischen Diskontinuitätsflächen ist immer zyklonisch.

Ausnahmen von dieser Regel sind theoretisch denkbar, wenn die bei der Ableitung der Näherungsformel (11a) gemachten Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Erfahrungsgemäß sind aber solche Ausnahmen äußerst selten.

Um die Formeln (7), (8), (10) und (11) praktisch brauchbar zu machen, können wir statt der Dichte die direkt gemessene Temperatur einführen, unter Anwendung der Relationen:

$$q = \frac{p}{R\theta}\,, \qquad q' = \frac{p}{R\theta'}\,.$$

Es ergibt sich dann, den Gleichungen (7), (8), (10) und (11) entsprechend:

$$\operatorname{tg}\theta_d = -\frac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial p'}{\partial y}}{g(\theta' - \theta)}\,\theta\theta'\,, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\theta_d = \frac{\theta' \operatorname{tg}\theta_p - \theta \operatorname{tg}\theta'_p}{\theta' - \theta}\,, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\theta_d = -\frac{\theta'\dot{v}_y - \theta\dot{v}'_y}{g(\theta' - \theta)} - \frac{2\Omega_z}{g}\,\frac{\theta' v_x - \theta v'_x}{\theta' - \theta} \tag{14}$$

$$\operatorname{tg}\theta_d = -\frac{2\Omega_z}{g}\,\frac{\theta' v_x - \theta v'_x}{\theta' - \theta} \tag{15}$$

Schließlich betrachten wir noch in aller Kürze die Diskontinuitätsfläche erster Ordnung (nach HADAMARDs Terminologie) in relativer Bewegung.

Aus der Gleichung **37** (7) ergibt sich durch Hinzufügen des Erddrehungsgliedes die folgende Gleichung für diese Diskontinuitätsfläche:

$$(16)\quad d\boldsymbol{r}\cdot[(\nabla q-\nabla q')(\nabla\varphi+\dot{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{c})+q(\nabla(\dot{\boldsymbol{v}}+\boldsymbol{c})-\nabla(\dot{\boldsymbol{v}}'+\boldsymbol{c}'))]\cdot d\boldsymbol{r}=0\,.$$

Wählt man das Koordinatensystem so, daß die Diskontinuitätsfläche im betrachteten Punkte die Ebene $z=0$ berührt, so findet man in ganz ähnlicher Weise wie in **37** für die Neigung der Fläche:

$$(17)\qquad \operatorname{tg}\theta_d'=-\frac{(\dot{v}_y+c_y)\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial(\dot{v}_y+c_y)}{\partial z}-\frac{\partial(\dot{v}_y'+c_y')}{\partial z}\right)}{\gamma_z\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)}$$

oder, wenn man das Erddrehungsglied explizite aufschreibt und die vertikalen Geschwindigkeiten vernachlässigt:

$$(18)\quad \operatorname{tg}\theta_d'=-\frac{(\dot{v}_y+2\Omega_z v_x)\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial(\dot{v}_y+2\Omega_z v_x)}{\partial z}-\frac{\partial(\dot{v}_y'+2\Omega_z v_x')}{\partial z}\right)}{g_z\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)}$$

Speziell findet man, wenn die Diskontinuitätsfläche ruht oder in allen Höhen sich gleichmäßig bewegt, d. h. $\dot{v}_y=0$, $\partial\dot{v}_y/\partial z=\partial\dot{v}_y'/\partial z=0$:

$$(19)\qquad \operatorname{tg}\theta_d'=-\frac{2\Omega_z}{g}\cdot\frac{v_x\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)+q\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_x'}{\partial z}\right)}{\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}}.$$

Hier bedeutet $\partial/\partial z$ die Ableitung senkrecht zur Fläche. Ist aber die Neigung θ_d' klein, so kann man ohne großen Fehler $\partial/\partial z$ als die Ableitung längs der Vertikalen deuten. In diesem Falle ergeben sich die Gleichungen (18) und (19) direkt aus den Gleichungen (10) und (11), wenn die Diskontinuitäten im Dichte-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld gegen Null konvergieren.

Man hat nämlich dann angenähert:

$$q-q'=q_0-q_0'+\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)dz=\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)dz\,,$$

$$q\dot{v}_y-q'\dot{v}_y'=q_0\dot{v}_{0y}-q_0'\dot{v}_{0y}'+\left(\frac{\partial(q\dot{v}_y)}{\partial z}-\frac{\partial(q'\dot{v}_y')}{\partial z}\right)dz=\left\{q\left(\frac{\partial\dot{v}_y}{\partial z}-\frac{\partial\dot{v}_y'}{\partial z}\right)+\dot{v}_y\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)\right\}dz\,,$$

$$q v_x-q'v_x'=\left\{q\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_x'}{\partial z}\right)+v_x\left(\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial q'}{\partial z}\right)\right\}dz\,.$$

Setzt man dies in die Gleichungen (10) und (11) ein, so findet man ebenfalls die Gleichungen (18) und (19).

Schließlich können wir auch in diese letzten beiden Gleichungen die Temperatur einführen. Aus:

$$=\frac{p}{R\theta}\,,\qquad q'=\frac{p'}{R\theta'}$$

ergibt sich durch logarithmische Ableitung nach z:

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{1}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z},$$
$$\frac{1}{q'}\frac{\partial q'}{\partial z} = -\frac{1}{\theta'}\frac{\partial \theta'}{\partial z} + \frac{1}{p'}\frac{\partial p'}{\partial z}$$

Wenn man beachtet, daß für Nachbarteilchen beiderseits der Diskontinuitätsfläche erster Ordnung $p = p'$, $\partial p/\partial z = \partial p'/\partial z$, $q = q'$, $\theta = \theta'$ ist, so findet man:

$$\frac{1}{q}\left(\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial q'}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \theta'}{\partial z}\right).$$

Setzt man dies in die Gleichungen (18) und (19) ein, so ergibt sich:

$$(20)\quad \operatorname{tg}\theta'_d = \frac{(\dot v_y + 2\Omega_z v_x)\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \theta'}{\partial z}\right) - \theta\left(\frac{\partial(\dot v_y + 2\Omega_z v_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\dot v'_y + 2\Omega_z v'_x)}{\partial z}\right)}{\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \theta'}{\partial z}}$$

$$(21)\quad \operatorname{tg}\theta'_d = \frac{2\Omega_z}{g_z}\,\frac{v_x\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \theta'}{\partial z}\right) - \theta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v'_x}{\partial z}\right)}{\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \theta'}{\partial z}},$$

wodurch die Neigung der Diskontinuitätsfläche erster Ordnung durch die beiderseitigen Felder von Temperatur, Geschwindigkeit und Beschleunigung ausgedrückt ist.

Aus (21) ist u. a. ersichtlich, daß die stationäre Diskontinuitätsfläche erster Ordnung ebenso wie diejenige nullter Ordnung am Äquator ($\Omega_z = 0$) horizontal sein muß.

129. Prozession und Zirkulation in der relativen Bewegung. Die Sätze des Abschnittes **40** über die Bildung der Zirkulations- und Wirbelbewegungen lassen sich ohne Schwierigkeiten auf den Fall der relativen Bewegung übertragen, indem man bei Ableitung der Sätze aus der Bewegungsgleichung das Erddrehungsglied berücksichtigt. Die meisten Sätze verlieren aber dabei mehr oder weniger an Übersichtlichkeit. Sehr einfach jedoch bleibt der Satz über die Geschwindigkeitszirkulation. Diesen haben wir auch schon durch eine einfache Überlegung auf den Fall der relativen Bewegung übertragen (**42**). Da dieser Satz außerordentlich vielseitige Anwendungen auf die Diskussion der Luft- und Meeresbewegungen zuläßt, wollen wir der Vollständigkeit halber jetzt auch die direkte Ableitung aus der durch das Erddrehungsglied ergänzten Bewegungsgleichung **126** (1′) geben. Dabei betrachten wir der Allgemeinheit halber erst die Prozession einer nicht geschlossenen Kurve und schlagen denselben Weg wie in **51** ein bei der parallelen Ableitung des Zirkulationssatzes und des Satzes von der Arbeit bei einem Kreisprozeß.

Die Bewegungsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -\nabla\varphi - s\nabla p + \boldsymbol{v} \times 2\boldsymbol{\Omega} \tag{1}$$

multiplizieren wir skalar mit dem Linienelement $\delta\boldsymbol{r}$ einer materiellen Kurve. Es ergibt sich:

$$\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta\boldsymbol{r} = -\delta\varphi - s\,\delta p + \boldsymbol{v} \times 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \delta\boldsymbol{r}, \tag{2}$$

wo $\delta\varphi$ die Potentialvariation und δp die Druckvariation längs des Linienelementes $\delta\boldsymbol{r}$ ist. Wir integrieren längs der Kurve vom Anfangspunkt 0 bis zum Endpunkt 1. Wenn man gleichzeitig das dreifache Produkt im letzten Gliede umformt, ergibt sich:

$$\int_0^1 \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \delta\boldsymbol{r} = -(\varphi_1 - \varphi_0) - \int_0^1 s\,\delta p - \int_0^1 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v} \times \delta\boldsymbol{r}. \tag{3}$$

Das letzte Integral läßt sich geometrisch deuten. Die Erde besitzt als rotierender fester Körper ein Wirbelfeld mit dem nach Richtung und Größe konstanten Wirbeln $2\boldsymbol{\Omega}$ und mit Einheitswirbelröhren parallel der Erdachse, die sämtlich den Querschnitt $1/(2\Omega) = 6{,}86 \cdot 10^3\,\mathrm{m}^2$ besitzen. Im letzten Integral oben stellt $\boldsymbol{v} \times \delta\boldsymbol{r}$ diejenige Fläche dar, die das materielle Linienelement $\delta\boldsymbol{r}$ infolge seiner Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ pro Zeiteinheit beschreibt. Das skalare Produkt dieser Fläche mit $2\boldsymbol{\Omega}$ ergibt den Wirbelfluß in der entsprechenden Wirbelröhre vom Querschnitt $|\boldsymbol{v} \times \delta\boldsymbol{r}|$. Die Integration längs der ganzen Kurve gibt schließlich die Anzahl von Einheitswirbelröhren der Erde, welche die bewegte Kurve pro Zeiteinheit durchschneidet. Ebenso viele solcher Einheitswirbelröhren durchschneidet die Projektion der Kurve auf die Äquatorebene. Bezeichnen wir deshalb durch $d\Sigma$ die elementare Fläche, welche die Äquatorprojektion der Kurve in dem Zeitelement dt beschreibt, so ergibt sich

$$\int 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{v} \times \delta\boldsymbol{r} = 2\Omega \frac{d\Sigma}{dt} \tag{4}$$

als Ausdruck für die Zahl von Wirbelsolenoiden der Erde, welche die Kurve pro Zeiteinheit durchschneidet.

Formen wir jetzt das erste Integral (3) nach der Formel **19** (11) um, und behalten wir auf der linken Seite nur die Zeitableitung der Prozession C_0^1, so ergibt sich:

$$\frac{dC_0^1}{dt} = (\tfrac{1}{2}v_1^2 - \varphi_1) - (\tfrac{1}{2}v_0^2 - \varphi_0) - \int_0^1 s\,\delta p - 2\Omega \frac{d\Sigma}{dt}. \tag{5}$$

Diese Formel für die nicht geschlossene Kurve ist noch der ursprünglichen Bewegungsgleichung (1) äquivalent und ist eine für besondere Zwecke bequeme Form derselben. Besonders nützlich ist aber der Spezialfall, wo die Kurve geschlossen ist. Die Gleichung verliert da-

durch an Allgemeinheit, läßt aber dafür wichtige spezielle Eigenschaften der Bewegung hervortreten. Wenn der Punkt 1 mit dem Punkte 0 zusammenfällt, wird $v_1 = v_0$, $\varphi_1 = \varphi_0$, und das Integral von $s\,\delta p$ drückt die Anzahl der isobar-isosteren Solenoide aus, welche die geschlossene Kurve umschließt, und die Gleichung (5) reduziert sich auf:

$$\frac{dC}{dt} = N(s, -p) - 2\Omega\frac{d\Sigma}{dt}, \tag{6}$$

die mit **42** (1) identisch ist. In dieser Formel können wir Σ als einen bestimmten Flächeninhalt auffassen, nämlich den Flächeninhalt, den die Projektion der geschlossenen Kurve auf die Äquatorebene begrenzt. Die Gleichung sagt deshalb folgendes aus:

Die Beschleunigung der Zirkulation einer geschlossenen materiellen Kurve relativ zur Erde drückt sich durch eine Summe von zwei Gliedern aus:

Das erste Glied läßt sich darstellen als die Zahl $N(s, -p)$ der von der Kurve umschlossenen isobar-isosteren Solenoide und wirkt in der Umdrehungsrichtung vom Volumenaszendenten ∇s zum Druckgradienten $-\nabla p$.

Das zweite Glied läßt sich darstellen als das Produkt der doppelten Winkelgeschwindigkeit der Erde mit der Veränderungsgeschwindigkeit der Fläche Σ, welche die Projektion der Kurve auf der Äquatorebene begrenzt, und wirkt zyklonisch bei Abnahme, antizyklonisch bei Zunahme dieses Flächeninhaltes.

Wir haben in Kapitel IV zahlreiche Anwendungen des Zirkulationssatzes in seiner primären Form gegeben, wo man die Bewegung „absolut“ betrachtete. Die entsprechenden Anwendungen des auf die relative Bewegung zugeschnittenen Satzes werden zu einer Reihe von wichtigen Gebrauchsformeln der dynamischen Meteorologie und Hydrographie führen.

130. Spezielle Formen des Zirkulationssatzes. Wie in Abschnitt **41** soll jetzt die Kurve, deren Zirkulation bestimmt wird, ein krummliniges Viereck sein, das in einer Vertikalebene enthalten ist; zwei der Seiten sollen *isobare* Kurven mit den Drucken p_0 und p_1 sein, die beiden anderen Seiten a und b, welche die isobaren Seiten verbinden, sollen *vertikal* oder *quasivertikal* sein nach der in **36** gegebenen Bedeutung dieses Wortes. Um der Kurve eine zweckmäßige Form für die Anwendung auf die Atmosphäre und das Meer zu geben, werden wir annehmen, daß die vertikalen oder quasivertikalen Verbindungskurven kurz im Vergleich zur Länge L der isobaren Kurven sind. Wegen der Erdkrümmung werden die isobaren Kurven Kreisbögen, die wir aber nur so lang wählen, daß wir sie angenähert durch Geraden ersetzen und als Vektoren $\mathbf{L}$ behandeln können. Den Verhältnissen in der Atmosphäre und im Meer entsprechend nehmen wir alle Geschwindigkeiten als sehr angenähert horizontal an.

Da auf den isobaren Kurven $dp = 0$, ist das Linienintegral, das die Anzahl der Solenoide innerhalb der Kurve darstellt, nur längs der beiden vertikalen (quasivertikalen) Verbindungskurven von Null verschieden, und wir erhalten der Gleichung **41** (1 A) entsprechend:

$$\frac{dC}{dt} = -\int_{p_0}^{p_1} s_a \delta p + \int_{p_0}^{p_1} s_b \delta p - 2\Omega \frac{d\Sigma}{dt}. \tag{1}$$

Die beiden Integrale rechts lassen sich wie bei dem Übergange zu **41** (2 A) auswerten und ergeben $(\bar{s}_a - s_b)(p_1 - p_0)$, wo $\bar{s}_a$ und $\bar{s}_b$ passende Mittelwerte des spezifischen Volumens auf den Vertikalen a und b sind. Sind weiter $\bar{\boldsymbol{v}}_0$ und $\bar{\boldsymbol{v}}_1$ passende Vektormittel der Geschwindigkeiten in den Niveaus der Isobarkurven p_0 und p_1, so beschreiben diese Kurven pro Zeiteinheit die Flächen $\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{L}$. Die Fläche, welche die Projektion der geschlossenen Kurve auf die Horizontalebene umschließt, nimmt deshalb pro Zeiteinheit um den Betrag $(\bar{\boldsymbol{v}}_1 - \bar{\boldsymbol{v}}_0) \times \boldsymbol{L}$ zu. Dieser Flächeninhalt, skalar mit $2\boldsymbol{\Omega}$ multipliziert, gibt dann das letzte Glied rechts in (1), so daß wir, der Gleichung **41** (2 A) entsprechend,

$$\frac{dC}{dt} = (\bar{s}_a - \bar{s}_b)(p_0 - p_1) - 2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\bar{\boldsymbol{v}}_1 - \bar{\boldsymbol{v}}_0) \times \boldsymbol{L} \tag{2}$$

erhalten. Sind $\bar{v}_{0,n}$ und $\bar{v}_{1,n}$ die mittleren Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu den isobaren Kurven, und ist Ω_z die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die lokale Vertikale, so ergibt sich die folgende Form, wo nur Skalargrößen auftreten:

$$\frac{dC}{dt} = (\bar{s}_a - \bar{s}_b)(p_0 - p_1) - 2\Omega_z(\bar{v}_{1,n} - \bar{v}_{0,n})L. \tag{2'}$$

Eine andere Umformung der Gleichung (1) erhält man, wenn man auf den quasistatischen Charakter der atmosphärischen oder ozeanischen Bewegungen Rücksicht nimmt. Die längs der quasivertikalen Kurven a und b berechneten Integrale in (1) stellen dann die Potentialunterschiede zwischen der oberen und unteren Isobarfläche dar in der Nähe der Verbindungskurven a und b. Wir werden diese Potentialunterschiede mit $(\varphi_{p_0}^{p_1})_a$ und $(\varphi_{p_0}^{p_1})_b$ bezeichnen. Dies gibt, der Gleichung **41** (3 A) entsprechend, die Formel:

$$\frac{dC}{dt} = (\varphi_{p_0}^{p_1})_a - (\varphi_{p_0}^{p_1})_b \cdot \; 2\Omega_z(\bar{v}_{1,n} - \bar{v}_{0,n})L. \tag{3}$$

Schließlich kann man in die Integrale rechts in (1) die Mitteltemperaturen $\bar{\theta}_a$ und $\bar{\theta}_b$ entlang der Vertikalen a und b einführen. Dadurch erhält man, der Gleichung **41** (9) entsprechend, die Formel:

$$\frac{dC}{dt} = R(\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_b)\log\frac{p_0}{p_1} - 2\Omega_z(\bar{v}_{1,n} - \bar{v}_{0,n})L. \tag{4}$$

Bisher haben wir den Zirkulationssatz auf Kurven angewandt, die im betrachteten Zeitpunkt in einer Vertikalebene enthalten sind und deshalb Solenoiden in großer Zahl umfassen können. Die Betrachtung der Zirkulation dieser Kurven führt sowohl bei der relativen wie bei der absoluten Bewegung auf die primären Bewegungsursachen. Ist aber in dieser Weise erst eine Bewegung zustande gekommen, so kann man aus dem Zirkulationssatze für horizontale Kurven, die wenige oder keine Solenoide umfassen, wichtige Folgerungen für die weitere Bewegung ziehen. Für solche Kurven fällt das erste Glied rechts in der Gleichung **129** (6) fort, und die Zirkulationsbeschleunigung wird:

$$\frac{dC}{dt} = -2\Omega\frac{d\Sigma}{dt}. \tag{5}$$

Diese Gleichung läßt sich unmittelbar integrieren und ergibt:

$$C - C_0 = -2\Omega(\Sigma - \Sigma_0). \tag{6}$$

Betrachtet man also eine horizontal verlaufende geschlossene materielle Kurve zu zwei Zeitpunkten, so hat sie in der dazwischenliegenden Zeit so viel zyklonische Zirkulation gewonnen, als sie umschlossene Wirbelsolenoide der Erde verloren hat; oder sie hat so viel antizyklonische Zirkulation gewonnen, als sie umschlossene Wirbelsolenoide der Erde gewonnen hat. Für horizontale Kurven gilt also die einfache qualitative Regel:

Zirkulationsfreie horizontale materielle Kurven erwerben durch Kontraktion zyklonische, durch Expansion antizyklonische Zirkulation.

Wir betrachten schließlich den folgenden Fall, der für die meteorologischen Anwendungen nützlich sein wird.

Eine geschlossene horizontale materielle Kurve, welche die Erdachse nicht umschließt und deren Meridionalerstreckung gering ist, soll mit der Meridionalkomponente v_y von der einen zur anderen Halbkugel geführt werden. Die Projektion des von der Kurve umschlossenen Flächeninhalts F auf die Äquatorebene ist $\Sigma = F\sin\varphi$, und die Zeitableitung dieses projizierten Flächeninhalts wird:

$$\frac{d\Sigma}{dt} \quad \frac{dF}{dt}\sin\varphi + F\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dF}{dt}\sin\varphi + F\cos\varphi\frac{v_y}{R} \tag{7}$$

wo R den Erdradius bedeutet. In hohen Breiten ist das zweite Glied rechts sehr klein gegenüber dem ersten, am Äquator jedoch, wo das erste Glied verschwindet, wird:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = F\frac{v_y}{R}. \tag{8}$$

Bei einer Bewegung von der Südhalbkugel zur Nordhalbkugel ($v_y > 0$) wird $d\Sigma/dt > 0$ und folglich gemäß Gleichung (5) $dC/dt < 0$, d. h. bei

Annäherung an den Äquator bildet die Kurve zyklonische Zirkulation der Südhalbkugel, und dieselbe Zirkulationsbeschleunigung setzt sich nach dem Passieren des Äquators als zunehmende antizyklonische Zirkulation der Nordhalbkugel fort. Bei der entgegengesetzten Äquatorpassage von Norden nach Süden ($v_y < 0$) nimmt die Kurve zyklonische Zirkulation der Nordhalbkugel an und vergrößert diese weiter jenseits des Äquators, was dort mit einer antizyklonischen Zirkulationsbeschleunigung gleichbedeutend ist.

Die Luft, welche gerade den Äquator passiert hat, zeigt also meistens antizyklonisch gekrümmte Stromlinien oder, wenn diese Krümmung fehlt, antizyklonische Scherung.

131. Diagnostische Anwendungen des Zirkulationssatzes. Von den bisher gemachten prognostischen Anwendungen gehen wir jetzt zu einigen diagnostischen Anwendungen über, indem wir in der Gleichung **130** (3) $dC/dt = 0$ setzen und gleichzeitig das Symbol $\varphi_{p_0}^{p_1}$ durch das Symbol H für dynamische Höhen oder Tiefen in der Atmosphäre oder im Meer ersetzen. Es wird dann:

$$H_a - H_b = 2\Omega_z(\bar{v}_{1,n} - \bar{v}_{0,n})L\,. \tag{1}$$

Wir legen die Kurve zunächst in die Richtung der relativen Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}_1 - \bar{\boldsymbol{v}}_0$. Die zu $\boldsymbol{L}$ senkrechte Komponente $\bar{v}_{1,n} - \bar{v}_{0,n}$ des Vektors $\bar{\boldsymbol{v}}_1 - \bar{\boldsymbol{v}}_0$ wird dann Null, die Kurve ändert ihren Flächeninhalt nicht, und zwar weder bei Projektion auf die Horizontalebene noch bei Projektion auf die Äquatorebene. Man findet deshalb die Gleichung:

$$H_a - H_b = 0\,, \tag{2}$$

welche aussagt, daß beide Vertikalen a und b dieselbe dynamische Höhe haben. Hält man die eine dieser Vertikalen fest, während sich die andere bewegt, so beschreibt jeder Punkt dieser bewegten Vertikalen eine Kurve, die immer die Richtung der relativen Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}_1 - \bar{\boldsymbol{v}}_0$ hat und gleichzeitig eine Kurve gleicher Höhe der einen isobaren Fläche über der anderen ist. Man hat das wichtige Resultat:

Die Kurven gleicher dynamischer Höhe, welche die dynamische Topographie einer Isobarfläche relativ zu einer anderen geben, sind gleichzeitig die Stromlinien für den Vektorzuwachs der Geschwindigkeit von einer Isobarfläche zur anderen.

Sodann wählen wir die Vertikalebene, welche die geschlossene Kurve enthält, senkrecht zu der relativen Geschwindigkeit. Die Gleichung (1) wird dann:

$$|H_a - H_b| = 2\Omega_z|\bar{\boldsymbol{v}}_1 - \bar{\boldsymbol{v}}_0|L\,, \tag{3}$$

oder nach der Geschwindigkeitsdifferenz aufgelöst:

$$(4) \qquad - v_0| = \frac{1}{2\Omega_z} \, |H_a - H_b|$$

Diese Formel gibt den skalaren Wert der Geschwindigkeitsdifferenz, für die wir schon die Stromlinien gefunden haben. Führen wir die geometrischen Höhen h_a und h_b ein, so wird:

$$(5) \qquad |\bar{v}_1 - \bar{v}_0| = \frac{g}{2\Omega_z} \frac{|h_a - h_b|}{L} = \frac{g}{2\Omega_z} \operatorname{tg} \theta_r ,$$

wo θ_r den Neigungswinkel der Isobarfläche $p = p_1$ relativ zur Isobarfläche $p = p_0$ darstellt. Befindet sich die unterste Isobarfläche in einer Schicht, wo Gleichgewicht herrscht (wir haben die Allgemeinheit des Mediums gar nicht beschränkt und können die Formel auf Atmosphäre und Meer als ein einziges Medium betrachtet anwenden), so erhalten wir wieder die Formel für den Gradientwind:

$$(6) \qquad = \frac{g}{2\Omega_z} \operatorname{tg} \theta_p .$$

Diese Sätze und Formeln geben die Prinzipien, nach denen man auf rein dynamischem Wege, ohne direkte Wind- oder Strommessungen, das Bewegungsfeld in der Atmosphäre und im Meer angenähert bestimmen kann. Die von HELLAND-HANSEN[1] entwickelte Formel (4) oder (5) ist dadurch eine Fundamentalformel der Ozeanographie geworden. Durch Messungen der Temperatur und des Salzgehaltes bestimmt man den dynamischen Tiefenunterschied der verschiedenen Isobarflächen $H_a - H_b$ und dadurch den Geschwindigkeitszuwachs von der einen Isobarfläche zur anderen. Wenn man irgendwo eine Absolutbestimmung der Geschwindigkeit hat (z. B. Geschwindigkeit Null in sehr großen Tiefen oder bekannte Geschwindigkeit in der Oberfläche nach direkten Bestimmungen), so kann man durch einen Integrationsprozeß die Geschwindigkeitsverteilung nach der Tiefe finden. Wenn man dies für eine genügende Anzahl von Stationspaaren ausführt, so kann man das vollständige Geschwindigkeitsfeld in der Tiefe finden. Die von WÜST in dieser Weise berechneten Geschwindigkeiten in der Floridastraße, auf Grund der im Jahre 1914 im Interesse der Biologie gemessenen Temperaturen und Salzgehalte, haben vorzügliche Übereinstimmung mit den direkten Messungen der Geschwindigkeiten in den verschiedenen Tiefen gegeben, die PILLSBURY in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts ausführte und deren Zuverlässigkeit vielfach angezweifelt wurde. Später hat man viele weitere Bestätigungen der Brauchbarkeit der Methode, d. h. deren Voraussetzung, daß man ohne merkbaren Fehler die linke Seite der Gleichung **130** (3) gleich Null setzen kann, gefunden.

[1] KRÜMMEL: Ozeanographie II, S. 502.

Andererseits kann man von derselben Relation den umgekehrten Gebrauch machen, um aus den beobachteten Bewegungen Rückschlüsse auf die Druck- und Temperaturfelder zu ziehen. Wenn wir (4) durch H_a dividieren, so ergibt sich:

$$\frac{|\bar{v}_1}{H_a} = \frac{1}{2\Omega_z}\,\frac{H_a - H_b}{H_a}\,\frac{1}{L}$$

Da nun die dynamischen Höhen H_a und H_b den spezifischen Volumina $\bar{s}_a$ und s_b in der Schicht und diese wieder den mittleren Temperaturen proportional sind, können wir schreiben:

$$\frac{|\bar{v}_1 - \bar{v}_0|}{H_a} = \frac{1}{2\Omega_z}\,\frac{|s_a - s_b|}{\bar{s}_a}\,\frac{1}{L} = \frac{1}{2\Omega_z}\,\frac{\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_b}{\bar{\theta}_a}\,\frac{1}{L}$$

Da H die dynamische Höhendifferenz zwischen Punkten ist, welche die Geschwindigkeitsdifferenz $\bar{v}_1 - \bar{v}_0$ haben, können wir die linke Seite der Gleichung in der Form $|\Delta\bar{v}|/\Delta H$ schreiben und dementsprechend die ganze Formel:

$$\frac{|\Delta\bar{v}|}{\Delta H} = \frac{1}{2\Omega_z}\,\frac{1}{H}\,\frac{dH}{dL} = \frac{1}{2\Omega_z}\,\frac{1}{\theta}\,\frac{d\theta}{dL}.$$

Zu derselben Beziehung zwischen Luftbewegung und Temperaturfeld in teilweise integrierter Form gelangt man mit Hilfe von Gleichung **130** (4′), wenn man die linke Seite der Gleichung gleich Null setzt. Indem man nach der Temperaturdifferenz zwischen den zwei Vertikalen auflöst, erhält man:

$$\theta_a - \theta_b = \frac{2\,\Omega_z(\bar{v}_{1,n} - \bar{v}_{0,n})\,L}{R(\log p_1 - \log p_0)} \tag{7}$$

Diese Formel stimmt, von Einzelheiten der Bezeichnung abgesehen, mit der Formel **45** (14′) überein, die für den zirkularen Wirbel entwickelt und für die Berechnung des Temperaturunterschiedes zwischen Pol und Äquator angewandt wurde. Die Formel, wie sie jetzt entwickelt worden ist, gilt aber nicht nur für die Temperaturverteilung in einem Wirbel, dessen Achse mit der Erdachse zusammenfällt, sondern auch für die Temperaturverteilung in jedem beliebigen Luftstrom, der relativ zur Erde geradlinig oder krumm erscheint, wenn er nur nicht so stark gekrümmt ist, daß das Glied dC/dt in der Gleichung **130** (4) infolge der Zentripetalbeschleunigungen allzu bedeutend wird.

Das qualitative Gesetz der Temperaturverteilung, das in diesen Formeln enthalten ist, läßt sich folgendermaßen ausdrücken:

Wenn man in die Richtung des Windes am Erdboden sieht und der Wind mit der Höhe zunimmt, so hat man auf der nördlichen Halbkugel die höhere Temperatur rechts und die tiefere links. Wenn dagegen der Wind mit der Höhe abnimmt, hat man die höhere Temperatur links und die tiefere rechts.

In unseren Breiten hat man meist Westwinde, die mit der Höhe zunehmen, und wer in die Richtung des Windes sieht, hat die warmen äquatorialen Luftmassen rechts und die kalten polaren links. Unmittelbar südlich des subtropischen Hochdruckgürtels hat man am Boden Ostwind, der mit der Höhe abnimmt und in Westwind übergehen kann. Wer hier in die Richtung des Ostwindes blickt, hat den Äquator zur Linken und den Pol zur Rechten, also wiederum in Übereinstimmung mit der obigen Regel. Ähnlich kann die Regel auf die kleineren zyklonischen und antizyklonischen Wirbel angewandt werden.

Ebenso wie im vorigen Abschnitte seien auch hier einige Resultate aus den Gleichungen **130** (5) und (6) abgeleitet, die sich auf geschlossene Kurven von horizontalem Verlauf beziehen.

Man folgert leicht folgendes. Kurven, welche die ganze Erde als Parallelkreise umgeben und von der allgemeinen Zirkulation äquatorwärts geführt werden, dehnen sich in ihrer Projektion auf die Äquatorebene aus und nehmen antizyklonische Zirkulation, d. h. von Ost nach West an. Andererseits ziehen sich die als Parallelkreise verlaufenden Kurven, die von der allgemeinen Zirkulation polwärts geführt werden, in ihrer Projektion auf die Äquatorebene zusammen und nehmen dadurch zyklonische Zirkulation, d. h. von West nach Ost, an. Ähnlich folgert man, daß geschlossene horizontale Kurven, wenn sie ein Konvergenzzentrum umgeben, zyklonische Zirkulation, und wenn sie ein Divergenzzentrum umgeben, antizyklonische Zirkulation annehmen.

Auch die Geländeformation kann Zusammenströmen und Auseinanderströmen verursachen und dadurch zyklonische oder antizyklonische Zirkulation veranlassen, die sich der allgemeinen Horizontalbewegung überlagert.

Wir können als Beispiel die Strömung des Meereswassers quer über einen Unterseerücken betrachten. Wegen des verkleinerten Stromquerschnittes an der Stelle, wo der Rücken am höchsten ist, muß die Strömungsgeschwindigkeit auf der Luvseite gegen den Rücken hin zunehmen, direkt über dem Rücken am größten sein und dann auf der Leeseite wieder abnehmen. Wir betrachten eine beliebige geschlossene, ursprünglich horizontale Kurve. Während die Kurve sich dem Rücken nähert, befindet sie sich im Stadium der Ausdehnung, die größte Fläche begrenzt sie in dem Moment, wenn sie den Rücken passiert, und während des Fortströmens auf der Leeseite nimmt sie sodann an Flächeninhalt wieder ab. Findet ein stationäres Überströmen über den Rücken statt, und kommt die Kurve ohne Zirkulation an, so hat sie während der Annäherung an den Rücken zunehmende antizyklonische Zirkulation. Gerade wenn sie den Rücken passiert, hat sie ihre maximale anti-

zyklonische Zirkulation, und während des Fortströmens auf der Leeseite setzt sodann die zyklonische Beschleunigung ein, wodurch die erworbene antizyklonische Zirkulation wieder verloren geht.

Dieses Resultat ist eine Folge der Querschnittsverengung der Strömung zwischen dem Unterseerücken und der Meeresoberfläche. Aber auch ohne das Vorhandensein einer freien Oberfläche tritt dieselbe Wirkung ein, wenn das flüssige System stabil geschichtet ist, so daß die strömenden Teilchen ihr Gleichgewichtsniveau zu behaupten suchen. Nun hat man sowohl im Meere wie besonders in der Atmosphäre immer eine mehr oder weniger stabile Schichtung, die ähnlich wirkt wie die freie Oberfläche in unserem Beispiel. Es ergibt sich deshalb das allgemeine Resultat:

Wenn in der Atmosphäre oder im Meere Hindernisse stationär überströmt werden, so geschieht es unter antizyklonischer Zirkulation der überströmenden Massen.

Abb. 68a illustriert den Fall der Überquerung eines einzigen Rückens: die Stromlinien kommen geradlinig an, biegen beim Hindernis antizyklonisch um und setzen sich dann geradlinig wieder fort. Hat man eine Reihenfolge von Rücken und Tälern, so wiederholt sich das Umbiegen periodisch, und man erhält das Bild Abb. 68b, wo die Rücken unter antizyklonischer und die Täler unter zyklonischer Krümmung überströmt werden.

Abb. 68. Stationäre Strömung über Hindernisse.

Hat man im Falle des isolierten Höhenrückens ein durchgehendes Isobarfeld, das in genügendem Abstand beiderseits des Rückens eine Horizontalbewegung senkrecht zu dem Rücken erzwingt, so ist das Stromlinienbild etwa wie Abb. 68c. Die Stromlinien gehen gerade auf den Rücken zu, überqueren ihn unter antizyklonischer Krümmung, werden aber sodann wieder in die Richtung senkrecht zu dem Rücken umgelenkt, wodurch sie auf der Leeseite zyklonische Krümmung bekommen. Diese zyklonische Krümmung der Stromlinien kann nur durch eine auf der Leeseite vorhandene Konvergenz entstehen, die stärker als die Divergenz der Luvseite ist.

Das überströmte Hindernis braucht nicht fest zu sein, sondern kann z. B. eine Zunge kalter Luft sein, die von wärmerer Luft überströmt wird. In diesem Falle kann auch das Hindernis selbst in Bewegung sein, ein Fall, der bei den atmosphärischen Wellenbewegungen auftritt. In solchen Fällen muß man immer auf diesen Effekt achten, von dem wir hier ein einfaches Beispiel gegeben haben.

Dabei darf man jedoch nicht vergessen, daß ein wesentlicher Unterschied zwischen dem stationären und dem mit Wellen verbundenen Überströmen besteht. Denn betrachtet man z. B. eine Bewegung aus der Ruhe heraus über beliebige Hindernisse, so treten kurz nach dem Beginn der Bewegung die stärksten Zirkulationen an den Stellen der stärksten Zirkulationsbeschleunigung auf. D. h. die Zirkulation hat anfangs ihre maximalen antizyklonischen Werte an der Luvseite und ihre maximalen zyklonischen Werte an der Leeseite, während auf den Rücken der Hindernisse und in den Tälern zwischen aufeinanderfolgenden Hindernissen die Zirkulation gleich Null ist.

132. Berücksichtigung der Reibung. Kurven der Geschwindigkeit, der Spannung und der Reibungskraft. Es soll jetzt untersucht werden, in welcher Weise sich die Erddrehung bei den durch Reibung erzeugten Strömungen geltend macht. Wie früher (**48**) beschränken wir uns auf reine Horizontalbewegungen, und Geschwindigkeitsdifferenzen sollen nur längs der Vertikalen vorkommen.

Wir können unter diesen Verhältnissen die Geschwindigkeitsverteilung nach der Höhe durch eine einzige Kurve darstellen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(z) \,. \tag{1}$$

Analytisch können wir entweder die rechtwinklige Komponentendarstellung von $\mathbf{v}$ anwenden:

$$v_x = v_x(z)\,, \qquad v_y = v_y(z)\,, \tag{1'}$$

oder noch besser die polare Darstellung mit v als skalarem Radiusvektor und ψ als Richtungswinkel:

$$v = v(z)\,, \qquad \psi = \psi(z) \,. \tag{1''}$$

Eliminiert man hier z, so bekommt man die Horizontalprojektion der Kurve

$$v = v(\psi) \tag{1'''}$$

in Polarkoordinaten, also das *Vektordiagramm* für die Geschwindigkeitsverteilung, wo man längs der Kurve noch die Höhen hinzufügen kann.

Die von der Reibung allein hervorgerufene Spannung hat in diesem Falle nach **34** (1) die vereinfachten Komponenten:

$$P_x^z = \eta \frac{d v_x}{d z} \qquad P_y^z = \eta \frac{d v_y}{d z} \,. \tag{2}$$

Der Spannungsvektor ist somit:

$$\mathbf{P}^z = \eta \frac{d\mathbf{v}}{dz} \tag{2'}$$

seine Horizontalprojektion hat die Richtung der Tangente an die Geschwindigkeitskurve. η ist der bei turbulenter Bewegung auftretende „scheinbare" Reibungskoeffizient. Man kann die Spannungskurve konstruieren, wenn man die Geschwindigkeit (1) und die Werte von η in allen Höhen kennt: ihr Radiusvektor ist parallel zur Tangente der Geschwindigkeitskurve, und $\eta \frac{dv}{dz}$ gibt den absoluten Betrag an.

Die durch die Spannung hervorgerufene Reibungskraft pro Volumeneinheit wird dann nach **12** (9):

$$\mathbf{S} = \frac{d\mathbf{P}^z}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\eta \frac{d\mathbf{v}}{dz}\right). \tag{3}$$

Wenn wir diese Kraft durch einen Radiusvektor darstellen, erhalten wir eine Kraftkurve, die der Geschwindigkeits- und der Spannungskurve entspricht. Der Radiusvektor dieser Kurve ist parallel zur Tangente der Spannungskurve.

Diese Reibungskraft können wir in die Bewegungsgleichung **126** (2) hinzufügen und erhalten dann:

$$\dot{\mathbf{v}} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = -\nabla\varphi - s\nabla p + s\frac{d}{dz}\left(\eta \frac{d\mathbf{v}}{dz}\right). \tag{4}$$

Im folgenden wollen wir einige einfache Integrale dieser Gleichung studieren.

133. Reiner Reibungsstrom. In jeder Horizontalebene soll die Geschwindigkeit räumlich und zeitlich konstant sein, d. h. $\dot{\mathbf{v}} = 0$; ferner soll der horizontale Druckgradient gleich Null sein, und zur Vereinfachung nehmen wir noch den Reibungskoeffizienten η von der Höhe unabhängig an. Die Vektorgleichung in der Horizontalebene wird dann:

$$2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} = s\eta \frac{d^2\mathbf{v}}{dz^2}. \tag{1}$$

Diese Gleichung sagt direkt aus, daß Reibungskraft und ablenkende Kraft der Erddrehung einander das Gleichgewicht halten; diese beiden Kräfte sind einander entgegengesetzt gleich, und beide sind senkrecht zur Geschwindigkeit. Wir haben somit einfache Verhältnisse und können einfache Integrale erwarten.

Die Vektorgleichung (1) ersetzen wir durch die beiden Komponentengleichungen:

$$2\mu^2 v_x = \frac{d^2 v_y}{dz^2}, \qquad -2\mu^2 v_y = \frac{d^2 v_x}{dz^2}, \tag{1'}$$

wo wir zur Abkürzung

$$\mu = \sqrt{\frac{\Omega_z}{s\eta}} \tag{2}$$

eingeführt haben

Die Gleichungen sind linear und homogen mit konstanten Koeffizienten. Nach bekannten Methoden findet man das allgemeine Integral als lineare Verbindung der beiden partikulären Integrale:

$$(3\,\mathrm{A})\quad \begin{aligned} v_x &= A_1 e^{\mu z}\cos(\mu z+\psi_1), \\ v_y &= A_1 e^{\mu z}\sin(\mu z+\psi_1) \end{aligned} \quad \text{und} \quad (3\,\mathrm{B})\quad \begin{aligned} v_x &= A_2 e^{-\mu z}\cos(\mu z+\psi_2), \\ v_y &= -A_2 e^{-\mu z}\sin(\mu z+\psi_2). \end{aligned}$$

Die beiden Amplitudenfaktoren A_1, A_2 und die beiden Phasenwinkel ψ_1, ψ_2 geben zusammen vier Integrationskonstanten. Durch Differentiation nach z und Multiplikation mit η erhalten wir die entsprechenden Spannungen:

$$(4\,\mathrm{A})\quad \begin{aligned} P_x^z &= \sqrt{2}\,\eta\,\mu A_1 e^{\mu z}\cos\left(\mu z+\psi_1+\frac{\pi}{4}\right), \\ P_y^z &= \sqrt{2}\,\eta\,\mu A_1 e^{\mu z}\sin\left(\mu z+\psi_1+\frac{\pi}{4}\right), \end{aligned} \qquad (4\,\mathrm{B})\quad \begin{aligned} P_x^z &= -\sqrt{2}\,\eta\,\mu A_2 e^{-\mu z}\cos\left(\mu z+\psi_2-\frac{\pi}{4}\right) \\ P_y^z &= \sqrt{2}\,\eta\,\mu A_2 e^{-\mu z}\sin\left(\mu z+\psi_2-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Wie in (**48**) können wir zu der polaren Darstellung übergehen. Die Lösungen werden dann, wenn wir $A_1 = A_2 = A$ und die belanglosen Phasenwinkel gleich Null setzen:

$$(5\,\mathrm{A})\quad \begin{cases} v = A\,e^{\mu z}, \\ \psi = \mu z, \end{cases} \qquad (5\,\mathrm{B})\quad \begin{cases} v = A\,e^{-\mu z}, \\ \psi = -\mu z. \end{cases}$$

Ganz ähnlich gebaute Ausdrücke ergeben sich für die Spannungen.

Die Lösung erinnert sehr an die früher gefundenen **48** (8A) und (8B). Als Geschwindigkeitskurven hat man in beiden Lösungen dieselben Schraubenspiralen, die aber beim jetzigen Problem relativ zu der rotierenden Erde ruhen, beim dortigen Problem dagegen mit einer Winkelgeschwindigkeit ν relativ zu einer ruhenden Erde rotieren. Zwischen dieser Winkelgeschwindigkeit ν und der Winkelgeschwindigkeit Ω_z der Erde um die lokale Vertikale besteht nach (2) und **48** (5) die Relation:

$$(6)\qquad \nu = 2\Omega_z.$$

Wir wollen zunächst die Lösung (A) genauer betrachten. Sie stellt eine Meeresbewegung dar, die an der Oberfläche, $z = 0$, längs der x-Achse gerichtet ist. Für jede Einheitsstufe $\Delta z = -1$ nach unten ist der Geschwindigkeitsvektor um einen Winkel μ nach rechts gedreht und sein Betrag im Verhältnis $e^{-\mu}$ verkleinert. In der Tiefe $z = -\frac{\pi}{2\mu}$ hat sich der Geschwindigkeitsvektor um einen rechten Winkel gedreht, und sein Betrag ist auf $^1/_{23}$ seines ursprünglichen Wertes gesunken; in der Tiefe $z = -2\pi/\mu$ hat der Geschwindigkeitsvektor einen Umlauf vollführt, und sein Betrag ist auf $^1/_{535}$ seines ursprünglichen Wertes gesunken (Abb. 25 A).

Diese Rechtsdrehung des Meeresstromes mit zunehmender Tiefe folgerte zuerst NANSEN durch elementare Überlegungen; das quanti-

tative Gesetz wurde nachher von EKMAN[1] gefunden. Hieraus folgt, daß die reinen Reibungsströme oder die *Triftströme* auf der rotierenden Erde — entgegen der älteren Theorie von ZÖPPRITZ — nur Oberflächenerscheinungen sein können, ein Resultat EKMANS, das ursprünglich heftig bestritten wurde. Die Notwendigkeit dieser Erscheinung sieht man vielleicht am besten ein, wenn man sie mit dem entsprechenden Resultate (**48**) für einen umlaufenden Wind auf einer nicht rotierenden Erde vergleicht.

Die Tiefe einer Drehung von 180°:

$$z_R = \pi \sqrt{\frac{s\eta}{\Omega \sin\varphi}}, \tag{7}$$

hat EKMAN die *Reibungstiefe* genannt. Ist diese durch Beobachtungen gefunden worden, so findet man für den Reibungskoeffizienten:

$$\eta = \frac{z_R^2}{\pi^2} q \Omega \sin\varphi. \tag{8}$$

Rechnet man mit dem physikalischen Reibungskoeffizienten des Wassers, $s\eta = 0{,}014053$ cgs, so würde man am Pol eine Reibungstiefe von nur 0,44 m und bei 30° Breite eine solche von 0,62 m haben. Wegen der viel größeren Turbulenzreibung kann man nach EKMAN Reibungstiefen bis zu 200 m finden und somit effektive Reibungskoeffizienten bis zu 200000mal größer als der laminare Reibungskoeffizient.

Die zweite Lösung (5 B) stellt eine durch Reibung von unten erzeugte Bewegung dar, etwa eine Bewegung, die eine konstante Meeresströmung in der darüberliegenden Atmosphäre erzeugen kann. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung dreht sich für jede Stufe aufwärts nach rechts und nimmt an Stärke nach einer Schraubenspirale ab, die ein Spiegelbild der vorher betrachteten ist (Abb. 25 B).

134. Kombinierte Gradient- und Triftströme. Wir wollen jetzt allgemeiner annehmen, daß auch ein horizontaler Druckgradient vorhanden ist, während die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_t$ in jeder Horizontalebene räumlich und zeitlich konstant sein soll. Die Bewegungsgleichung in der Horizontalebene wird dann:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_t = -s\nabla p + s\eta \frac{d^2 \mathbf{v}_t}{dz^2}. \tag{1}$$

Wir zerlegen nun die totale Geschwindigkeit $\mathbf{v}_t$ in zwei Partialgeschwindigkeiten:

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} + \mathbf{v}_G. \tag{2}$$

[1] EKMAN, V. WALFRID: Om jordrotationens inverkan paa vindströmmar i hafvet. Nyt Mag. f. Naturv. Bd. 40, H. 1, Kristiania (Oslo) 1902.

Durch Einsetzen in (1) ergibt sich:

$$2\Omega \times \boldsymbol{v} + 2\Omega \times \boldsymbol{v}_G = -s\nabla p + s\eta\frac{d^2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_G)}{dz^2}. \tag{3}$$

Es soll nun die bis jetzt willkürliche Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_G$ einer Bedingung unterworfen sein, nämlich die Gleichung

$$2\Omega \times \boldsymbol{v}_G = -s\nabla p \tag{4}$$

zu erfüllen. $\boldsymbol{v}_G$ stellt dann den Gradientstrom oder den Gradientwind dar, und die Gleichung (3) reduziert sich auf:

$$2\Omega \times \boldsymbol{v} = s\eta\frac{d^2(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_G)}{dz^2} \tag{5}$$

Aus der Gleichung (4) findet man den dem Druckgradienten $-\nabla p$ entsprechenden Gradientwind. Setzt man das gefundene $\boldsymbol{v}_G$ in die Gleichung (5) ein, so findet man durch Integration die Partialgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, die von der Reibung herrührt.

Sind nun die Komponenten des horizontalen Druckgradienten $-\nabla p$ lineare Funktionen der Höhe z, so sind die Komponenten des Gradientwindes $\boldsymbol{v}_G$ auch lineare Funktionen der Höhe. Dann fällt aber $\boldsymbol{v}_G$ aus der Gleichung (5) heraus. Diese reduziert sich folglich auf die früher behandelte Gleichung **133** (1), und wir erhalten das Resultat:

Solange die Komponenten des Gradientwindes linear von der Höhe abhängen, ist die auf die Reibung beruhende Teilbewegung der durch die Ekmanspirale dargestellte Reibungsstrom.

Als erstes Beispiel betrachten wir eine zusammengesetzte Meeresströmung, bestehend aus einem Gradientstrom mit einer von der Tiefe unabhängigen Gradientgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_G$ und einem diesem Gradientstrom überlagerten Triftstrom, der von einem konstanten Wind herrührt, und der für sich allein die Oberflächengeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ haben würde.

Man zeichnet dann die der Oberflächengeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ entsprechende Ekmanspirale, die uns den Triftstrom in allen Tiefen ergibt. Die Resultantgeschwindigkeit findet man, wenn man zu diesem Triftstrom die überall konstante Gradientgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_G$ graphisch addiert. In der Abb. 69, wo der Einfachheit halber die Gradientgeschwindigkeit der Oberflächengeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ entgegengesetzt gleich gewählt ist, ist der Triftstrom in verschiedenen Tiefen durch punktierte Pfeile und die Resultantgeschwindigkeit durch voll ausgezogene Pfeile dargestellt worden. Man sieht, daß sich die Resultantgeschwindigkeit mit zunehmender Tiefe sowohl nach Richtung wie nach Größe ändert, indem sie asymptotisch gegen den Gradientstrom konvergiert. Unterhalb der Reibungstiefe ist der Gradientstrom durch den Triftstrom

nur sehr wenig modifiziert, oberhalb dieser Tiefe aber ist er auf der Nordhalbkugel nach links, auf der Südhalbkugel nach rechts abgelenkt.

Als zweites Beispiel betrachten wir die Wirkung des Meeresbodens oder der Erdoberfläche auf einen hinüberstreichenden Meeres- oder Luftstrom. Am Boden, wo die Geschwindigkeit Null ist, sind die Geschwindigkeiten des Gradientstromes und des Reibungsstromes einander entgegengesetzt gleich. Wir konstruieren dann die Ekmanspirale für eine Geschwindigkeit entgegengesetzt gleich der des gegebenen Gradientstromes und finden wieder die Geschwindigkeit in allen Höhen durch das in Abb. 69 gegebene Vektordiagramm. Auf der Nordhalbkugel ergibt sich die bekannte *Rechtsdrehung des Windes mit der Höhe*; auf der Südhalbkugel erhält man eine entsprechende Linksdrehung.

Die statistische Ermittlung der Windverteilung in der Atmosphäre ergibt ganz unten eine schnelle Zunahme der Windstärke bis zu einer Höhe von etwa 500 m, dann eine langsamere bis etwa 1000 m und zuletzt wieder eine etwas schnellere Zunahme, einem aufwärts zunehmenden Druckgradienten entsprechend. Wir haben allen Grund anzunehmen, daß die langsamste Zunahme in derjenigen Höhe stattfindet, wo der Reibungsstrom eine Drehung von 180° ausgeführt hat. Dieser *Reibungshöhe* von etwa 500 m würde ein Wert des turbulenten Reibungskoeffizienten η von ungefähr 0,002 MTS bei 60° Breite entsprechen, d. h. etwa 100000mal größer als der physikalische Reibungskoeffizient der Luft.

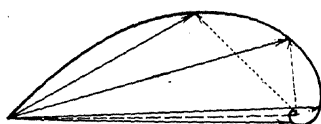



Abb. 69. Ekmanspirale.

Als drittes Beispiel untersuchen wir, wie sich Atmosphäre und Meer gegenseitig beeinflussen, wenn beide von unendlicher Mächtigkeit sind. Das Resultat läßt sich auch unmittelbar auf zwei unendlich ausgedehnte Wasser- oder Luftschichten anwenden, die durch eine Diskontinuitätsfläche geringer Neigung voneinander getrennt sind. Es sei der Gradientstrom $\mathfrak{v}_G$ in der unteren Schicht, bzw. $\mathfrak{v}'_G$ in der oberen, ein innerhalb der betreffenden Schicht an Richtung und Größe konstanter Vektor. An der Diskontinuitätsfläche $z = 0$ muß dann nach den Grenzbedingungen **34** (6), (9) Stetigkeit der Horizontalgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_t$ und der Horizontalspannung herrschen:

$$(6) \qquad \mathfrak{v}_t = \mathfrak{v}'_t, \qquad \eta \frac{d\mathfrak{v}_t}{dz} = \eta' \frac{d\mathfrak{v}'_t}{dz}, \qquad \text{wenn } z = 0.$$

Wenn beide Gradientströme die Richtung der x-Achse haben, ist der Reibungsstrom $\mathfrak{v}$ in der unteren Schicht durch die Gleichung **133** (5 A), derjenige $\mathfrak{v}'$ der oberen Schicht durch **133** (5 B) mit gestrichenen Buch-

staben gegeben. Durch Einsetzen in (6) erhält man dann, da $\boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}_G$ ist:

$$(7) \qquad \begin{cases} A + v_G = A' + v'_G, \\ \eta \mu A = -\eta' \mu' A', \end{cases}$$

woraus die Amplitudenfaktoren A und A' als Funktionen der als bekannt anzusehenden Reibungskoeffizienten und Gradientströme gefunden werden. Man zeichnet dann die entsprechende Ekmanspirale und findet leicht für jedes Niveau die resultierende Geschwindigkeit von Reibungsstrom und Gradientstrom.

Wenn die Gradientströme nicht in dieselbe Gerade fallen, hat man in ähnlicher Weise die vollständigen Integrale **133** (3 A), (3 B) für den Reibungsstrom zu verwenden.

In der Abb. 70 ist der Einfachheit halber $\eta = \eta'$ und $v_G = -v'_G$ gewählt worden, wodurch die Figur eine völlige Symmetrie um den Punkt $z = 0$ erhält. Wir können das Resultat auf zwei Luftströme anwenden, beispielsweise auf einen oben sich befindlichen warmen Weststrom und einen darunterliegenden kalten Oststrom, die durch eine Diskontinuitätsfläche mit einem äußerst schwachen Gefälle gegen Süden nach der MARGULESschen Formel voneinander getrennt sind. Man erkennt sofort, daß die Reibung dem oberen warmen Weststrom eine Komponente nordwärts, dem unteren kalten Oststrom dagegen eine Komponente südwärts verleiht (auf der Nordhalbkugel). An dieser nach Süden geneigten Diskontinuitätsfläche wird die Reibung somit ein Aufsteigen der warmen und ein Absinken der kalten Masse innerhalb der beiderseitigen Reibungsschichten verursachen.

Abb. 70. Ekmanspirale beiderseits einer Diskontinuitätsfläche.

Dies Resultat ist jedoch unabhängig von dem in unserem Beispiel gewählten Azimut der Ströme, wie auch davon, daß sie entgegengesetzt gleich sind. Diese beiden Voraussetzungen sind nur im Anschluß an die gezeichnete Figur gemacht worden. Man erhält deshalb das folgende allgemeine Resultat:

An einer Diskontinuitätsfläche verursacht die Reibung ein Aufgleiten der warmen Luft und ein Abgleiten der kalten Luft innerhalb der Reibungsschicht längs der Diskontinuitätsfläche.

135. Anwendung des Druckes als unabhängige Variable. Der oben aus der Reibungshöhe gefundene Wert des Reibungskoeffizienten der

Luft ist nur als eine rohe Schätzung zu betrachten, die durch sich widersprechende Voraussetzungen gefunden ist. Denn erstens hat man, um zu der Gleichung **134** (1) zu gelangen, den Koeffizienten η der Turbulenzreibung als von z unabhängig angenommen, und dann ist mit Rücksicht auf die Integration auch $s\eta$ als von der Höhe unabhängig betrachtet worden, d. h. η ist umgekehrt proportional dem mit der Höhe zunehmenden spezifischen Volumen s angenommen worden. Alle Schätzungen der Turbulenzreibung der Atmosphäre von ÅKERBLOM, G. I. TAYLOR, HESSELBERG und SVERDRUP und anderen enthalten diesen Widerspruch, weil sie von der für das Meer gültigen EKMANschen Lösung ausgehen, wo, entsprechend der Voraussetzung von Homogenität und Inkompressibilität, die Größen s und η jede für sich konstant gesetzt werden.

Es ist deshalb sehr wünschenswert, weitere Lösungen zu finden und allgemeinere Methoden zur Bestimmung der Reibung in der *Atmosphäre* zu entwickeln. Dabei erzielt man wesentliche Vorteile, wenn man den Druck p statt der Höhe z als unabhängige Variable einführt, wie dies schon bei der quasistatischen Methode (Kap. X) geschah.

Für diese Veränderung von Variablen haben wir:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial}{\partial p}.$$

Da aber keine Vertikalbeschleunigung vorkommt, gilt die statische Gleichung längs der Vertikalen, und wir können $\partial p/\partial z$ durch $-qg$ ersetzen. Für den Übergang haben wir dann:

$$\frac{\partial}{\partial z} = -gq\frac{\partial}{\partial p} \tag{1}$$

Indem wir nun

$$\xi = q\eta \tag{2}$$

einführen, ergibt sich für die Spannung:

$$\boldsymbol{P}^z = -g\xi\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial p} \tag{3}$$

und für die Reibungskraft, bezogen auf die Volumeneinheit:

$$\boldsymbol{S} = g^2 q\frac{\partial}{\partial p}\left(\xi\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial p}\right). \tag{4}$$

Die Bewegungsgleichung in der Horizontalen wird dann:

$$\dot{\boldsymbol{v}} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} = -s\nabla p + g^2\frac{\partial}{\partial p}\left(\xi\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial p}\right). \tag{5}$$

Wir vereinfachen nun, indem wir $\dot{\boldsymbol{v}} = 0$ setzen; und wenn wir die totale Geschwindigkeit durch $\boldsymbol{v}_t$ bezeichnen, so ergibt sich:

$$2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_t = -s\nabla p + g^2\frac{\partial}{\partial p}\left(\xi\frac{\partial \boldsymbol{v}_t}{\partial p}\right). \tag{5a}$$

Wir substituieren wie früher

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} + \mathbf{v}_G \tag{6}$$

und verlangen:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_G = -s\nabla p\,. \tag{7}$$

Die Gleichung (5a) wird dann:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = g^2 \frac{\partial}{\partial p}\left(\xi \frac{\partial(\mathbf{v} + \mathbf{v}_G)}{\partial p}\right). \tag{8}$$

Die allgemeine Integrationsmethode ist nun die, daß man zuerst $\mathbf{v}_G$ aus (7) bestimmt und dann mit diesem Wert von $\mathbf{v}_G$ die Gleichung (8) integriert.

Der einfachste Fall ergibt sich, wenn man ξ konstant annimmt. Die Gleichung (8) wird dann:

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = g^2 \xi \frac{d^2(\mathbf{v} + \mathbf{v}_G)}{d p^2} \tag{9}$$

Diese Gleichung ist mathematisch identisch mit **134** (5), wir haben dort nur p^2 für z^2 und $g^2\xi$ für $s\eta$ zu schreiben. Die Lösungen, die wir von **134** (5) gegeben haben, lassen sich deshalb sogleich als Lösungen von (9) interpretieren, unter der Voraussetzung, daß die Konstante μ den Wert

$$\mu = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{\Omega_z}{\xi}} \tag{10}$$

erhält, während $-p$ an Stelle von z tritt.

Die Gradientwindgeschwindigkeit $\mathbf{v}_G$ soll nun von der Höhe unabhängig sein. Da s veränderlich ist, bekommen wir nach (7) konstantes $\mathbf{v}_G$, wenn $s\nabla p$ konstant ist, d. h. wenn der Druckgradient nach oben proportional der Dichte abnimmt. Mit diesem konstanten Gradientwind finden wir aus (9) den Reibungsstrom $\mathbf{v}$ als Resultierende der Radiivektoren zweier Spiralen, die der Ekmanschen ähnlich sind. In der Polardarstellung sind diese Spiralen durch

$$\begin{aligned} v &= A\,e^{\mu p}, & v &= A\,e^{-\mu p}, \\ \psi &= \mu p + \psi_0 + \pi, & \psi &= -\mu p + \psi_0 \end{aligned} \tag{11}$$

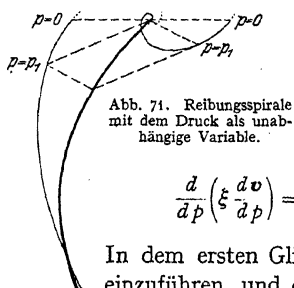
gegeben; sie sind einander ähnlich und um 180° relativ zueinander gedreht. Die Resultierende $\mathbf{v}$ ist gleich Null an der oberen Grenze der Atmosphäre, für $p = 0$, und wächst mit p, wobei die Pfeilspitze eine ausgezogene Spirale beschreibt, die sich allmählich der ersten Spirale (11) nähert. Am Erdboden, $p = p_0$, ist dieser Reibungsstrom dem Gradientwind entgegengesetzt gleich.

Die Lösung kann durch eine ähnliche räumliche Figur wie vorher dargestellt werden, indem wir uns p anstatt z längs der vertikalen

Achse aufgetragen denken (Abb. 71). Wenn wir dann von den gleichen Druckstufen zu entsprechenden Höhenstufen übergehen, erhalten wir Schichten von aufwärts zunehmender Mächtigkeit.

Diese Integrationen können jedoch immer nur zu mehr oder weniger rohen Mittelwerten des Reibungskoeffizienten für größere Schichtmächtigkeiten führen. Auf Grund der Differentialgleichung (5) kann man aber auch die lokalen Werte von η finden. Wenn l die Bogenlänge des Vektordiagrammes mit $\boldsymbol{v}$ als Radiusvektor ist, so haben wir:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dl} = \boldsymbol{l}, \qquad \frac{d\boldsymbol{l}}{dl} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}, \tag{12}$$

Abb. 71. Reibungsspirale mit dem Druck als unabhängige Variable.

wo $\boldsymbol{l}$ die Einheitstangente, $\boldsymbol{n}$ die Einheitsnormale und R der Krümmungsradius ist. Für den in das Reibungsglied der Gleichung (5) eingehenden Differentialausdruck können wir demnach schreiben:

$$\frac{d}{dp}\left(\xi\frac{d\boldsymbol{v}}{dp}\right) = \frac{d}{dp}\left(\xi\boldsymbol{l}\frac{dl}{dp}\right) = \xi\frac{d\boldsymbol{l}}{dp}\frac{dl}{dp} + \boldsymbol{l}\frac{d}{dp}\left(\xi\frac{dl}{dp}\right).$$

In dem ersten Gliede rechts haben wir nach (12) $\frac{d\boldsymbol{l}}{dp} = \frac{\boldsymbol{n}}{R}\frac{dl}{dp}$ einzuführen, und es wird folglich:

$$\frac{d}{dp}\left(\xi\frac{d\boldsymbol{v}}{dp}\right) = \boldsymbol{n}\frac{\xi}{R}\left(\frac{dl}{dp}\right)^2 + \boldsymbol{l}\frac{d}{dp}\left(\xi\frac{dl}{dp}\right) \tag{13}$$

Die mit g^2 multiplizierten Koeffizienten von $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{l}$ in diesem Ausdrucke sind die skalaren Komponenten der Reibungskraft längs der Normale und Tangente der Kurve. Die entsprechenden Komponenten der Beschleunigung, der Corioliskraft und des Druckgradienten können wir durch $\dot v_n$, $\dot v_l$; c_n, c_l und $-\partial p/\partial n$, $-\partial p/\partial l$ bezeichnen. Wir bekommen dann die folgenden beiden Skalargleichungen für die Richtungen längs der Normale und längs der Tangente der Geschwindigkeitskurve:

$$\begin{aligned} \dot v_n &= -s\frac{\partial p}{\partial n} + c_n + g^2\frac{\xi}{R}\left(\frac{dl}{dp}\right)^2, \\ \dot v_l &= -s\frac{\partial p}{\partial l} + c_l + g^2\frac{d}{dp}\left(\xi\frac{dl}{dp}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Es seien nun die folgenden Daten zu unserer Verfügung:

1. die Geschwindigkeitskurve, bestimmt nach den Beobachtungen zu einer gegebenen Zeit;
2. die Wetterkarte für diese Zeit;
3. die Wetterkarte für eine etwas spätere Zeit.

Wir werden dann aus den sukzessiven Wetterkarten die Beschleunigung mit ihren Komponenten $\dot v_n$ und $\dot v_l$ bestimmen können. Aus der Wetterkarte für die gegebene Zeit können wir den Druckgradienten

mit seinen Komponenten $-\partial p/\partial n$ und $-\partial p/\partial l$ bestimmen. Schließlich gestattet uns das Geschwindigkeitsdiagramm, die beiden Ableitungen dl/dp und d^2l/dp^2 und den Krümmungsradius R für jeden Punkt der Kurve zu bestimmen. Mit Hilfe dieser Daten ergibt die erste Gleichung (14) für die Richtung längs der Normale der Kurve die Werte von ξ in jedem Punkte der Kurve. Dann gibt uns die zweite Gleichung (14) für die Tangentenrichtung die entsprechenden Werte von $d\xi/dp$. Die Ausführung dieser Bestimmungen von Punkt zu Punkt der Kurve verschafft uns den Wert des Koeffizienten der Turbulenzreibung für jede Höhe. Es zeigt sich, daß dieser Koeffizient gar nicht konstant ist; von dem Werte Null am Boden steigt er angenähert linear mit der Höhe, erreicht seinen Maximalwert in etwa 200 m Höhe und nimmt dann wieder ab, bis schließlich ein konstanter Wert in der freien Atmosphäre[1] erreicht wird.

Man könnte auch Integrale der Gleichung (8) für den Reibungsstrom aufstellen unter Zugrundelegung dieser mittleren Verteilung des variablen Reibungskoeffizienten; wir gehen aber darauf nicht ein.

136. Die Fortbewegung eines unveränderlichen Strombildes. In bezug auf ein mit der Erde fest verbundenes Koordinatensystem I lautet die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = -\nabla\varphi - s\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{S}, \tag{1}$$

wo zur Abkürzung $\boldsymbol{S}$ für die Resultantkraft der Reibung steht.

Wir wollen zunächst eine einfache Eigenschaft der stationären Bewegung ins Auge fassen. Die Bewegung ist stationär, wenn die Gleichung

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

erfüllt ist. In diesem stationären Felde ist die Beschleunigung Null in allen Punkten, wo $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v} = 0$ ist; d. h. wo die linearen homogenen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z} &= 0,\\ v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z} &= 0,\\ v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0\end{aligned}\right. \tag{3}$$

erfüllt sind.

[1] Man vergleiche auch die Arbeiten von Rossby, C.-G.: The vertical Distribution of Eddy Energy. Month. Weather Review **54**, 321, Washington 1926. — Sverdrup, H. U.: Wärmehaushalt und Austauschgröße usw. Beitr. z. Phys. d. fr. Atmosph., Bjerknes-Band, S. 276, 1932. — Mildner, P.: Über die Reibung in einer speziellen Luftmasse usw. Beitr. z. Phys. d. fr. Atmosph., Bjerknes-Band S. 151, 1932.

Dies ist der Fall erstens in den Punkten, wo die Geschwindigkeit Null ist:

$$(4) \qquad \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{oder} \quad v_x = v_y = v_z = 0\,.$$

Diese Punkte sind als singuläre Punkte des Feldes leicht erkennbar: als Punkte, wo sich unendlich viele Stromlinien schneiden (Ausströmungs- und Einströmungspunkte) oder wo eine singuläre Kurve sich selbst schneidet (hyperbolischer Punkt) oder wo eine Stromlinie in einen einzigen Punkt zusammengeschrumpft ist (elliptischer Punkt).

Zweitens ist aber auch der Fall zu berücksichtigen, wo die Determinante der Koeffizienten in (3) verschwindet:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Nun ist aber $\nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ eine notwendige Bedingung für Extremwerte von $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Hieraus folgt, daß die Gleichung (5) diejenigen Punkte angibt, in denen die Geschwindigkeit Extremwerte hat.

In den Punkten, wo die Geschwindigkeit entweder Null ist oder Extremwerte hat, ist folglich die totale Beschleunigung im stationären Felde Null, d. h. in diesen Punkten halten sich alle wirkenden Kräfte das Gleichgewicht:

$$(6) \qquad -\nabla\varphi - s\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} + s\boldsymbol{S} = 0\,.$$

Umgekehrt führt die Gleichung (6) bei stationärer Bewegung unmittelbar auf (3) zurück. Die durch (6) bestimmten Punkte können wir kurz die Gleichgewichtspunkte des Feldes nennen. Wir haben dann das einfache Resultat:

(I) *Die Punkte eines stationären Feldes, wo die Geschwindigkeit entweder Null ist oder einen Extremwert hat, sind Gleichgewichtspunkte des Feldes; und umgekehrt ist die Geschwindigkeit in den Gleichgewichtspunkten des Feldes entweder Null, oder sie hat dort einen Extremwert.*

Es soll jetzt die Strömung stationär sein, nicht mehr relativ zum Koordinatensystem I, sondern relativ zu einem Koordinatensystem II, das relativ zu I eine gleichmäßige Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ besitzt. Relativ zu beiden Koordinatensystemen ist die Beschleunigung eines Punktes die gleiche. In der EULERschen Darstellung der relativen Beschleunigung und der Coriolisbeschleunigung muß aber jetzt $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'$ statt früher $\boldsymbol{v}$ auftreten. Die dazugehörige lokale Zeitableitung werden wir $\delta/\delta t$ schreiben; sie bezieht sich also auf die zeitlichen Ver-

änderungen, die man in einem relativ zu dem Koordinatensystem II unbewegten Punkt beobachtet. Wir können deshalb jetzt die allgemeine Bewegungsgleichung (1) in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\nabla \varphi - s \nabla p - 2 \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') + s \boldsymbol{S}, \tag{8}$$

wo $\boldsymbol{v}$ immer noch die relativ zu dem Koordinatensystem I beobachtete Geschwindigkeit ist, die man mit Hilfe der fest aufgestellten Windfahnen und Anemometer findet.

Die Bedingung des Stationärseins relativ zu dem bewegten Koordinatensystem wird jetzt:

$$\frac{\delta \boldsymbol{v}}{\delta t} = 0, \tag{9}$$

und im unveränderlich sich fortpflanzenden Strombilde findet man die Beschleunigung Null in den Punkten, wo

$$(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') \cdot \nabla \boldsymbol{v} = 0 \tag{10}$$

ist. Schreibt man die entsprechenden linearen Gleichungen, so findet man, daß die Bedingung erfüllt ist erstens in den Punkten, wo

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}', \tag{11}$$

und zweitens wieder, wo die Bedingung (5) der Extremwerte erfüllt ist. In diesen Punkten müssen sich jetzt, vom System II aus beurteilt, die Kräfte das Gleichgewicht halten, und wir erhalten:

(II) *Bewegt sich eine unveränderliche Stromfigur mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ relativ zu dem ruhenden Koordinatensystem I, so findet man in den Gleichgewichtspunkten entweder Extremwerte der Geschwindigkeit oder eine Geschwindigkeit gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ des Systems.*

Wäre es deshalb gelungen, auf einer Wetterkarte eine Anzahl von Punkten zu finden, wo sich sämtliche Kräfte das Gleichgewicht halten, so würden diese Punkte in zwei Gruppen zerfallen: In den Punkten der einen Gruppe hat die Geschwindigkeit Extremwerte, die alle möglichen Richtungen und Größen haben können; und in den Punkten der anderen Gruppe herrscht Übereinstimmung der Geschwindigkeit mit der momentanen Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ des betrachteten Feldes. Man würde also hierin eine Methode haben, um die momentane Richtung und Geschwindigkeit für die Fortbewegung des zeitlich unveränderlichen Feldes zu finden.

Die Methode sei durch ein paar einfache Beispiele erläutert. Wir sehen von Reibung und Erddrehung ab, und wenn wir nur die horizontale Bewegung des Feldes behandeln, können wir auch von der Schwere absehen. Die einzige in Frage kommende Kraft ist dann der horizontale Druckgradient, der in den Punkten maximalen oder minimalen Druckes und in den Sattelpunkten des Druckes verschwindet.

Wir betrachten ein lineares Einströmungsfeld, ein lineares Ausströmungsfeld und ein lineares Rotationsfeld (Abb. 72 *A*, *B*, *C*, *D*). Ist der Bewegungszustand stationär, so wird nach dem Satze (I) das Druckzentrum mit dem Gleichgewichtspunkte eines beliebigen dieser Felder zusammenfallen. Ist die Bewegung symmetrisch, so werden die Isobaren Kreise um die Gleichgewichtspunkte; sie geben einen maximalen Druck im Zentrum des Ein- oder des Ausströmungsfeldes und einen minimalen Druck im Zentrum des Rotationsfeldes an. Bewegen sich aber diese Felder relativ zu dem ruhenden Koordinatensystem, so wird ein ruhender Beobachter die Zentren des Druckfeldes und des Geschwindigkeitsfeldes relativ zueinander verschoben sehen, und zwar so verschoben, daß die lokale Geschwindigkeit im Druckzentrum identisch mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Feldes ist. Bei dem Einströmungsfelde (Abb. 72 *A*) geht der Einströmungspunkt voran, und das Druckzentrum folgt nach; bei dem Ausströmungsfelde (Abb. 72*B*) geht das Druckzentrum voran, und der Ausströmungspunkt folgt nach. Bei dem Rotationsfelde (Abb. 72*C* und *D*) erscheint das Druckzentrum seitlich verschoben, und zwar nach der Seite, wo die lokale Geschwindigkeit die Richtung der Fortpflanzung hat. Für einen Beobachter, der die Bewegung mitmacht, werden aber die Druck- und Windzentren — nach dem Satze (I) — einander decken. Der Meteorologe, der die Situation nach den Registrierungen fest aufgestellter Windfahnen und Barographen beurteilt, wird dagegen Druck- und Windzentrum voneinander getrennt sehen und wird aus der Verschiebung auf die Fortpflanzungsrichtung und -geschwindigkeit des Feldes schließen können.

Abb. 72. Relative Verschiebung von Wind- und Druckzentrum.

Die Verhältnisse werden etwas komplizierter, wenn man, um den Gleichgewichtspunkt zu finden, zugleich auf die ablenkende Kraft der Erddrehung Rücksicht nehmen muß[1]. Einen praktischen Wert wird

[1] Dies ist von TH. HESSELBERG durchgeführt worden: Über die Beziehung zwischen Luftdruck und Wind im nichtstationären Fall. Veröff. d. Geophys. Inst. d. Univ. Leipzig, Bd. I, H. 7, 1915.

die Methode erst gewinnen können, wenn die meteorologischen Beobachtungen weit vollkommener geworden sind, denn der gegenseitige Abstand zwischen Druck- und Windzentrum ist in der Tat kleiner als der Abstand benachbarter Stationen in den gewöhnlichen Beobachtungsnetzen. Bei der Kartenanalyse ist es aber von prinzipieller Wichtigkeit, daran festzuhalten, daß nur bei dem stationären Bewegungszustand die singulären Punkte des Stromfeldes mit den Gleichgewichtspunkten des Kraftfeldes zusammenfallen und daß bei jeder Bewegung des Feldes diese Punkte relativ zueinander, wenn auch sehr wenig, verschoben liegen: eine notwendige Folge davon, daß bei veränderlichen Zuständen der Wind nie genau Gradientwind ist.

137. Einfluß der Erddrehung auf die Orbitalumläufe in Wellen. In den Kapiteln XIII und XIV werden wir den Einfluß der Erddrehung auf die verschiedenen früher untersuchten Wellentypen studieren. Der analytischen Arbeit schicken wir einige Betrachtungen elementarer Natur voraus.

Alle Wellen auf der rotierenden Erde sind zusammengesetzte Schwerewellen, elastische Wellen und Trägheitswellen, je nach den Umständen mehr von dem einen oder von dem anderen Typus. Wir betrachten im folgenden zunächst stabile, zweidimensionale Wellen, die strukturgemäß überwiegend Schwerewellen sind. Ist dann der Boden horizontal und wirkt keine Erddrehung, so sind, wie in Kapitel VIII gezeigt, die Orbitalbahnen elliptisch und in einer Vertikalebene durch die Fortpflanzungsrichtung enthalten. Die Bahnen sind zirkular, wenn die Tiefe der Schicht groß, konvergieren aber gegen horizontale gerade Liniensegmente, wenn die Tiefe klein relativ zur Wellenlänge ist.

Diejenigen Druckgradienten, welche die Störungsbewegung erzeugen, sind groß sowohl in der vertikalen Richtung wie in der Fortpflanzungsrichtung. Die schwache Erddrehungskraft wird deshalb die Vertikalkomponente und die Horizontalkomponente in der Fortpflanzungsrichtung nur wenig modifizieren können. Normal zur Fortpflanzungsrichtung wirkt jedoch der Horizontalbewegung keine Kraft entgegen.

Die Ablenkung der Horizontalbewegung — auf der nördlichen Halbkugel nach rechts, auf der südlichen nach links — bewirkt deshalb, daß sich die ursprünglich vertikale Bahnebene in solcher Weise neigt, daß die Horizontalprojektion der Bahn statt eines geraden Linienelementes eine Ellipse, und zwar mit antizyklonischem Umlaufssinn, wird. Der Effekt ist bei gewöhnlichen Wasserwellen, mit Perioden von höchstens einigen Minuten, unmerkbar. Je mehr sich aber die Periode dem halben Pendeltag nähert, um so mehr muß die Erddrehungswirkung hervortreten. Perioden dieser Länge sind nur bei den langen Wellen denkbar. Bei solchen Wellen mit langer Periode hat man des-

halb fast horizontale geschlossene Orbitalbahnen zu erwarten, in den einfachsten Fällen elliptische und sonst von dem Typus der Bahnen des Foucaultpendels mit antizyklonischem Umlauf (Abb. 67). Zyklonischer Umlauf wird nie als unmittelbare Wirkung der Erddrehung auftreten.

Was wir somit für die stabilen Wellen entwickelt haben, muß in den Hauptzügen auch für die instabilen Wellen gelten. Da die Bahnen im letzten Falle nicht geschlossen sind, können wir nicht von zyklonischen und antizyklonischen Umläufen reden, wohl aber von zyklonischer und antizyklonischer *Krümmung* der Bahn. Das Resultat kann deshalb in folgender Form gemeinsam für stabile und instabile Wellen ausgedrückt werden:

Wenn sich die Erddrehung hinlänglich stark geltend machen kann, müssen Bahnen entstehen, die in ihrer Horizontalprojektion antizyklonisch gekrümmt sind.

138. Das Zyklonenproblem. Um überhaupt Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen zu erhalten, haben wir uns aus rein analytischen Gründen der folgenden Methode bedient: Wir betrachten zunächst einen einfachen Grundzustand des Gleichgewichtes oder der Bewegung und überlagern dann diesem Grundzustand eine schwache Störung, die man mit Hilfe linearisierter Gleichungen studiert. Die in dieser Weise gefundenen Lösungen haben in allen untersuchten Fällen, einschließlich des Falles der Instabilitätswellen, den Charakter einer Wellenbewegung.

Diese Methode ist in physikalischer Hinsicht ebenso weittragend wie in mathematischer. Rein empirisch wissen wir, daß sich die atmosphärischen Störungen aus relativ einfachen Grundzuständen entwickeln: sie beginnen als schwache Störungen, die sich dem Grundzustande überlagern. Man kann sie deshalb im Anfangsstadium mit Hilfe von linearisierten Gleichungen studieren. Die Zyklonen, die an der „*Polarfront*“ oder an anderen atmosphärischen Fronten entstehen (s. Abschnitt **178**) und sich an der betreffenden Front entlang fortbewegen, können keine Ausnahme bilden. Da wir nur Wellenlösungen der linearisierten Gleichungen kennen, so scheint der folgende allgemeine Schluß unvermeidlich: *auch die an den Fronten gebildeten Zyklonen müssen sich aus stabilen oder instabilen Wellen kleiner Amplitude entwickeln.*

Schon diese allgemeine Bemerkung genügt, um die Ausdrücke „Wellentheorie der Zyklonenbildung“ und „Wellentheorie der jungen Zyklonen“ zu rechtfertigen. Es ergibt sich deshalb die Aufgabe: *die Art der Wellen zu suchen, aus denen sich die Frontalzyklonen entwickeln.*

Die Lösung dieses Problems wird sich zweifellos ergeben, wenn es nur gelingt, hinlänglich allgemeine Wellen zu betrachten, und zwar

unter voller Berücksichtigung der Erddrehung in Verbindung mit den Grenzflächenbedingungen, wie sie in der Natur vorliegen. Diese Aufgabe soll in den beiden folgenden Kapiteln mathematisch behandelt werden. Zunächst wird es aber nützlich sein, das Problem elementar zu betrachten. Dadurch wird sich ein qualitatives Zyklonenbild ergeben, das zu der präzisen Formulierung der mathematischen Aufgabe geführt hat.

139 (I). Wellentheorie der Zyklonen: (I) Stromlinienbilder von Wellen in der Vertikalebene und von Zyklonen in der Horizontalebene. Im Abschnitt **110** haben wir zwei Reihen von Stromlinienbildern gezeichnet (Abb. 53), die Wellenbewegungen bei bewegten Schichten darstellen: eine erste Reihe (I) für Wellen starker Stabilität und eine zweite Reihe (II) für Wellen größter Instabilität. Wir werden jetzt diese Bilder formal umdeuten: sie sollen Karten in Horizontalprojektion darstellen, in üblicher Weise von Süden gesehen. Sie zeigen dann sogleich eine gewisse Ähnlichkeit mit meteorologischen Karten, wobei man die Kurven in zweierlei Weise deuten kann: als Stromlinien oder auch als Isobaren, die auf meteorologischen Karten immer sehr nahe mit den Stromlinien oberhalb der Reibungsschicht zusammenfallen. Man hat dann das Bild eines sich in der Entwicklung befindlichen Wirbels, der sich längs einer wellenden Diskontinuitätslinie fortpflanzt, in den beiden Fällen (A) und (B) von Westen nach Osten, im Falle (C) nach Osten oder nach Westen, je nachdem, ob die dynamische Fortpflanzungsgeschwindigkeit größer oder kleiner als die konvektive ist.

Geht man auf Einzelheiten ein, so entsprechen sämtliche Bilder den Verhältnissen auf der südlichen Halbkugel. Die Lage der schwereren Schicht unten und der leichteren Schicht oben auf dem Bild in Vertikalprojektion entspricht der Lage der *kalten Polarluft* südlich und der *warmen Tropikluft* nördlich der Polarfront auf der Karte in Horizontalprojektion. Diese wellende Front begrenzt Zungen warmer Luft, die sich nach Süden, und Zungen kalter Luft, die sich nach Norden ausdehnen. Die mit diesen Wellen verbundenen Wirbel haben die Umlaufsrichtung der Zyklonen der südlichen Halbkugel. In der Reihe (I) (Fall großer Stabilität der Wellen in der Vertikalebene) sind diese zyklonischen Wirbel um die äußersten Südspitzen der warmen Zungen zentriert. In der Reihe (II) (Fall höchster Instabilität der Wellen in der Vertikalebene) sind die Zentren der zyklonischen Wirbel um eine Viertelwellenlänge rückwärts verschoben und also um den nachfolgenden Inflexionspunkt der wellenden Kurve zentriert.

Geht man noch auf weitere Einzelheiten ein, so entspricht jedoch keine der beiden Reihen (I) oder (II) genau den meteorologischen Karten. Diese Karten nehmen eine Zwischenstellung zwischen den

beiden Reihen ein: die Zentren der Wirbel fallen weder mit der äußersten Spitze der warmen Zungen zusammen, noch sind sie um eine ganze Viertelwellenlänge relativ zu dieser Spitze rückwärts verschoben. Man kann jedoch eine dritte Reihe von Karten zeichnen, auf der die rückwärtige Verschiebung des Wirbelzentrums nur etwa eine Achtelwellenlänge beträgt. Man erhält dann Bilder, die, als Karten in Horizontalprojektion gedeutet, mit den meteorologischen Karten der südlichen Halbkugel recht gut übereinstimmen.

Abb. 73. Stromlinien der Zyklonen auf der Nordhalbkugel.

Um Karten für die Nordhalbkugel zu erhalten, denkt man sich die auf ein durchsichtiges Papier gezeichneten Vertikalbilder Abb. 53 in solcher Weise in die Horizontallage gebracht, daß die Zeichnung selbst nach unten gekehrt ist und ihre ursprüngliche obere Kante nach Süden kommt. Die durchscheinende Zeichnung kann man dann als eine von Süden gesehene Karte auf der nördlichen Halbkugel deuten. Dann liegen die schwereren Massen, die der Polarluft entsprechen, nördlich, und die leichteren Massen, die der Tropikluft (bezüglich der Definition dieser Begriffe s. Abschnitt **177**) entsprechen, südlich der Polarfront. Die wellende Front begrenzt warme Zungen, die sich nach Norden, und kalte Zungen, die sich nach Süden ausdehnen. Die Wirbel bekommen die Umlaufsrichtung der Zyklonen auf der nördlichen Halbkugel. Diese zyklonischen Wirbel sind im Falle großer Stabilität um die nördlichsten Spitzen der warmen Zungen zentriert, im Falle äußerster Instabilität um eine Viertelwellenlänge rückwärts von diesen nördlichsten Spitzen verschoben. Man erhält in dieser Weise zwei Reihen von Karten für die nördliche Halbkugel, den Reihen I und II der Abb. 53 für die südliche Halbkugel entsprechend. Zeichnet man eine mittlere Reihe mit einer Rückwärtsverschiebung des zyklonischen Wirbelzentrums um eine Achtelwellenlänge, so erhält man die Karten Abb. 73 mit zyklonischen Wirbeln, die den tatsächlich vorkommenden recht ähnlich sind. Für die volle Ähnlichkeit fehlt eigentlich nur noch die Berücksichtigung des Occlusionsvorganges, der in Abschnitt **178** besprochen wird.

Je nach Richtung und Stärke der Grundströmungen erhält man die folgenden Zyklonentypen: (A) zwischen einem stärkeren Westwind südlich und einem schwächeren Westwind nördlich der Polarfront, (B) zwischen einem Westwind südlich und einem Ostwind nördlich der Front und (C) zwischen einem schwächeren Ostwind südlich und einem stärkeren Ostwind nördlich der Front. Während in den Fällen (A) und (B) die Zyklonen sich immer nach Osten fortpflanzen, kann im Falle (C) auch eine Bewegung nach Westen vorkommen als Folge einer hinlänglich starken konvektiven Wirkung der nach Westen gerichteten Grundströmungen.

139 (II). Wellentheorie der Zyklonen: (II) Fortpflanzung von Wellen längs einer geneigten Ebene. Diese Übereinstimmungen zwischen den Stromlinienbildern einer Wellenbewegung in Vertikalprojektion und den meteorologischen Karten in Horizontalprojektion sind rein formal. Es fragt sich aber, ob nicht hinter der formalen Analogie eine reale Verwandtschaft verborgen ist; d. h. es fragt sich, ob nicht unter geeigneten kinematischen und dynamischen Bedingungen die Stromlinienbilder in der Vertikalebene in ähnliche Stromlinienbilder einer reellen Bewegung in der Horizontalebene übergehen können. Nun können die Bahnen der Teilchen und damit die Stromlinien in zweierlei Weise gezwungen werden, die Vertikalebene zu verlassen: *kinematisch* durch den Zwang der Grenzflächen und *dynamisch* durch die Wirkung der Erddrehung.

Wir denken uns zunächst die Erde nicht rotierend und betrachten die Wirkung, die dann eine starre zonale Grenzebene auf zonal sich fortpflanzende Wellen ausüben kann. Wir fassen dabei eine beliebige der oben betrachteten Kombinationen von Wellenbewegung und Translationsbewegung ins Auge (Abb. 74). Da die Bewegung jedes Teilchens in einer zonal orientierten Vertikalebene enthalten ist, können wir eine solche Ebene solidifiieren, ohne daß dies die Bewegung ändert. Die Bewegung bleibt nämlich selbst für die unmittelbar an die starre Vertikalebene grenzende Flüssigkeitsschicht bestehen. Neigen wir jetzt die starre Vertikalebene, so erhalten die Orbitalbahnen und die Stromlinien nahe an dieser starren Ebene zwangsweise dieselbe Neigung wie die Ebene selbst. In dieser Weise sind alle die für die Vertikalebenen gefundenen Stromlinienbilder auch in unmittelbarer Nähe einer beliebig geneigten zonalen Ebene möglich. Durch diese Neigung der zonalen Ebene werden die Bilder in meridionaler Richtung in die Länge gezogen, so daß die Wellen in der geneigten Ebene eine größere Amplitude als in der ursprünglichen Vertikalebene zu haben scheinen. Im übrigen behalten die Bilder jedoch ihren allgemeinen Charakter.

Wir sind damit den Bildern der meteorologischen Karten in Horizontalprojektion nähergekommen. Die geneigte Ebene kann aber nie vollkommen horizontal gemacht werden. Denn dann hört das Schneiden dieser Ebene mit der horizontalen Grenzfläche der Schichten auf, und die mit der wellenden Front verbundenen Stromlinienbilder verschwinden. Wir halten deshalb vorläufig an der Schrägheit der Ebene fest.

Wellen aus W längs Südküste, Analogie der Zyklonen aus W auf der südlichen Halbkugel.

III Wellen aus E längs Südküste, Analogie der retrograden Zyklonen auf der nördlichen Halbkugel.

II Wellen aus W längs Nordküste, Analogie der Zyklonen aus W auf der nördlichen Halbkugel.

IV Wellen aus E längs Nordküste, Analogie der retrograden Zyklonen auf der südlichen Halbkugel.

Abb. 74.

Mit Hilfe der Abb. 74 können wir dann einen Überblick über diejenigen Stromlinienbilder erhalten, die in einer geneigten Zonalebene auftreten können.

Oben in der Abbildung sind die Wellenbewegungen durch zwei zonale Vertikalschnitte dargestellt. Links pflanzen sich die Wellen von W nach E, rechts von E nach W fort. Die Ebene dieses Vertikalschnittes denken wir uns erstarrt und in solcher Weise geneigt, wie es die beiden Meridionalprofile am linken Rande angeben, d. h. entweder mit dem Gefälle nach Süden oder nach Norden. Die Wellenbewegungen sind sowohl in den zonalen Vertikalschnitten wie an den geneigten zonalen Ebenen durch einige Stromlinien dargestellt, die geradlinigen

Stromlinien mit einbegriffen. Dazu sind noch die Orbitalumläufe innerhalb jeder Schicht angegeben, sowohl im Vertikalschnitt wie längs der geneigten Ebenen. Die Figur bezieht sich der Einfachheit halber auf Wellen großer Stabilität, mit denen wir am besten vertraut sind.

Will man sich ein konkretes Bild dieser Wellenbewegungen machen, so kann man sich das untere Medium als Meer und das obere als Atmosphäre vorstellen. Die vier Abbildungen stellen dann Wellen dar, die sich entlang einer zonal verlaufenden Küste fortpflanzen, auf den beiden oberen Figuren längs einer Südküste, auf den beiden unteren längs einer Nordküste, auf den beiden Figuren links von *W* nach *E*, auf den beiden Figuren rechts von *E* nach *W*. Die Stromlinien in der Nähe der starren schräggestellten Begrenzungsfläche bleiben dieselben, auch wenn man sich die Dichte des Meeres nur als unbedeutend größer als die der Atmosphäre vorstellt und dabei von den Wellenlängen der gewöhnlichen Dünung zu den 10000- bis 100000mal größeren Wellenlängen der zyklonischen Störungen übergeht.

Den in der Abb. 74 dargestellten Wellenbewegungen denken wir jetzt die zonalen Translationsbewegungen der Schichten hinzugefügt, und zwar sowohl die drei Translationsbewegungen, die in der Abb. 53 *A*, *B*, *C* gegeben sind, wie die drei entsprechenden, die sich bei Umkehrung des Gleitwirbels ergeben. Das vollständige Schema gibt also viermal so viele Kombinationen von kinematisch möglichen typischen Stromlinienkarten, als man auf den meteorologischen Karten vertreten findet. Die Ursache ist erstens, daß die meteorologischen Zyklonen eine einseitige dynamische Fortpflanzungsrichtung haben, während im vollständigen kinematischen Schema zwei Richtungen möglich sind. Zweitens ist bei einer atmosphärischen Diskontinuitätsfläche der Gleitwirbel immer zyklonisch, während auf einer nichtrotierenden Erde der Gleitwirbel zwischen den Grundströmungen ebensogut antizyklonisch wie zyklonisch sein kann.

Bisher haben wir aber noch nicht die Wirkung der Erddrehung in Betracht gezogen; und es ist die Frage, ob diese, die ja durchweg Asymmetrien in den Bewegungserscheinungen zur Folge hat, in dem vorliegenden Fall die folgenden drei Asymmetrien verursachen kann:

(I) Schiefe Lage der Trennungsfläche der Schichten, so daß die starre Grenzfläche horizontal gelegt werden kann.

(II) Einseitige Verstärkung der zyklonischen und Vernichtung der antizyklonischen Wirbel.

(III) Einseitige dynamische Fortpflanzungsrichtung, definiert durch die Regel, daß die kalten Massen auf der nördlichen Halbkugel links, auf der südlichen Halbkugel rechts von der Fortpflanzungsrichtung liegen.

139 (III). Wellentheorie der Zyklonen: (III) Einfluß der Erddrehung. Wir haben eine doppelte Wirkung der Erddrehung in Betracht zu ziehen: erstens auf die Horizontalbewegung der Schichten und zweitens auf die Orbitalbewegung der Teilchen. Solange es sich um qualitative Überlegungen handelt, können die Wirkungen in beliebiger Reihenfolge und unabhängig voneinander betrachtet werden, woraus man dann durch Überlagerung ein qualitatives Endresultat findet.

1. *Wirkung der Erddrehung auf die Horizontalbewegung der Schichten.* Solange sich die Schichten in Ruhe befinden, bleibt sowohl auf der rotierenden wie auf der ruhenden Erde die Diskontinuitätsfläche horizontal, so daß sie nur einen schrägen Boden schneiden kann. Eine von Schicht zu Schicht verschiedene Bewegung der Schichten war aber schon nötig, um den Stromlinienbildern ihre volle Ähnlichkeit mit den meteorologischen Karten zu geben. In Verbindung mit der Erddrehung bewirkt aber diese relative Translation der Schichten, daß sich die Diskontinuitätsfläche schräg stellt — quantitativ nach der MARGULESschen Formel —, so daß diese Fläche den horizontalen Erdboden schneiden kann: *die Bedingung* (I) *wird erfüllt* (vgl. Abb. 75).

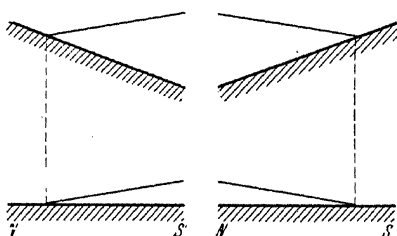



Abb. 75. Relative Lagen von starrer Grenzfläche und Diskontinuitätsfläche.

Diese Hebung der Diskontinuitätsfläche in eine geneigte Lage ist ihrerseits eine einseitige. Nach dem in Abschnitt **128**, S. 481, abgeleiteten Satze ist sie nur in solcher Weise möglich, daß der Gleitwirbel zyklonisch wird. Bilden sich dann Wellen in der geneigten Diskontinuitätsfläche, so werden die mit den Wellen verbundenen zyklonischen Wirbel durch den Gleitwirbel verstärkt, die mit den Wellen verbundenen antizyklonischen Wirbel dagegen geschwächt, und zwar bis zur Vernichtung geschwächt, weil eine Diskontinuitätsfläche mit antizyklonischem Gleitwirbel überhaupt nicht dauernd bestehen kann: *die obige Bedingung* (II) *der einseitigen Verstärkung der zyklonischen Wirbel ist damit erfüllt.*

Infolge dieser Asymmetrie wird die Hälfte der Stromlinienbilder, die formal kinematisch möglich waren, ausgeschieden.

Es ist aber noch eine offene Frage, wo die verstärkten zyklonischen Wirbel sich befinden werden: ob an den Spitzen der warmen oder der kalten Zungen. Im ersten Falle muß, wie aus Abb. 74 I—IV ersichtlich ist, die entsprechende Wellenbewegung eine solche Richtung ihrer dynamischen Fortpflanzung haben, daß der kalte Keil auf der nörd-

lichen Halbkugel links, auf der südlichen rechts von der Fortpflanzungsrichtung liegt. Im zweiten Falle muß der kalte Keil auf der nördlichen Halbkugel rechts, auf der südlichen Halbkugel links von der dynamischen Fortpflanzungsrichtung liegen.

Offenbar wird die ganze Bewegung für diese beiden Fälle wesentlich verschieden: sind die zyklonischen Wirbel um die warmen Zungen zentriert, so müssen die in der dünnen keilförmigen Schicht enthaltenen kalten Massen einen großen Bogen um die viel mächtigeren warmen Massen herum beschreiben. Wären die zyklonischen Wirbel dagegen um die kalten Zungen zentriert, so müßten die mächtigen warmen Massen einen großen Bogen um die seichte Zunge kalter Luft ausführen. Diese letztere Bewegung könnte man vielleicht als dynamisch weniger wahrscheinlich als die erstere ansehen und schon daraus ohne weiteres auf die Einseitigkeit der Fortpflanzungsrichtung schließen. Bindende Schlüsse hieraus zu ziehen, erscheint jedoch schwierig. Wenn wir aber jetzt zu der Einwirkung der Erddrehung auf die Orbitalbewegung übergehen, so wird jedoch eine sicher bedeutungsvolle Asymmetrie zutage treten.

2. *Wirkung der Erddrehung auf die Orbitalbewegung.* Wo die Erddrehung freies Spiel hat, sucht sie die Horizontalprojektion der Orbitalbewegung antizyklonisch zu krümmen, und zwar sowohl bei instabilen wie bei stabilen Wellen. Andererseits treten an der geneigten und wogenden Diskontinuitätsfläche infolge des kinematischen Zwanges sowohl zyklonisch wie antizyklonisch gekrümmte Bahnen auf. Es fragt sich, was aus dem Zusammenwirken des kinematischen Zwanges und der Erddrehungskraft hervorgehen wird. Offenbar hat man dann vier vom kinematischen Standpunkte aus formal gleich mögliche Fälle zu betrachten.

Die Orbitalbahnen seien zunächst *beiderseits der Diskontinuitätsfläche antizyklonisch gekrümmt.* Die Erddrehung würde dann in beiden Schichten die antizyklonische Krümmung verstärken, und es würde sich eine einheitliche wuchtige Bewegung ergeben. Soll aber der Gleitwirbel an der Diskontinuitätsfläche zyklonisch sein, so sind antizyklonisch gekrümmte Orbitalbahnen beiderseits der Fläche *nicht möglich*, was ohne weiteres aus **107**, S. 386 hervorgeht, wenn man nach der Umlegung von der Vertikalebene in die Horizontalebene „positiv" und „negativ" durch „zyklonisch" und „antizyklonisch" ersetzt. Diese Bewegung kann deshalb bei den großen atmosphärischen Bewegungen nicht vorkommen.

Die Orbitalbahnen seien dann *beiderseits der Diskontinuitätsfläche zyklonisch gekrümmt.* Wenn auch die Erddrehung hier alle Orbitalbahnen antizyklonisch umlegen kann, so kommt doch keine starke Wellenbewegung zustande, weil die ursprüngliche Bewegungstendenz

der Erddrehung entgegenwirkt. Auch diese Bewegung werden wir deshalb verwerfen.

Die Orbitalbahnen seien drittens *im engen Keil unterhalb der Diskontinuitätsfläche antizyklonisch und in der oberen freien Schicht zyklonisch gekrümmt.* Die Erddrehung wird die schon vorhandenen antizyklonischen Umläufe im engen Keil verstärken. In der oberen Schicht wird es dagegen zu einem Konflikt kommen. Die kinematisch notwendigen zyklonischen Umläufe werden sich in unmittelbarer Nähe der wogenden Diskontinuitätsfläche behaupten, in größeren Abständen dagegen von der Erddrehungskraft antizyklonisch umgelegt werden. Es ergibt sich dann in der oberen Schicht keine einheitliche, wuchtige Bewegung, und wir können diesen Fall aus demselben Grunde wie den vorhergehenden außer Betracht lassen.

Die Orbitalbahnen seien schließlich *im unteren engen Keil zyklonisch und in der oberen freien Schicht antizyklonisch gekrümmt.* In der oberen Schicht werden die antizyklonischen Krümmungen von der Erddrehung verstärkt. In der ganzen Schicht ergibt sich eine einheitliche wuchtige Bewegung, welche die Wellenbewegung der darunterliegenden Diskontinuitätsfläche verstärken muß. Der starke kinematische Zwang im engen Keil zwischen der wogenden Diskontinuitätsfläche und dem Boden verhindert dann, daß hier die Erddrehung die Orbitalbahnen umlegt. In der ganzen unteren Schicht bleibt die zyklonische Bahnkrümmung bestehen, und man hat die Bedingungen für eine einheitliche wuchtige Wellenbewegung.

Wir brauchen deshalb nur diesen letzten Fall zu berücksichtigen, und es ergibt sich sodann die folgende Asymmetrie: *Bei Wellen von so langer Periode, daß sich die Wirkung der Erddrehung entscheidend geltend machen kann, ist diejenige Fortpflanzungsrichtung bevorzugt, bei der die Orbitalbahnen in der oberen Schicht antizyklonisch und in der unteren Schicht zyklonisch gekrümmt sind.*

Es folgt hieraus unmittelbar, daß die zyklonischen Wirbel immer um die warmen Zungen zentriert sind, und fernerhin auch: die bevorzugte Fortpflanzungsrichtung auf der nördlichen Halbkugel ist die, wo der kalte Keil links von der Fortpflanzungsrichtung der Welle relativ zu den Grundströmungen liegt, und auf der südlichen Halbkugel die, wo der kalte Keil rechts von dieser Fortpflanzungsrichtung liegt. Die Stromlinienbilder der Abb. 74 können also jetzt (der Boden horizontal vorausgesetzt) eindeutig dem entsprechenden meteorologischen Phänomenen zugeordnet werden, wobei man die Fortpflanzungsrichtung relativ zu den beiden Grundströmungen aus der Abb. 47 links findet.

(I) Der kalte Keil liegt südlich der Front, und die Fortpflanzung relativ zu den Grundströmungen verläuft von Westen nach Osten: das ist der normale Fall auf der südlichen Halbkugel.

(II) Der kalte Keil liegt nördlich der Front, und die Fortpflanzung relativ zu den Grundströmungen verläuft von Westen nach Osten: das ist der normale Fall auf der nördlichen Halbkugel.

(III) Der kalte Keil liegt südlich der Front, und die Fortpflanzung relativ zu den Grundströmungen verläuft von Osten nach Westen: das ist der Ausnahmefall der retrograden Zyklonen auf der nördlichen Halbkugel.

(IV) Der kalte Keil liegt nördlich der Front, und die Fortpflanzung relativ zu den Grundströmungen verläuft von Osten nach Westen: das ist der Ausnahmefall der retrograden Zyklonen auf der südlichen Halbkugel.

Wir haben im Vorhergehenden nur zonal sich fortpflanzende Wellen betrachtet. Alle Überlegungen sind aber von dem Azimut der Fortpflanzungsrichtung unabhängig, und die Resultate behalten ihre Gültigkeit auch für Wellen mit beliebiger Fortpflanzungsrichtung.

Nachdem wir diese Resultate erkannt haben, läßt sich noch eine charakteristische Eigenschaft in der weiteren Entwicklung der Zyklonen voraussehen, nämlich die *Occlusionserscheinung*. Die Erfahrungen, die wir später systematisch darstellen werden, zeigen, daß die Luftmassen der kalten Keile im großen und ganzen zusammensinken und sich am Boden ausbreiten. Dies hat zur Folge, daß die Zungen kalter Luft sich fortwährend auf Kosten der warmen verbreitern. Schließlich treten alle Kaltluftzungen miteinander in Berührung, eine Erscheinung, die an der äußersten Spitze der warmen Zunge beginnt, wo die Diskontinuitätsfläche am steilsten ist. Nimmt man hierauf Rücksicht, so erhält man z. B. aus dem Stromlinienbild Abb. 73 das der Abb. 76, wo der nördliche Teil der warmen Zungen am Boden abgehoben ist.

Abb. 76. Stromlinien einer occludierten Zyklone.

Wenn dieser Occlusionsvorgang vollführt ist, ist jede Spur der ursprünglichen Welle, jedenfalls am Erdboden, verschwunden. Man beobachtet hier nur den zurückgebliebenen Horizontalwirbel.

Wie schon früher erwähnt, findet man in den normalen Fällen (I) und (II), daß *die neugebildete Zyklone algebraisch* (positive Richtung gegen Osten) *schneller als die schnellsten der Grundströmungen läuft.* Durch den Occlusionsvorgang bekommt aber die Störung einen allmählich wachsenden Anteil an kalter, algebraisch langsamer bewegter Luft, so daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung algebraisch abnehmen muß. Bei der fortgesetzten Verwirbelung (vgl. Abb. 55 unten)

muß sich schließlich eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergeben, die einen gewissen Mittelwert der Geschwindigkeiten beider Grundströmungen darstellt.

140. Die dreidimensionale Bewegung in der Zyklonenwelle. Wir geben einen kurzen Überblick über die Bewegung in der somit abgeleiteten Zyklonenwelle und beschränken uns dabei zur Vereinfachung der Darstellung auf die Verhältnisse der nördlichen Halbkugel und auf die Betrachtung einer Welle, die sich rein zonal von *W* nach *E* fortpflanzt.

Die Bewegung ist großzügig einfach. In erster Annäherung verläuft sie rein horizontal; sie besteht aus einer horizontalen, zonal gerichteten Grundströmung mit verschiedenen Geschwindigkeiten der Massen beiderseits der schrägen Diskontinuitätsfläche und aus einer, dieser Grundströmung überlagerten, in Horizontalebenen verlaufenden Wellenbewegung, durch welche die Massen abwechselnd nach Norden und Süden vorstoßen. Die Verwandtschaft dieser horizontalen Wellenbewegung mit den gravoid-elastoiden Oberflächenwellen, die wir in Abschnitt **121** als Absolutbewegung betrachtet haben, ist offensichtlich: kehren wir zur Absolutbewegung zurück, so sind die Zyklonenwellen von gravoid-elastoidem Charakter, aber in mehrfacher Hinsicht allgemeiner als die Wellen dieser Art, die wir in Abschnitt **121** betrachteten.

Die Verteilung der Vertikalkomponente der Luftbewegung in der Zyklonenwelle läßt sich nicht in elementarer Weise ableiten, aber um dennoch das dreidimensionale Bild der Zyklonenwelle schon an dieser Stelle zu vervollständigen, entnehmen wir im voraus das folgende Resultat aus Abschnitt **160 (II)**: *Die Orbitalbahnen in der instabilen Zyklonenwelle haben alle ein schwaches Gefälle gegen Süden.* Oder anders ausgedrückt: *Innerhalb der Zyklonenwelle sind die Nordwinde etwas abwärts und die Südwinde etwas aufwärts gerichtet.* Dieses Resultat gilt für die freie Atmosphäre, während in unmittelbarer Nähe des horizontalen Erdbodens die Bewegung aller Teilchen zwangsweise genau horizontal wird.

Da es recht schwierig ist, die behandelten dreidimensionalen kinematischen Vorgänge durch zweidimensionale Abbildungen völlig klar zu machen, empfiehlt es sich sehr, ein räumliches Modell der Zyklonenwelle zu bauen, z. B. wie das in Abb. 77 dargestellte.

Die Stromlinien in Horizontalprojektion (aus Abb. 73 B) sind unten am Erdboden gezeichnet, und die wogende Diskontinuitätsfläche ist durch eine schräge, wellenförmig gebogene Zelluloidplatte dargestellt. Auf einer vertikalen Zelluloidplatte sind die Stromlinien in Vertikalprojektion gezeichnet als überwiegend horizontale Linien mit entgegen-

gesetzter positiver Richtung oberhalb und unterhalb der Diskontinuitätsfläche und in solcher Weise gekrümmt und miteinander verbunden, daß die Südwinde ihre schwache Aufwärtskomponente und die Nordwinde ihre schwache Abwärtskomponente erhalten.

Zum Vergleich mit der Wirklichkeit muß man sich die vertikalen Dimensionen des Modelles auf etwa $^1/_{30}$ verkleinert denken, so daß die wirkliche Neigung der Diskontinuitätsfläche etwa $^1/_{100}$ wird und die

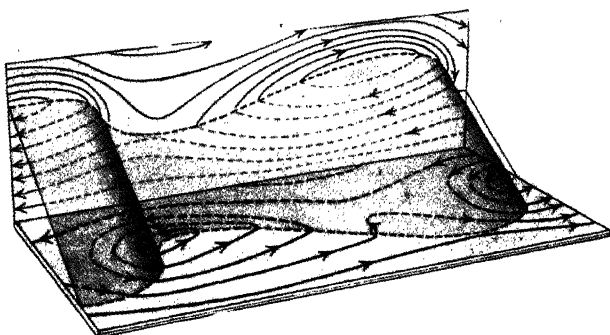



Abb. 77. Zyklonenmodell.

wirkliche Neigung der Orbital- oder Stromlinienebenen vielleicht $^1/_{1000}$. Erst dann sieht man, wie ganz überwiegend die Horizontalbewegungen und wie klein die in meteorologischer Hinsicht so bedeutungsvollen Vertikalbewegungen sind.

In der Analyse dieser kleinen aber meteorologisch so wichtigen Vertikalkomponenten der Luftbewegung können wir noch auf elementarem Wege einen Schritt weiter machen und dabei zu Resultaten kommen, die wir später bestätigt finden werden, wenn wir in **160 (II)** die mathematische Theorie der Zyklonenwelle in der freien Atmosphäre entwickeln. Auf der Vorderseite der ostwärts gehenden Zyklonenwelle haben beide Luftmassen eine Bewegungskomponente nordwärts, $v_y > 0$, $v'_y > 0$. Die kalten Teilchen haben dabei eine Beschleunigungskomponente nach Westen ($j_x < 0$) und die warmen Teilchen eine Beschleunigungskomponente gegen Osten ($j'_x > 0$) als unmittelbare Folge der zyklonischen Orbitalbewegung der kalten und der antizyklonischen Orbitalbewegung der warmen Massen. Auf der Rückseite der Zyklonenwelle hat man entsprechend $v_y < 0$, $v'_y < 0$, $j_x > 0$, $j'_x < 0$.

Die vier Größen v'_y, v_y, j'_x, j_x sind durch die Bewegungsgleichungen

$$j'_x = s' G'_x + 2\Omega_z v'_y, \qquad j_x = s G_x + 2\Omega_z v_y$$

miteinander verbunden. Da der Druckgradient mit stetiger Tangentialkomponente durch die Grenzfläche hindurchgeht, hat man für ein

warmes und ein benachbartes kaltes Teilchen $G'_x = G_x$. Subtrahiert man deshalb die zweite Gleichung von der ersten und löst nach $v'_y - v_y$ auf, so ergibt sich:

$$v'_y - v_y = \frac{-(s'-s)\,G_x + (j'_x - j_x)}{2\,\Omega_z}. \tag{1}$$

Auf der *Vorderseite* der Zyklone ist wie oben gezeigt $j'_x - j_x > 0$. Das viel kleinere Glied $-(s'-s)G_x$ gibt auch einen immer positiven Beitrag zu dem Wert des Zählers, und der Bruch wird folglich positiv. Auf der *Rückseite* der Zyklonenwelle sind dagegen $j'_x - j_x < 0$, $-(s'-s)G_x < 0$, und der Bruch wird negativ.

Aus (1) folgt somit, daß die Differenz der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten $v'_y - v_y$ auf der Vorderseite der Zyklonenwelle positiv und auf der Rückseite derselben negativ ist. Da gleichzeitig die einander gegenüberliegenden Teilchen identisch dieselbe Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur schrägen Diskontinuitätsfläche haben, so folgert man: *Auf der Vorderseite der Zyklonenwelle gleitet die Warmluft aufwärts, auf der Rückseite abwärts relativ zur benachbarten Kaltluft.*

Abb. 78. Orbitalebenen zweier Teilchen beiderseits der Diskontinuitätsfläche.

Zusammenfassend kann man also folgendes über die Vertikalbewegung in der Zyklonenwelle aussagen: *Auf der Vorderseite der Zyklonenwelle steigen beide Luftmassen, und an der Diskontinuitätsfläche gleitet dabei die Warmluft aufwärts relativ zur benachbarten Kaltluft; auf der Rückseite der Zyklonenwelle sinken beide Luftmassen, und an der Diskontinuitätsfläche gleitet dabei die Warmluft abwärts relativ zur Kaltluft.*

Wir werden später die Bedeutung dieses Satzes für die Verteilung der Wolken und des Niederschlages innerhalb der Zyklonen sehen (**188**).

Die Abb. 78 veranschaulicht die Bewegung in Projektion auf der yz-Ebene. Die schräge Diskontinuitätsfläche, von Westen gesehen, ist durch eine gestrichelte Linie dargestellt in ihrer Mittellage MM, und in ihren beiden Extremlagen E_1E_1 und E_2E_2. Zwei Teilchen, ein warmes und ein kaltes, befinden sich in gegenseitiger Nachbarlage bei 0, während die Diskontinuitätsfläche durch ihre mittlere Lage hindurchgeht. In den Extremlagen befindet sich das warme Teilchen in W_1 bzw. W_2 und das kalte Teilchen in K_1 bzw. K_2. Das warme Teilchen legt, wie ersichtlich, die größte Strecke sowohl in vertikaler Richtung wie in horizontaler y-Richtung zurück, während beide Teilchen identisch gleich große Strecken in der Richtung senkrecht zu der Diskontinuitätsfläche zurücklegen.

Schließlich übt die Reibung auch einen gewissen Einfluß auf die Vertikalbewegung in der Zyklone aus. Mit der Gleitgeschwindigkeit an der Diskontinuitätsfläche folgt, wie wir schon im Abschnitt **134** gesehen haben, durch die Reibung ein Aufwärtsgleiten der warmen und ein Abwärtsgleiten der kalten Luftmassen in nächster Nähe der Diskontinuitätsfläche. Diese Reibungswirkung ist dort am stärksten, wo die Wellenbewegung die Gleitgeschwindigkeit verstärkt, d. h. beim Zyklonenzentrum. Die Wirkung begrenzt sich aber zu den relativ dünnen Reibungsschichten und bleibt deshalb von untergeordneter Bedeutung.

141. Plan der folgenden Untersuchungen. Es ist jetzt eine Fundamentalaufgabe der theoretischen Meteorologie, die oben elementar-qualitativ entwickelte Wellentheorie der Zyklonen mathematisch zu prüfen. D. h. man muß untersuchen, ob man Integrale der Störungsgleichungen finden kann, die ähnliche Bewegungsformen wie die oben diskutierten quantitativ darstellen. Die Aufgabe ist von großem Umfange und muß systematisch vorbereitet werden. In den beiden folgenden Kapiteln sind diese Vorbereitungen so weit geführt worden, wie es mit elementaren mathematischen Hilfsmitteln vorläufig gelingt.

Der allgemeine Plan ist der, die Einwirkung der Erddrehung auf alle möglichen Wellengattungen zu untersuchen, teils um einen allgemeinen Überblick über die Einwirkung der Erddrehung unter den verschiedensten Umständen zu erhalten, und teils, um die sich ergebenden Speziallösungen in bezug auf ihre Brauchbarkeit oder Nichtbrauchbarkeit als Elemente in einer vollständigen Zyklonentheorie zu prüfen. Dabei haben wir erstens nachzusehen, ob die Speziallösungen solche Grenzflächenbedingungen erfüllen können, die denen in der Natur gegegebenen hinlänglich nahekommen. Zweitens sind die gefundenen Lösungen in bezug auf ihr Stromlinienbild und auf die Orbitalumläufe der Teilchen zu untersuchen, um das kinematische Bild der Bewegung mit dem aus den meteorologischen Karten abgeleiteten kinematischen Bilde zu vergleichen. Drittens müssen die Wellen die gleiche einseitig bevorzugte Fortpflanzungsrichtung wie die Zyklonen haben. Viertens sind die soweit brauchbar gefundenen Lösungen in bezug auf Stabilität und Instabilität zu prüfen, da wir die Zyklonen nur als Instabilitätswellen auffassen können. Und fünftens ist schließlich zu untersuchen, welche Perioden und Wellenlängen oder Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die somit herausgesiebten Wellenformen haben, um zu sehen, inwieweit sie quantitativ mit den Perioden und den Dimensionen oder der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Zyklonen übereinstimmen oder nicht.

Wenn es gelingt, Integrale der Störungsgleichungen zu gewinnen, die allen diesen Anforderungen genügen, so müssen diese Integrale, selbst wenn sie recht spezieller Natur sind, als brauchbare vorläufige Lösungen des Zyklonenproblems betrachtet werden.

Eine besondere Schwierigkeit ist natürlich mit dem Anbringen der erwünschten Grenzflächen verbunden. Die elementaren Lösungen, mit denen wir durchweg arbeiten, lassen sich auf direktem Wege nur ebenen Grenzflächen parallel der Diskontinuitätsfläche anpassen. Dies gibt Schichten von gleichmäßiger Mächtigkeit und keine keilförmige Schicht entsprechend dem kalten Keil, der durch den horizontalen Boden und die schräge Diskontinuitätsfläche begrenzt ist.

Durch einen Kunstgriff kann man sich aber partikuläre Lösungen verschaffen, bei denen die erwünschten Keilformen auftreten. Die durch die elementaren Funktionen dargestellten Lösungen enthalten nämlich immer gewisse von der Zeit unabhängige Stromflächen, die man solidifiieren und als Grenzflächen einführen kann. Die solidifiierte Stromfläche bildet dann zusammen mit der freien Oberfläche einer einzigen Schicht einen keilförmigen Raum. Lagern zwei Schichten aufeinander, so bildet eine solidifiierte Stromfläche in der unteren Schicht einen keilförmigen Raum zusammen mit der Diskontinuitätsfläche, welche die beiden Schichten voneinander trennt. In diesem Fall muß aber geprüft werden, ob die in der unteren Schicht solidifiierte Stromfläche eine stetige Fortsetzung in einer in der oberen Schicht solidifiierbaren Stromfläche finden kann. Und schließlich muß nachgesehen werden, ob die gebildete Grenzfläche im übrigen eine annehmbare Form hat. Die in dieser Weise erreichbaren Lösungen partikulärer Natur sind dann in bezug auf ihre Brauchbarkeit nach den übrigen Kriterien zu prüfen. Indem man mit den einfachsten Fällen beginnend zu den komplizierteren fortschreitet, wird man sich in dieser Weise dem Zyklonenproblem schrittweise nähern können.

Diese Untersuchungen sind im folgenden in zwei Kapitel geteilt. Kapitel XIII bezieht sich auf die Einwirkung der Erddrehung auf die in Kapitel VIII studierten Gleichgewichtsstörungen, und Kapitel XIV auf die in Kapitel IX studierten Störungen geradliniger Strömungen. Die Untersuchungen werden systematisch für eine Schicht und für zwei einander überlagerte Schichten, und weiter für homogen-inkompressible Schichten und für isotherme Schichten durchgeführt. Die Behandlung der isothermen Schichten, die im Gegensatz zu den homogen-inkompressiblen innere Stabilität besitzen, wird sich aus mehreren Gründen als besonders wichtig erweisen.

Dreizehntes Kapitel.

Gleichgewichtsstörung auf der rotierenden Erde.

142. Die Gleichungen des Grundzustandes und der Gleichgewichtsstörungen. Wenn sich die Flüssigkeit relativ zum rotierenden System in Ruhe befindet, so ist sowohl die relative Beschleunigung wie auch die Corioliskraft gleich Null. Die Schwere, d. h. die Resultierende der reinen Massenanziehung und der Zentrifugalkraft, sei durch das Potential Φ gegeben. Der Einfachheit halber setzen wir noch voraus, daß die Äquipotentialflächen äquidistante Horizontalebenen mit dem Gradienten $\mathbf{g}$ sind. Wählt man die c-Achse vertikal nach oben, so ist dann:

$$(1) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial c}$$

Die Gleichungen des Grundzustandes bleiben äußerlich dieselben wie **89** (2):

$$(2) \qquad \frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial b} = 0\,, \qquad S\frac{\partial P}{\partial c} = -g$$

mit horizontalen Äquiskalarflächen für Druck und spezifisches Volumen.

Die Störungsgleichungen **89** (5b) werden unter Hinzufügen der Coriolisbeschleunigung (**123**):

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\ddot{x} + 2\Omega_b \dot{z} - 2\Omega_c \dot{y} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp + gz) &&= 0\,, \\ &\ddot{y} + 2\Omega_c \dot{x} - 2\Omega_a \dot{z} + \frac{\partial}{\partial b}(Sp + gz) &&= 0\,, \\ &\ddot{z} + 2\Omega_a \dot{y} - 2\Omega_b \dot{x} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp + gz) - g(\Gamma - \gamma)\, Sp &&= 0\,, \end{aligned}$$

und die Kontinuitätsgleichung **89** (6) bleibt ungeändert:

$$(4) \qquad \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma Sp = 0\,.$$

Solange der Grundzustand ein Gleichgewichtszustand ist, behalten auch die Grenzbedingungen **89** (7) bis (9) dieselbe Form wie früher.

Wir gehen zu den einfachsten Integrationen dieses Systems über, wodurch wir die durch die Corioliskraft bewirkten Modifikationen der Wellenlösungen des Kapitels VIII erhalten werden.

143. Inkompressibilität: Wellen längs des Äquators. Wir nehmen zunächst die Flüssigkeit als homogen und inkompressibel an, d. h. $\Gamma = \gamma = 0$, und beschränken uns in diesem Abschnitt auf Wellenstörungen, die sich längs des Äquators fortpflanzen. Zeigt die a-Achse in die Fortpflanzungsrichtung und die c-Achse vertikal nach oben, und fällt die positive Umdrehungsrichtung mit dem Drehsinn der Erde

zusammen, so zeigt der Rotationsvektor $\boldsymbol{\Omega}$ der Erde längs der positiven b-Achse, so daß:

$$\Omega_a = \Omega_c = 0\,, \qquad \Omega_b = \Omega\,.$$

Bei reinen Schwerewellen ohne Erddrehung ist die Bewegung in den Vertikalebenen ac enthalten, die parallel zur Äquatorebene sind. Dieselben Ebenen enthalten aber bei vorhandener Erddrehung auch die Corioliskraft, die folglich nicht imstande ist, die Flüssigkeitsteilchen aus diesen Ebenen zu verschieben. Die Wellenbewegung bleibt also zweidimensional, verläuft in Ebenen parallel der Äquatorebene und ist im wesentlichen dieselbe, die wir als absolute Bewegung in **117** behandelten. Als relative Bewegung ergibt sie sich aus den Störungsgleichungen **142** (3) und (4):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\Omega\dot{z} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp + gz) &= 0\,, \\ \ddot{z} - 2\Omega\dot{x} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp + gz) &= 0\,, \\ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} \qquad\qquad &= 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Da die Koeffizienten dieses linearen Differentialgleichungssystems konstant sind, wählen wir wie in Kapitel VIII eine Lösung der einfach-harmonischen Form:

$$\begin{aligned} x &= A\,e^{\lambda c}\cos(\mu a - \nu t)\,, \\ z &= C\,e^{\lambda c}\sin(\mu a - \nu t)\,, \\ Sp &= D\,e^{\lambda c}\sin(\mu a - \nu t)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Durch Einsetzen in das System (1) ergibt sich das lineare, homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\nu^2 A - 2\Omega\nu C + \mu(D + gC) &= 0\,, \\ -2\Omega\nu A - \nu^2 C \quad + \lambda(D + gC) &= 0\,, \\ -\mu A + \lambda C \qquad\qquad &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

zur Bestimmung der Amplituden A, C, D. Wenn diese nicht identisch verschwinden sollen, muß die Determinante der Koeffizienten gleich Null sein:

$$\nu^2(\lambda^2 - \mu^2) = 0\,, \tag{4}$$

mit $\lambda = \pm\mu$ als den alleinigen Wurzeln von Bedeutung. Die Amplituden werden dann:

$$C = \pm A\,, \qquad D = \pm\frac{A}{\mu}(\pm\nu^2 + 2\Omega\nu - \mu g)\,. \tag{5}$$

Der Fall $\lambda = \mu$ entspricht unendlicher Tiefe. Verlangt man in diesem Falle, daß der Störungsdruck p an einer beliebigen freien Oberfläche verschwinden soll, so ergibt sich die Frequenzengleichung:

$$\nu^2 + 2\Omega\nu - \mu g = 0\,. \tag{6}$$

In Verbindung mit (5) sagt diese Frequenzengleichung aus, daß der Störungsdruck eines bewegten Teilchens wie früher (**91**) in allen Tiefen verschwindet. Nach Multiplikation mit dem Radiusvektor $r = A e^{\mu c}$ der kreisförmigen Bahn eines Teilchens läßt sich die Frequenzengleichung (6) in der folgenden Form schreiben:

$$(6') \qquad -\nu^2 r = 2\Omega \nu r - \mu g r .$$

Diese Gleichung läßt sich, wie die speziellere bei verschwindender Erddrehung $-\nu^2 r = -\mu g r$, sehr anschaulich so deuten, als wäre sie die Bewegungsgleichung des in der Kreisbahn umlaufenden Teilchens (vgl. S. 309—310 und 313): die Zentripetalbeschleunigung $-\nu^2 r = -v^2/r$ rührt von einer Zentralkraft her, die aus zwei einzelnen Zentralkräften zusammengesetzt ist, der Anziehungskraft $-\mu g r$ und der Corioliskraft $2\Omega r \nu = 2\Omega v$. Auf der ruhenden Erde, $\Omega = 0$, gibt die Gleichung eine Umlaufszeit und damit eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die von dem Umlaufssinne unabhängig ist. Auf der rotierenden Erde kommt aber die Corioliskraft hinzu mit ihrer von dem Umlaufssinne abhängigen Richtung: beim positiven Umlauf (mit der Erddrehung, ν positiv, Fortpflanzung der Wellen gegen Osten) verkleinert sie, beim negativen Umlauf (ν negativ, Fortpflanzung der Wellen gegen Westen) vergrößert sie die resultierende Zentralkraft. Ostwärts gehende Wellen haben deshalb langsamere Orbitalumläufe und kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeiten als westwärts gehende Wellen. Der Unterschied ist jedoch klein. Durch Auflösen der Gleichung (6) nach ν ergibt sich nämlich:

$$(6'') \qquad \nu = -\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + \mu g} \quad -\Omega \pm \Big(\sqrt{\mu g} + \frac{}{2\sqrt{\mu g}} +$$

Im letzten Ausdruck ist die Wurzel entwickelt worden, was immer möglich ist, da μg bei der größtmöglichen Wellenlänge, die gleich der Länge des Äquators ist, immer noch 300mal größer als Ω^2 ist. Entsprechend ist $\sqrt{\mu g}$ mindestens 17mal größer als Ω, so daß die Erddrehung eine Änderung der Frequenz um höchstens 6% bewirken kann: diese gemischten Schwere- und Trägheitswellen bleiben deshalb überwiegend Schwerewellen.

Schreibt man die Frequenzengleichung (6) in der Form:

$$(6''') \qquad \nu^2 = \mu (g - 2\Omega \tilde{\omega}) ,$$

wo $\tilde{\omega}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle darstellt, und beachtet man, daß sich die STOKESsche Formel hieraus für $\Omega = 0$ ergibt, so erkennt man, daß sich die Wellen so fortpflanzen, als befände sich die Flüssigkeit unter der Wirkung einer scheinbaren Schwere $g - 2\Omega\tilde{\omega}$, die für ostwärts gehende Wellen verkleinert, für westwärts gehende vergrößert erscheint: man hat eine auffällige formale Ähnlichkeit mit der

Formel **125** (6), nach welcher ein ostwärts bewegtes Teilchen einen kleineren, ein westwärts bewegtes einen größeren Druck auf die Unterlage ausübt.

Verwendet man beide λ-Werte (4), so findet man für eine Störungsbewegung, die am starren Boden $c = c_0$ horizontal verläuft, den Ausdruck:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
x &= A \cosh\mu(c - c_0)\cos(\mu a - \nu t),\\
z &= A \sinh\mu(c - c_0)\sin(\mu a - \nu t),\\
Sp &= \frac{A}{\mu}\,[\nu^2\cosh\mu(c - c_0) - (\mu g - 2\Omega\nu)\sinh\mu(c - c_0)]\sin(\mu a - \nu t).
\end{aligned}
$$

Die Kinematik der Bewegung ist genau dieselbe wie bei verschwindender Erddrehung: die Teilchen beschreiben wieder elliptische Bahnen mit dem konstanten Brennpunktabstand $2A$.

Wenn die Teilchen $c = c_1$ eine freie Oberfläche bilden sollen, muß $p(c_1) = 0$ sein. Dies gibt die Frequenzengleichung:

$$
(8)\qquad \nu^2\cosh\mu(c_1 - c_0) - (\mu g - 2\Omega\nu)\sinh\mu(c_1 - c_0) = 0.
$$

Jeder Wellenlänge entsprechen wieder zwei numerisch verschiedene Frequenzen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten; ganz wie bei unendlicher Tiefe ist dies auf die entgegengesetzte Richtung der Corioliskraft bei der ostwärts gehenden und bei der westwärts gehenden Welle zurückzuführen. Da man immer noch $g - 2\Omega\tilde{\omega}$ als eine scheinbare Schwere betrachten kann, so stimmt (8) formal mit der STOKESschen Formel **91** (8') überein.

Die Frequenzengleichung (8) ist unter der Voraussetzung abgeleitet worden, daß die Erdkrümmung vernachlässigt werden kann. Dasselbe Problem der Wellenfortpflanzung längs des Äquators ist aber auch ohne diese einschränkende Annahme in **117** behandelt worden, und zwar als absolute Bewegung unter Verwendung zylindrischer Koordinaten. Um die Gleichung (8) mit den dort gewonnenen Resultaten vergleichen zu können, müssen wir zur absoluten Bewegung übergehen, d. h. wir müssen $\nu = \mu'(\omega - \Omega)$ und $\mu = \mu'/R$ setzen, wo ω die Winkelgeschwindigkeit in der absoluten Bewegung, μ' die anguläre Wellenzahl und R den Abstand des Teilchens von der Erdachse bedeutet. Die Gleichung (8) ergibt dann:

$$
(8')\qquad \mu'(\omega - \Omega)^2 + \left(2\Omega(\omega - \Omega) - \frac{g}{R}\right)\operatorname{tgh}\left(\mu'\frac{c_1 - c_0}{R}\right) = 0.
$$

Dies stimmt nun mit **117** (10) überein, falls $\operatorname{tgh}\left(\mu'\frac{c_1 - c_0}{R}\right)$ durch die dort verwendete Hilfsgröße k ersetzt werden kann. Mit den jetzigen Be-

zeichnungen ist aber $k = \operatorname{tgh}\left[\mu' \log\left(1 + \frac{c_1 - c_0}{R}\right)\right]$ und die beiden Argumente des tgh stimmen nur dann überein, *wenn die Schichtdicke $c_1 - c_0$ im Vergleich zum Erdradius klein ist.* Nur in diesem Falle ist also die Vernachlässigung der Erdkrümmung in erster Annäherung erlaubt.

Wir haben es also wie in **117** mit gravoiden Trägheitswellen zu tun. Ganz wie bei der Diskussion der Gleichung **117** (10) auseinandergesetzt wurde, findet man aus (8'), daß die konvektive Winkelgeschwindigkeit der Welle immer kleiner als Ω ist. Relativ zur Grundströmung wird also die Geschwindigkeit der ostwärts gehenden Welle durch das Hinzukommen der Erddrehung verkleinert, die der westwärts gehenden dagegen vergrößert.

Abb. 79. Frequenzengleichung für Wellen längs des Äquators.

Die Frequenzengleichung (8) ist in der Abb. 79 in einem $\mu\nu$-Diagramm durch die voll ausgezogenen Kurven mit $h = c_1 - c_0$ als Parameter dargestellt worden. Zum Vergleich sind auch die Kurven für $\Omega = 0$ (Stokessche Formel) gestrichelt eingezeichnet worden. Da diese immer oberhalb der entsprechenden voll ausgezogenen liegen, so ergibt sich wieder das Resultat, daß die Erddrehung für positive ν eine Verkleinerung der Frequenz, für negative ν dagegen eine Vergrößerung des absoluten Betrages der Frequenz herbeiführt.

Die Grenzkurve für unendliche Tiefe ist in beiden Fällen durch eine Parabel dargestellt. Für $\Omega = 0$ hat diese ihren Scheitelpunkt im Ursprung, für $\Omega \neq 0$ dagegen nach (6) im Punkte $(-\Omega^2/g, -\Omega)$, und zwar schneidet sie dann die Ordinatenachse in $\nu = -2\Omega$ und im Ursprung, wo sie außerdem die Gerade $\mu g - 2\Omega\nu = 0$ berührt. Nur die in der Halbebene $\mu > 0$ verlaufenden Zweige stellen brauchbare Lösungen der Frequenzengleichung dar, während die Verbindungskurve zwischen denselben durch die Ordinatenachse vom Ursprung bis -2Ω gegeben ist.

Für kleinere Schichthöhen nähern sich die gestrichelten und voll ausgezogenen Kurven einander, und wenn wir bis zu den zulässigen Schichthöhen der Größenordnung 10^6 $(c_1 - c_0 < R)$ herunterkommen, so sind sie angenähert zusammengefallen.

144. Inkompressibilität: gravoid-elastoide stehende Schwingungen am Äquator. Die *zweidimensionale* Bewegung **143** war von der b-Koordinate unabhängig. Als Gegenstück werden wir jetzt eine von der a-Koordinate unabhängige *dreidimensionale* Bewegung untersuchen. Bei verschwindender Erddrehung soll diese Bewegung zweidimensional und in den Meridionalebenen enthalten sein. Die horizontale Geschwindigkeitskomponente der Teilchen ist dann der Erdachse parallel und wird von einer bei der Erddrehung auftretenden Corioliskraft nicht, oder jedenfalls nicht direkt, beeinflußt. Während ihrer Vertikalbewegung werden aber die Teilchen durch die Corioliskraft aus ihren Meridionalebenen abgelenkt. Es entsteht eine x-Komponente der Bewegung, die mit der schon vorhandenen z-Komponente eine in ihrer Projektion auf die Äquatorebene antizyklonisch gekrümmte Bahn ergibt: man erhält einen Spezialfall der in **121** als absolute Bewegung behandelten gravoid-elastoiden Schwingungen, den Spezialfall nämlich, wo die Röhren schwach gekrümmt sind.

In der relativen Bewegung erhalten wir für diese dreidimensionale, von der a-Koordinate unabhängige Störungsbewegung nach **142** (3) und (4) die Störungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} + 2\Omega\dot{z} && = 0,\\
&\qquad\quad + \frac{\partial}{\partial b}(Sp + gz) && = 0,\\
(1)\qquad &\ddot{z} - 2\Omega\dot{x} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp + gz) && = 0,\\
&\frac{\partial\dot{y}}{\partial b} + \frac{\partial\dot{z}}{\partial c} && = 0.
\end{aligned}
$$

Wir wählen eine Lösung der Form:

$$
\begin{aligned}
x &= A e^{\lambda c}\cos\varkappa b \sin\nu t,\\
(2)\qquad y &= B e^{\lambda c}\sin\varkappa b \cos\nu t,\\
z &= C e^{\lambda c}\cos\varkappa b \cos\nu t,\\
Sp &= D e^{\lambda c}\cos\varkappa b \cos\nu t.
\end{aligned}
$$

Diese stellt eine stehende Schwingung der Wellenlänge $L_b = 2\pi/\varkappa$ dar; dabei lassen sich die äquidistanten Ebenen parallel der Äquatorebene, $b = nL_b/2$, solidifiieren. Nach Einsetzen in (1) erhält man die folgenden Relationen zwischen den Konstanten:

$$
(3)\quad \lambda = \pm\varkappa\sqrt{1 - \frac{4\Omega^2}{\nu^2}},\quad A = \frac{2\Omega\varkappa}{\nu\lambda}B,\quad C = -\frac{\varkappa}{\lambda}B,\quad D = \left(\frac{\varkappa}{\lambda}g - \frac{\nu^2}{\varkappa}\right)B.
$$

Für $\lambda^2 > 0$, d. h. $\nu^2 > 4\Omega^2$, ergibt sich hieraus bei verschwindender Vertikalbewegung am starren Boden $c = c_0$ die *nichtzellulare* Lösung:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{2\Omega\varkappa}{\nu\lambda} B \sinh\lambda(c-c_0)\cos\varkappa b\sin\nu t\,,\\
y &= B\cosh\lambda(c-c_0)\sin\varkappa b\cos\nu t\,,\\
z &= -\frac{\varkappa}{\lambda} B\sinh\lambda(c-c_0)\cos\varkappa b\cos\nu t\,,\\
Sp &= \left[\frac{\varkappa}{\lambda} g\sinh\lambda(c-c_0) - \frac{\nu^2}{\varkappa}\cosh\lambda(c-c_0)\right] B\cos\varkappa b\cos\nu t\,.
\end{aligned}
$$

Für $\lambda^2 = 0$, d. h. für den halben Sterntag, $\nu = \pm 2\Omega$, reduziert sich diese Lösung auf:

$$
(4')\qquad
\begin{aligned}
x &= \varkappa B(c-c_0)\cos\varkappa b\sin 2\Omega t\,,\\
y &= B\sin\varkappa b\cos 2\Omega t\,,\\
z &= -\varkappa B(c-c_0)\cos\varkappa b\cos 2\Omega t\,,\\
Sp &= \left[\varkappa g(c-c_0) - \frac{4\Omega^2}{\varkappa}\right] B\cos\varkappa b\cos 2\Omega t\,.
\end{aligned}
$$

Wenn endlich $\lambda^2 < 0$ ist, d. h. $\nu^2 < 4\Omega^2$, führt man $\lambda = i\bar{\lambda}$ ein, wo $\bar{\lambda}$ reell ist, und man erhält die *zellulare* Lösung:

$$
(4'')\qquad
\begin{aligned}
x &= \frac{2\Omega\varkappa}{\nu\bar{\lambda}} B\sin\bar{\lambda}(c-c_0)\cos\varkappa b\sin\nu t\,,\\
y &= B\cos\bar{\lambda}(c-c_0)\sin\varkappa b\cos\nu t\,,\\
z &= -\frac{\varkappa}{\bar{\lambda}} B\sin\bar{\lambda}(c-c_0)\cos\varkappa b\cos\nu t\,,\\
Sp &= \left[\frac{\varkappa}{\bar{\lambda}} g\sin\bar{\lambda}(c-c_0) - \frac{\nu^2}{\varkappa}\cos\bar{\lambda}(c-c_0)\right] B\cos\varkappa b\cos\nu t\,,
\end{aligned}
$$

wo die Horizontalebenen $c - c_0 = n\pi/\bar{\lambda}$ solidifiierbar sind.

Bei verschwindender Wirkung der Erddrehung, d. h. für $\Omega = 0$, oder für sehr hohe Werte der Frequenz ν, erhält man $\lambda = \varkappa$ und $A = 0$. In (4) verschwindet dann die x-Komponente, und man findet:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
y &= B\cosh\varkappa(c-c_0)\sin\varkappa b\cos\nu t\,,\\
z &= -B\sinh\varkappa(c-c_0)\cos\varkappa b\cos\nu t\,,\\
Sp &= \left[g\sinh\varkappa(c-c_0) - \frac{\nu^2}{\varkappa}\cosh\varkappa(c-c_0)\right] B\cos\varkappa b\cos\nu t\,,
\end{aligned}
$$

welches eine gewöhnliche stehende Wellenbewegung der Wellenlänge $2\pi/\varkappa$ in den Meridionalebenen darstellt. Man hat die gewöhnlichen konkav-parabolischen Stromlinien in diesen Ebenen, und die Bahnen der Teilchen sind geradlinige Linienelemente dieser Stromlinien. Auf die Äquatorebene projizieren sich diese Bahnen als gerade vertikale Linienelemente, die nach oben an Länge zunehmen und unten am Erdboden zu Punkten zusammengezogen sind.

Sobald sich aber die Wirkung der Erddrehung geltend macht, kommt die zonale Verschiebungskomponente x hinzu: die geradlinigen Bahnen gehen in Ellipsen über, sowohl im Raume wie in der Äquatorprojektion. Die Lage der Bahnebenen im Raume werden wir später erkennen. Für die *Bahnprojektionen auf die Äquatorebene* gelten jedoch die folgenden einfachen Gesetze, die unmittelbar aus den Werten der Verschiebungen x und z hervorgehen. Die Projektionen sind elliptisch und werden immer negativ durchlaufen. Die eine Achse ist vertikal und die andere horizontal, und die horizontale steht zu der vertikalen im Verhältnis $2\Omega/\nu$, d. h. bei der nichtzellularen Störungsbewegung ist die vertikale Achse die größere. Im Übergangsfall (4′) sind die beiden Achsen einander gleich, und die Bahnprojektionen auf die Äquatorebene sind Kreise, deren Radien am Erdboden Null sind und proportional der Höhe $c - c_0$ über dem Erdboden zunehmen. Bei der zellularen Lösung endlich ist die horizontale Achse die größere.

Die hier auftretende zellulare Lösung stimmt bis auf die Bezeichnungen mit der früher schon diskutierten Lösung **118** (7) und **121** (1) für die gravoid-elastoiden stehenden Schwingungen in einer schwach gekrümmten Röhre überein. Wir bemerken hier noch die folgende einfache Eigenschaft der Bewegung in den Zellen. Durch Diagonalebenen parallel der a-Achse wird eine Zelle in vier Gebiete zerlegt. An diesen Diagonalebenen selbst sind die Orbitalbahnen kreisförmig; entsprechend findet man die lange Achse der Ellipsen parallel dem Äquator in den beiden an die Vertikalwände grenzenden Gebieten der Zelle und die kurze Achse parallel dem Äquator in den beiden anderen Gebieten.

Wenn man die Geschwindigkeitskomponenten $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ bildet und in die Differentialgleichung der Stromlinien

$$\frac{da}{\dot{x}} = \frac{db}{\dot{y}} = \frac{dc}{\dot{z}} \tag{6}$$

einsetzt, so findet man ein erstes Integral in der Form:

$$\frac{1}{\lambda}\sinh\lambda(c - c_0)\sin\varkappa b = K\,, \tag{7}$$

$$(c - c_0)\sin\varkappa b = K\,, \tag{7'}$$

$$\frac{1}{\bar{\lambda}}\sin\bar{\lambda}(c - c_0)\sin\varkappa b = K\,. \tag{7''}$$

Diese Gleichungen stellen die *Profilkurven von Zylinderflächen dar, die im Raume festliegen und Erzeugenden parallel zum Äquator haben*; auf diesen zylinderförmigen Stromflächen liegen sowohl die Stromlinien wie die elliptischen Bahnen der Teilchen. Die Profilkurven (7) für den nichtzellularen Fall reduzieren sich für $\varkappa = \lambda$ auf die gewöhnlichen nach oben offenen Stromlinien einfacher Schwerewellen **91** (10). Auch die

Profilkurven (7') sind vom konkav-parabolischen Typus. Im zellularen Fall (7'') sind die Kurven geschlossen vom elliptischen Typus: sie sind die Profilkurven von Zylinderflächen, entsprechend den Torusflächen, welche die Gleichung **118** (8) definiert.

Als zweites Integral von (6) findet man in allen drei Fällen:

$$c - c_0 - \frac{\nu a}{2\Omega} \operatorname{tg} \nu t = K_1 , \tag{8}$$

d. h. eine zur Äquatorebene senkrechte Ebene, deren Winkel mit dem Äquator sich mit der Zeit ändert. Diese Ebene kann als die Tangentenebene der spiraligen Zylinderfläche **118** (9) aufgefaßt werden. Die Stromlinien ergeben sich als die Schnittkurven zwischen den Zylinderflächen (7) und den Ebenen (8) ganz wie in **118**.

Die Stromflächen (7), (7'), (7'') können solidifiiert werden und somit feste Grenzflächen definieren, innerhalb deren eine schwingende Bewegung möglich ist. Dabei geben (7) und (7') offene Kanäle, (7'') geschlossene Röhren, sämtlich längs des Äquators gerichtet. Zu den solidifiierbaren Flächen gehören auch der starre Boden $c = c_0$ und die vertikalen Wände mit dem Abstand $\pi/\varkappa$. Im Falle (7'') kommt zugleich dazu eine obere starre Ebene in der Höhe $c - c_0 = \pi/\bar{\lambda}$ über dem Boden: wir haben früher eine entsprechende die ganze Erde umgebende Röhre betrachtet (**118**).

Aus dem Werte von $\bar{\lambda} = \varkappa \sqrt{\frac{4\,\Omega^2}{\nu^2} - 1} = \frac{2\pi}{L_b} \sqrt{\frac{4\,\Omega^2}{\nu^2} - 1}$ findet man für das Verhältnis zwischen der Breite und der Höhe einer Zelle den Ausdruck:

$$\frac{L_b}{L_c} = \sqrt{\frac{4\,\Omega^2}{\nu^2} - 1} \tag{9}$$

Wenn die Periode gleich dem halben Sterntag ist, ist dieses Verhältnis gleich Null; man hat folglich dann unendlich hohe Zellen. Wachsende Periode gibt immer kleinere Werte des Verhältnisses, bis zum Grenzfall der unendlich flachen Zellen bei unendlich langsamen Schwingungen: wir finden die in **118** entwickelten Resultate wieder.

Durch Einführung der Periode $T = 2\pi/\nu$ und der Umlaufszeit der Erde $T_0 = 2\pi/\Omega$ kann man die Gleichung (9) auch in der Form

$$T = \tfrac{1}{2} T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L_b}{L_c}\right)^2} \tag{9'}$$

schreiben, die mit **118** (10) übereinstimmt. Für Beispiele der Anwendung dieser Formel sei auf **118** hingewiesen.

Bei der obigen rein kinematischen Diskussion der Wellenbewegung ist die Flüssigkeit der Einfachheit halber als nach oben unbegrenzt angesehen worden. Man kann jedoch eine freie Oberfläche in dem Niveau

des Störungsdruckes Null einführen, etwa in der Höhe $c = c_1$, und die Flüssigkeitsmasse mit den unendlichen Amplituden oberhalb dieses Niveaus entfernen. Aus (4), (4′) und (4″) ergeben sich dann die folgenden Formen der Frequenzengleichung:

$$\nu^2 \sqrt{1 - \frac{4\Omega^2}{\nu^2}} = \varkappa g \operatorname{tgh}\left(\sqrt{1 - \frac{4\Omega^2}{\nu^2}}\, \varkappa (c_1 - c_0)\right), \tag{10}$$

$$4\Omega^2 = \varkappa^2 g (c_1 - c_0), \tag{10′}$$

$$\nu^2 \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\nu^2} - 1} = \varkappa g \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{4\Omega^2}{\nu^2} - 1}\, \varkappa (c_1 - c_0)\right), \tag{10″}$$

wo (10″) bis auf die Bezeichnungen mit **121** (3) übereinstimmt, und (10) der schon S. 448 erwähnten nichtzellularen Lösung entspricht.

Wir betrachten zunächst einige Spezialfälle.

Bei unendlicher Schichthöhe wird der hyperbolische Tangens in (10) gleich 1, und die Gleichung läßt sich nach Quadrieren in der rationalen Form

$$\nu^2 (\nu^2 - 4\Omega^2) = \varkappa^2 g^2 \tag{10a}$$

schreiben. (10′) gibt die einzige Lösung: $\varkappa = 0$, $\nu^2 = 4\Omega^2$. (10″) gibt schließlich, da das Argument endlich bleiben muß, die Lösung $\varkappa = 0$ für jeden beliebigen Wert von $|\nu|$, der kleiner als 2Ω ist.

Bei sehr kleiner Schichtmächtigkeit kann man den hyperbolischen und den gewöhnlichen Tangens durch sein Argument ersetzen. Die Wurzel fällt dann fort, und alle drei Gleichungen (10), (10′), (10″) reduzieren sich auf die für die reinen Schwerewellen geltende LAGRANGEsche Formel:

$$\nu^2 = \varkappa^2 g (c_1 - c_0). \tag{10b}$$

Im Falle unendlich seichter Schichten gehen somit die gemischt gravoid-elastoiden stehenden Wellen in reine Schwerewellen über.

Wie gewöhnlich zeichnen wir die Frequenzengleichung in einem cartesischen Koordinatensystem ein mit $\varkappa$ als Abszisse und ν als Ordinate, indem wir uns auf den ersten Quadranten beschränken. Die Gleichungen (10), (10′), (10″) stellen dann in dieser $\varkappa\nu$-Ebene eine Kurvenschar dar, mit der Schichthöhe $h = c_1 - c_0$ als Parameter, und zwar fangen alle Kurven im Ursprung an und gehen mit ständig wachsenden Ordinaten gegen $\varkappa = \infty$. Die Kurve für unendliche Schichthöhe (10a) stellt für große Werte von ν angenähert eine Parabel dar; sie endet im Punkte $\nu = 2\Omega$ auf der Ordinatenachse, und ihre Fortsetzung nach kleineren Frequenzen ist nach dem Obigen durch die Ordinatenachse bis zum Ursprung gegeben. Die Kurve für verschwindende Schichthöhe ist nach (10b) die Abszissenachse. Zwischen diesen beiden Grenzkurven befinden sich die Kurven für alle anderen Höhen. Die Kurven-

zweige der zellularen und der nichtzellularen Wellenbewegung gehen kontinuierlich an der Geraden $\nu = 2\Omega$ ineinander über; die einzige Ausnahme hiervon bildet die Kurve für unendliche Schichthöhe, die auf dieser Geraden einen Knick aufweist. Aus der Abb. 80 ersieht man, daß die Kurven in der Nähe des Ursprungs angenähert geradlinig und in großem Abstand mehr parabelähnlich sind. Dieses Diagramm gestattet uns nun, für jede Schichthöhe die zu einer gegebenen Wellenlänge gehörige Frequenz oder umgekehrt zu bestimmen, und dadurch auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle. Für kleine Wellenlängen und kleine Perioden, d. h. für große Werte von $\varkappa$ und ν, haben die Kurven angenähert denselben Verlauf wie bei verschwindender Erddrehung. Bei kleineren Werten von $\varkappa$ bewirkt jedoch die Erddrehung eine Zunahme der Frequenz und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Abb. 80. Frequenzengleichung für gravoid-elastoide Schwingungen am Äquator.

Im zellularen Gebiet sind nur die der Grundschwingung entsprechenden Kurven eingezeichnet. Nach (10″) entsprechen aber unendlich viele Frequenzen einer bestimmten Wellenlänge und Schichthöhe. Bei dieser ersten, zweiten, . . . Oberschwingung liegt das Argument des Tangens im dritten, fünften, . . . Quadranten, während es bei der Grundschwingung im ersten Quadranten liegt. Bei dieser letzteren schwingt die Flüssigkeit einheitlich in der ganzen Schicht, bei der ersten, zweiten, . . . Oberschwingung dagegen hat man eine, zwei, . . . Horizontalebenen mit verschwindender Vertikalgeschwindigkeit in dieser Ebene und mit entgegengesetzter Vertikalbewegung beiderseits dieser Ebene.

Es ist von besonderem Interesse, das in diesem Abschnitt gelöste Problem auch nach dem Vorbild der „dynamisch" genannten, aber in Wirklichkeit nur halbdynamischen Gezeitentheorie zu lösen, und die somit erhaltene Störungsbewegung mit der oben gefundenen zu vergleichen. Für die Vertikalkomponente ist dann die Gleichgewichtsgleichung zu verwenden, d. h. man hat die relative Vertikalbeschleunigung $\ddot{z}$ und die Vertikalkomponente der Corioliskraft $-2\Omega\dot{x}$ in der Bewegungsgleichung (1) für die Vertikale zu vernachlässigen. Aus dieser

vereinfachten Gleichung in Verbindung mit der zweiten Bewegungsgleichung (1) folgt dann: $\frac{\partial}{\partial c}\bar{y} = 0$, d. h. die y-Komponente einer periodischen Störungsbewegung muß notwendig von c unabhängig sein. Aus der Kontinuitätsgleichung und der ersten Bewegungsgleichung (1) ergeben sich dann die anderen Störungskomponenten als lineare Funktionen von c. Es kann aber dann außer dem Boden keine starre Horizontalebene eingelegt werden: *die zellularen gravoid-elastoiden Schwingungen sind in dieser auf quasistatischem Wege erhaltenen Störungsbewegung nicht mit einbegriffen.* Aus dieser Bemerkung folgert man sofort die Unzulänglichkeit der quasistatischen Gezeitentheorie, wie schon in **122** auseinandergesetzt.

145. Inkompressibilität: Wellen am Pol in einer Schicht gleichmäßiger Dicke. Nachdem wir in den beiden vorhergehenden Abschnitten die Einwirkung der horizontalen Komponente der Erddrehung für sich untersucht haben, betrachten wir jetzt eine Bewegung, wo nur die vertikale Komponente der Erddrehung eingreifen kann. Dies läßt sich am Pol realisieren. Mit der c-Achse vertikal nach oben wird dann: $\Omega_a = \Omega_b = 0$, $\Omega_c = \Omega$. Wie im vorigen Abschnitt ersieht man, daß eine ursprünglich in einer vertikalen ac-Ebene enthaltene Wellenbewegung auch hier durch die Einwirkung der Corioliskraft dreidimensional wird. Der Einfachheit halber wählen wir die Bewegung von der b-Koordinate unabhängig, so daß die Störungsgleichungen **142** (3) und (4) lauten:

$$(1)\qquad \begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp + gz) = 0, \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} = 0, \\ \ddot{z} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp + gz) = 0, \\ \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} = 0. \end{cases}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= A\,e^{\lambda c}\cos(\mu a - \nu t), \\ y &= B\,e^{\lambda c}\sin(\mu a - \nu t), \\ z &= C\,e^{\lambda c}\sin(\mu a - \nu t), \\ Sp &= D\,e^{\lambda c}\sin(\mu a - \nu t) \end{aligned}$$

findet man dann die folgenden Relationen zwischen den Konstanten:

$$(3)\quad \lambda = \pm\,\text{[illegible]} \qquad B = \frac{2\Omega}{\nu}A, \quad C = \frac{\mu}{\lambda}A, \quad D = \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\nu^2}{\lambda} - g\right)A.$$

Daß im Ausdruck für λ die Wurzel im Nenner statt wie in **144** (3) im Zähler auftritt, kommt daher, daß beim Übergang vom Äquator zum Pol die b-Achse, die am Äquator horizontal und parallel der Erdachse war, am Pol durch die c-Achse ersetzt wird, die vertikal und parallel der Erdachse ist.

Für reelles λ, d. h. $\nu^2 > 4\Omega^2$, ergibt sich also bei verschwindender Vertikalbewegung am starren Boden $c = c_0$ die *nichtzellulare* Lösung:

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
x &= A \cosh\lambda(c - c_0)\cos(\mu a - \nu t)\,,\\
y &= \frac{2\Omega}{\nu} A \cosh\lambda(c - c_0)\sin(\mu a - \nu t)\,,\\
z &= \frac{\mu}{\lambda} A \sinh\lambda(c - c_0)\sin(\mu a - \nu t)\,,\\
Sp &= \frac{\mu}{\lambda} A\left[\frac{\nu^2}{\lambda}\cosh\lambda(c - c_0) - g\sinh\lambda(c - c_0)\right]\sin(\mu a - \nu t)\,.
\end{aligned}
$$

Wenn λ imaginär wird, d. h. $\nu^2 < 4\Omega^2$, setzen wir $\lambda = i\bar{\lambda}$, wo $\bar{\lambda}$ reell ist, und erhalten die *zellulare* Lösung:

$$
(4')\qquad
\begin{aligned}
x &= A \cos\bar{\lambda}(c - c_0)\cos(\mu a - \nu t)\,,\\
y &= \frac{2\Omega}{\nu} A \cos\bar{\lambda}(c - c_0)\sin(\mu a - \nu t)\,,\\
z &= \frac{\mu}{\bar{\lambda}} A \sin\bar{\lambda}(c - c_0)\sin(\mu a - \nu t)\,,\\
Sp &= -\frac{\mu}{\bar{\lambda}} A\left[\frac{\nu^2}{\bar{\lambda}}\cos\bar{\lambda}(c - c_0) + g\sin\bar{\lambda}(c - c_0)\right]\sin(\mu a - \nu t)\,,
\end{aligned}
$$

mit den solidifiierbaren Horizontalebenen $c - c_0 = n\,\pi/\bar{\lambda}$ und mit dem Verhältnis

$$
(5)\qquad \frac{L_c}{L_a} = \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\nu^2} - 1}
$$

zwischen der doppelten Zellenhöhe L_c und der Wellenlänge L_a, eine Formel, die man nach dem Vorbild von **144** (9′) auch als eine Formel für Schwingungsdauern schreiben kann:

$$
(5')\qquad T = \tfrac{1}{2} T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L_c}{L_a}\right)^2}\,,
$$

wo jetzt T_0 den Sterntag bedeutet.

Für $\nu^2 = 4\Omega^2$ wird λ unendlich, und man erhält aus (4) oder (4′) durch Einführung einer neuen Integrationskonstanten:

$$
(6)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
x &= A_0 \cos 2\Omega t\,,\\
y &= -A_0 \sin 2\Omega t\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Dies ist die *reine Trägheitsbewegung*: alle Teilchen laufen in gleicher Phase in gleich großen Kreisen antizyklonisch herum; die Stromlinien

sind parallele Geraden, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit 2Ω drehen. Diese Trägheitsbewegung tritt also als Übergangsform zwischen der nichtzellularen Wellenbewegung (4) und der zellularen (4′) auf.

Die Bahnen der Teilchen sind in beiden Fällen (4) und (4′) Ellipsen mit einer horizontalen Achse parallel der Fortpflanzungsrichtung (die „Longitudinalachse“) und einer geneigten Achse senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung (die „Transversalachse“):

$$(7) \qquad \frac{x^2}{\cosh^2\lambda(c-c_0)} + \frac{y^2+z^2}{\sinh^2\lambda(c-c_0)+\frac{4\Omega^2}{\nu^2}} = A^2,$$

$$(7') \qquad \frac{}{\cos^2\bar{\lambda}(c-c_0)} + \frac{y^2+z^2}{\frac{4\Omega^2}{} - \sin^2\lambda(c-c_0)} \qquad A^2.$$

Die Longitudinalachse ist die größere, wenn $\nu^2 > 4\Omega^2$, d. h. bei den nichtzellularen Wellen; die Transversalachse ist dagegen die größere, wenn $\nu^2 < 4\Omega^2$, d. h. bei den zellularen Wellen. Im Übergangsfall mit der Trägheitsfrequenz $\nu^2 = 4\Omega^2$, d. h. mit der Periode von 12 Stunden, wird die Bahn kreisförmig, und man erhält wieder die reine Trägheitsbewegung (6).

Was weiter über die Lagen der Orbitalellipsen im Raume zu sagen ist, wird aus der Untersuchung der Stromlinien hervorgehen. Wenn man die Lösungen (4) und (4′) in die Gleichung der Stromlinien **144** (6) einsetzt, sind die Variablen sogleich separierbar, so daß man unmittelbar integrable Gleichungen erhält. Für die Projektion der Stromlinien auf die vertikale ac-Ebene findet man:

$$(8) \qquad \sinh\lambda(c-c_0)\sin(\mu a - \nu t) = K,$$

$$(8') \qquad \sin\bar{\lambda}(c-c_0)\sin(\mu a - \nu t) = K.$$

Sie sind bei den nichtzellularen Wellen von demselben konkav-parabolischen Typus wie bei verschwindender Erddrehung, bei den zellularen Wellen dagegen vom elliptischen Typus. Ferner findet man für die Projektion der Stromlinien auf die horizontale ab-Ebene *in beiden Fällen denselben Ausdruck*:

$$(9) \qquad e^{\frac{\mu\nu}{2\Omega}b}\sin(\mu a - \nu t) = K_1.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form, welche (8) für unendliche Tiefe annimmt, wenn man gleichzeitig b mit c vertauscht.

Bei vorhandener Erddrehung ist die Horizontalprojektion der Stromlinien von derselben konkav-parabolischen Form wie die bekannten Stromlinien in einer Vertikalebene, die man bei verschwindender Erddrehung und unendlicher Tiefe hat.

Dieses Resultat, vorläufig nur für den Pol bewiesen, bestätigt eine Voraussetzung, die unseren elementaren Überlegungen zur Zyklonen-

theorie [Abschnitte **139 (I)—(III)**] zugrunde lag: die Voraussetzung nämlich, daß die durch Grenzflächenbedingungen oder Erddrehung geneigt oder horizontal umgelegten Stromlinien einen ähnlichen Verlauf haben müßten wie die Stromlinien in einer Vertikalebene bei den einfachen Schwerewellen. Wie wir sehen, geht die Übereinstimmung sogar so weit, daß die Stromlinien in der Horizontalebene mathematisch derselben Form wie in der Vertikalebene sind.

Mit Hilfe der letzten Gleichung kann a aus den Gleichungen (8) und (8′) eliminiert werden, und man erhält die Projektion der Stromlinien auf die bc-Ebene:

$$e^{-\frac{\mu\nu}{2\Omega}b}\sinh\lambda(c-c_0)=\frac{K}{K_1},\tag{10}$$

$$e^{-\frac{\mu\nu}{2\Omega}b}\sin\bar{\lambda}(c-c_0)=\frac{K}{K_1}.\tag{10′}$$

Diese Gleichungen definieren von der Zeit unabhängige Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel zur Fortpflanzungsrichtung. Auf diesen Zylinderflächen liegen sowohl die räumlichen Stromlinien (8) oder (8′) wie die Orbitalellipsen (7) oder (7′). Die Diskussion dieser Zylinderflächen zeigt deshalb sehr anschaulich, in welcher Weise die Erddrehung die Wellenbewegung umformt. Die Abb. 82a gibt die Profilkurven (8) dieser Zylinderflächen bei der nichtzellularen Bewegung, Abb. 82b ihre Profilkurven bei der zellularen Bewegung, wobei überall μ als Parameter dient.

Bei so großen Werten von μ, d. h. bei so kurzen Wellenlängen und Perioden, daß sich die Wirkung der Erddrehung nicht bemerkbar macht, ist die Zylinderfläche Abb. 82a in zwei Ebenen entartet: die eine ist die Vertikalebene in der Fortpflanzungsrichtung, die andere der horizontale Boden. Die Vertikalebene enthält die bekannten Stromlinien und Orbitalellipsen, und der horizontale Boden enthält gerade Stromlinien in der Fortpflanzungsrichtung und Orbitalellipsen, die zu geraden Linienelementen entartet sind. Sobald sich aber bei hinlänglich großen Wellenlängen oder Perioden die Erddrehung geltend macht, gehen die beiden zusammengehörigen Ebenen in eine stetig gekrümmte Zylinderfläche über, in der jetzt die Stromlinien und Orbitalellipsen liegen. Je länger die Perioden werden, um so flacher werden diese Zylinderflächen. Ihr Neigungswinkel θ zu der Horizontalebene ist durch die Formel

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\mu\nu}{2\Omega\lambda}\operatorname{tgh}\lambda(c-c_0)\tag{11}$$

gegeben. Sie zeigt, daß die Zylinderflächen nach unten asymptotisch zu dem horizontalen Boden, und nach oben zu der geneigten Ebene

$$b\sqrt{\frac{\nu^2}{4\Omega^2}-1}=\text{konst.}$$

verlaufen.

Bei der Trägheitsperiode, wenn $\nu = 2\Omega$ und $\mu = 0$, d. h. wenn die Wellenlänge unendlich ist, wird diese asymptotische Ebene horizontal und fällt mit der in eine Horizontalebene entarteten Zylinderfläche zusammen. Diese Horizontalebene wird durch die obere horizontale Gerade $\mu = 0$ der Abb. 82a dargestellt und durch die in der Mitte der Abbildung auftretende horizontale Gerade $\mu = 0$ in der Abb. 82b. Wenn man von den zellularen Wellen herkommt, tritt die Trägheitsbewegung als eine Bewegung in unendlich flachen Zellen auf. In dem jetzt vorliegenden Fall am Pol kann die reine Trägheitsbewegung als Horizontalbewegung zu ungestörter Entwicklung kommen, im Gegensatz zu dem Fall am Äquator, wo man als Übergangsform die mehr zusammengesetzte dreidimensionale Bewegung **144** (4′) erhält.

Überschreitet man die Trägheitsperiode, so entwickeln sich aus der horizontalen Ebene $\mu = 0$ die gefalteten Zylinderflächen Abb. 82b, deren Neigungswinkel θ durch die Formel

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\mu\nu}{2\Omega\bar{\lambda}} \operatorname{tg}\bar{\lambda}(c - c_0) \tag{11′}$$

gegeben ist. Die Flächen verlaufen, wie man sieht, asymptotisch sowohl zu der oberen wie zu der unteren Horizontalwand der Zelle (die Zellen haben quer zu der Fortpflanzungsrichtung unendliche Breite). Die Wellenlänge wird wieder endlich, und *mit zunehmender Periode hat man bei konstanter Zellenhöhe abnehmende Wellenlängen.* Gleichzeitig ersieht man aus (5), daß *bei zunehmender Periode das Verhältnis L_c/L_a der doppelten Zellenhöhe zur Wellenlänge zunimmt.*

Da senkrecht zu den Zylinderflächen keine Bewegung stattfindet, können wir eine beliebige derselben solidifiieren, ohne daß dadurch die Bewegung modifiziert wird. Dies gibt Wellenbewegungen in begrenzten Räumen, entsprechend der Begrenzung durch vertikale Wände in der Stromrichtung, die man einführen kann, wenn sich keine Wirkung der Erddrehung geltend macht. Dabei bekommt man im nichtzellularen Fall eine Lösung, die eine Fortpflanzung der Wellen längs einer geneigten Küste darstellt: eine der Kurven der Abb. 82 gibt das Profil der Küste, *und die Wellenbewegung verläuft überall in Zylinderflächen von der gleichen Form wie die Küste.*

Außer einer starren Grenzfläche kann man auch eine freie Oberfläche einlegen, z. B. im Niveau $c = c_1$. Aus dem Verschwinden des Störungsdruckes in diesem Niveau ergibt sich dann die folgende Frequenzengleichung:

$$\nu^2 \sqrt{1 - \frac{4\Omega^2}{\nu^2}} = \mu g \operatorname{tgh}\lambda(c_1 - c_0)\,, \tag{12}$$

$$\nu^2 \sqrt{\frac{4\Omega^2}{\nu^2} - 1} = -\mu g \operatorname{tg}\bar{\lambda}(c_1 - c_0)\,. \tag{12′}$$

Bei sehr großer Schichtmächtigkeit geht der hyperbolische Tangens in (12) gegen 1, und man erhält durch Quadrieren:

(12a) $$\nu^2(\nu^2 - 4\Omega^2) = \mu^2 g^2.$$

Bei sehr kleiner Schichtmächtigkeit kann der hyperbolische Tangens durch sein Argument ersetzt werden, und die Frequenzengleichung reduziert sich auf:

(12b) $$\nu^2 = 4\Omega^2 + \mu^2 g(c_1 - c_0)$$

Bei kleinen Perioden gibt dies die LAGRANGEsche Formel, und die Wellen reduzieren sich auf reine Schwerewellen. Bei verschwindender Schichtdicke ergibt sich der Grenzwert $\nu^2 = 4\Omega^2$, also die Frequenz des Trägheitsumlaufes, und es liegt eine von der Schwere unbeeinflußte Trägheitsbewegung vor.

Aus der Frequenzengleichung (12′) der Zellularwellen ersieht man, daß das Argument des Tangens im zweiten Quadranten liegt, daß also die freie Oberfläche sich in der oberen Hälfte einer Zelle befindet, und zwar, wie es sich zeigt, sehr nahe an der oberen Horizontalwand der Zelle.

Außer der Grundschwingung gehören noch zu jeder Schichthöhe und Wellenlänge unendlich viele andere Frequenzen, den Oberschwingungen entsprechend, wobei das Argument des Tangens im vierten, sechsten, . . . Quadranten liegt.

Bei sehr großer Schichtmächtigkeit muß $\bar{\lambda}$ gegen Null gehen, wenn das Argument im zweiten Quadranten bleiben soll, und dies gibt entweder $\mu = 0$ für beliebiges ν oder $\nu = 0$ für beliebiges μ. Bei verschwindender Schichtmächtigkeit muß auf der anderen Seite $\bar{\lambda}$ gegen unendlich gehen, was $\nu^2 = 4\Omega^2$ ergibt.

Wenn man hier die Frequenzengleichung (12) und (12′) im ersten Quadranten einer $\mu\nu$-Ebene mit der Schichthöhe $h = c_1 - c_0$ als Parameter einzeichnet, so erhält man eine Kurvenschar durch den Punkt $\nu = 2\Omega$ auf der Ordinatenachse (Abb. 81 a), und zwar gehen alle Kurven der nichtzellularen Wellenbewegung mit ständig wachsenden Ordinaten gegen $\mu = \infty$ und alle Kurven der zellularen Wellenbewegung mit ständig abnehmenden Ordinaten gegen $\mu = \infty$. Für unendliche Schichthöhe hat man die der Gleichung (12a) entsprechende Kurve, und ihre Fortsetzung ins Gebiet der Zellularwellen ist, wie schon oben gezeigt, durch die Ordinatenachse nach dem Ursprung und die positive Abszissenachse gegeben. Bei verschwindender Tiefe ergibt sich ferner in den beiden Fällen die Gerade $\nu = 2\Omega$. Zwischen diesen Grenzkurven für die Schichthöhe Unendlich und Null liegen Kurven für alle anderen Höhen. Für kleine Perioden haben die Kurven angenähert denselben

Verlauf wie bei verschwindender Erddrehung. Bei zunehmenden Wellenlängen nimmt auch die Periode zu, aber langsamer als bei verschwindender Erddrehung, so daß man für unendliche Wellenlänge, d. h. $\mu = 0$, nicht eine unendliche Periode, sondern den halben Sterntag als Periode erhält. Entsprechend wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich, und jeder Phasenunterschied verschwindet. Da die Vertikalgeschwindigkeit gleichzeitig Null wird, kann weder Druck noch Schwerkraft bei dieser reinen Trägheitsbewegung eingreifen.

Abb. 81. Frequenzengleichung für Wellen am Pol.

Unterhalb der Trägheitsgeraden $\nu = 2\Omega$ erhält man die Frequenzenkurven der zellularen Wellen, deren Periode somit die halbe Umlaufszeit in der Grundbewegung übersteigt, wie es bei den Trägheitswellen immer der Fall ist. Für mäßige Werte der Schichtmächtigkeit verlaufen die Kurven sehr nahe der Trägheitsgeraden; um eine übersichtlichere Darstellung zu erhalten, sind sie deshalb in einem anderen Maßstabe in der Abb. 81b eingezeichnet worden.

Jeder Wellenlänge entsprechen somit zwei verschiedene positive Frequenzen, im Gegensatz zu den Verhältnissen am Äquator, wo sich nur eine einzige positive Frequenz ergab. In einer Schicht von gegebener Mächtigkeit können hier langsame Schwingungen ($\nu < 2\Omega$) von beliebiger Wellenlänge auftreten, während die langsamen Schwingungen am Äquator notwendig mit großen Wellenlängen von der Größenordnung des Erdumfanges verbunden waren, jedenfalls bei nicht außerordentlich dünnen Schichten.

Mit Hilfe des Frequenzendiagrammes Abb. 81a kann man die Gleichung (10) bei einer gegebenen Schichtmächtigkeit in einer bc-Ebene mit μ als Parameter graphisch wiedergeben, wodurch sich die Abb. 82a ergibt, auf die wir schon oben in anderem Zusammenhange hingewiesen haben. Dabei ist die Schichthöhe gleich 10000 m und die Konstante K/K_1 gleich $\sinh(\lambda\,.\,10^4)$ gewählt worden.

Abb. 82b gibt in entsprechender Weise die Profile der Stromflächen bei den zellularen Wellen innerhalb einer Zelle von 10000 m Höhe.

In (10′) hat man dann $\bar{\lambda} = \pi \cdot 10^{-4}$ eingeführt; nach (3) ergibt sich also für ν der Wert $\frac{2\Omega\bar{\lambda}}{\sqrt{\mu^2+\bar{\lambda}^2}}$. Es ist ferner K/K_1 gleich 1 gewählt worden.

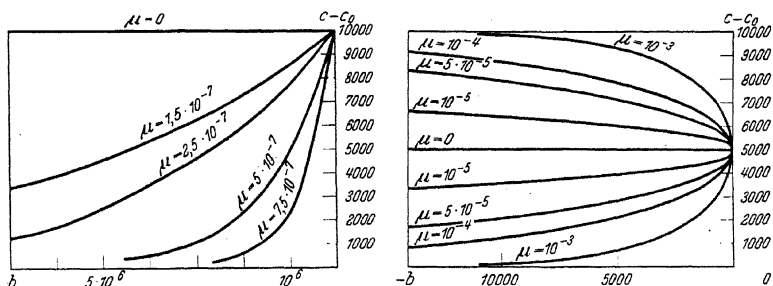



Abb. 82. Solidifiierbare Stromflächen bei Wellen am Pol.

146. Inkompressibilität: Wellen am Pol mit solidifiierter Stromfläche als Grenzfläche. Wir haben somit die Wellenbewegung in einer Schicht gleichmäßiger Dicke behandelt. Für die Zyklonentheorie ist es aber nach unseren elementaren Überlegungen grundlegend, Wellenbewegungen in keilförmigen Schichten zu studieren. Diesem Falle entsprechende formale Lösungen, sowohl für die äußere Welle in einer einzigen Schicht wie für die innere Welle an der Grenzfläche zweier Schichten, lassen sich ermitteln, nämlich in der Form einer unendlichen Summe von Besselfunktionen. Die Diskussion der entsprechenden Frequenzengleichung ist aber äußerst verwickelt, und wir werden aus diesem Grunde im folgenden auf die Verwertung dieser Lösung verzichten[1].

Durch den schon in **141** erwähnten Kunstgriff können wir aber partikuläre Lösungen erzielen, bei denen die Keilform auftritt, nämlich durch Solidifikation passender, von der Zeit unabhängiger Stromflächen, welche die freie Oberfläche oder die innere Diskontinuitätsfläche schneiden. Allerdings sind die Lösungen, die man in dieser Weise erzielt, einerseits recht speziell, und andererseits kann der Verlauf der solidifiierten Stromfläche in größerem Abstande von dem Keil ein solcher sein, daß ein Raum von recht bizarrer Begrenzung entsteht. Dennoch kann man, durch systematische Ausnutzung der Methode, sehr nützliche Resultate erzielen; man findet in elementarer Form Darstellungen wirklich möglicher Bewegungen, unter Bedingungen, die schließlich denen des Zyklonenproblems auffällig nahe kommen.

[1] SOLBERG, H.: Integrationen der atmosphärischen Störungsgleichungen. Geof. Publ. Vol. V, No. 9, Oslo, 1928.

Wir geben hier ein erstes Beispiel der Anwendung dieser Methode.

Wenn man in den Frequenzengleichungen **145** (12) und (12′) mit Hilfe von **145** (11) und (11′) den Winkel θ_1 zwischen den solidifiierbaren Stromflächen und der ungestörten freien Oberfläche als Parameter an Stelle von $c_1 - c_0$ einführt, so vereinfachen sich diese beiden Gleichungen auf eine und dieselbe Gleichung:

$$\nu(\nu^2 - 4\Omega^2) = 2\Omega\mu g \operatorname{tg}\theta_1 . \tag{1}$$

Solidifiiert man eine Stromfläche entsprechend einer gegebenen Tiefe $c_1 - c_0$ und einem gegebenen Neigungswinkel θ_1 an der Oberfläche, so erhält man ein bestimmtes Profil einer Küste, längs der sich nach (1) und **145** (11) und (11′) Wellen mit einem ganz bestimmten Wert von Frequenz, Wellenlänge und Fortpflanzungssinn fortpflanzen können. Zu einer gegebenen Wellenlänge und einem gegebenen Neigungswinkel θ_1 kann man umgekehrt einen bestimmten Wert der Frequenz und des Parameters $c_1 - c_0$ finden. Wenn θ_1 im ersten Quadranten liegt, muß die linke Seite von (1) positiv sein; liegt θ_1 im zweiten Quadranten, muß die linke Seite von (1) negativ sein. In beiden Fällen ergibt sich die folgende wichtige Regel: *Die nichtzellularen Wellen pflanzen sich mit der schrägen Küste zu linken, die zellularen Wellen* (reelles ν) *pflanzen sich mit der schrägen Küste zu rechten fort.*

Die Gleichung (1) hat entweder drei reelle Wurzeln oder eine reelle und zwei konjugiert-komplexe. Der überall reellen Wurzel entspricht eine stabile, nichtzellulare Wellenbewegung mit einseitiger Fortpflanzungsrichtung, wie eben gezeigt. Bei zunehmender Wellenlänge nimmt die Wellenperiode zu und wird schließlich bei unendlich langen Wellen der Trägheitsperiode von einem halben Sterntag $\frac{1}{2}T_0$ gleich. Den beiden anderen Wurzeln entsprechen Wellen vom entgegengesetzten, also ebenfalls einseitigen Fortpflanzungssinn. Für lange Wellen sind sie stabil, dabei ist die eine Periode immer größer als $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,T_0 = 20{,}8$ Sternstunden, die andere liegt zwischen 12 und 20,8 Sternstunden. Bei abnehmender Wellenlänge nähern sich diese Perioden einander, bis sie zusammenfallen bei der Wellenlänge:

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{4\,\Omega^2}\, g\,|\operatorname{tg}\theta_1| , \tag{2}$$

entsprechend der Periode $T = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,T_0$. Für noch kleinere Wellenlängen werden die Wurzeln konjugiert-komplex und die Wellen werden instabil. Diese instabilen Wellen haben abnehmende Perioden bei abnehmenden Wellenlängen.

Bei der Wellenlänge $L = \pi g\,|\operatorname{tg}\theta_1|/(12\Omega^2)$ erhält man die Trägheitsperiode, und für noch kleinere Wellenlängen kommt man wieder in das nichtzellulare Gebiet, wo nach Null abnehmende Wellenlängen mit nach Null abnehmenden Perioden verbunden sind.

Es muß hervorgehoben werden, daß sich diese Resultate auf Wellenbewegungen recht spezieller Natur beziehen, wo ganz bestimmte Beziehungen zwischen Küstenprofil, Meerestiefe und Wellenlänge vorausgesetzt sind. Bei den zellularen Wellen handelt es sich um ein ganz bizarres Küstenprofil (vgl. Abb. 82b), wo das Meer rechts der gefalteten Kurve liegen soll, während die untere Asymptote den Meeresboden darstellt. Es wird deshalb sehr wünschenswert sein, allgemeinere Lösungen zu gewinnen. Die partikuläre Lösung hat aber zunächst eine fundamentale Tatsache hervortreten lassen: *infolge der Erddrehung kann sich ein einseitiger Fortpflanzungssinn der Wellen einstellen.* Außerdem kann, wie es scheint, ebenfalls als Folge der Erddrehung, auch Instabilität aufkommen, eine Erscheinung, die es wichtig sein wird, später weiter zu verfolgen.

147. Inkompressibilität: Wellen bei beliebiger Breite. In den vorigen Abschnitten haben wir gesondert die Einwirkung der horizontalen und der vertikalen Erddrehungskomponente auf Schwerewellen kennengelernt. Die horizontale Komponente war ohne wesentlichen Einfluß auf solche Wellen, deren Wellenlänge nicht größer als der Erdumfang ist. Der Einfluß der vertikalen Komponente war bei kleinen Perioden gering, bei zunehmender Periode aber von zunehmender Bedeutung, bis sich die Trägheitsperiode einstellt. Dann stellt sich aber ein wesentlich neuer Wellentypus von zellularem Charakter ein, dessen Periode immer größer als der halbe Sterntag ist, und dessen Wellenlänge bei zunehmender Periode abnimmt.

Wir gehen nun zur Betrachtung des allgemeinen Falles über, wo alle drei Komponenten der Erddrehung gleichzeitig vorkommen. Die Störungsgleichungen sind dann:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\ddot{x} + 2\Omega_b \dot{z} - 2\Omega_c \dot{y} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp + gz) = 0\,, \\ &\ddot{y} + 2\Omega_c \dot{x} - 2\Omega_a \dot{z} = 0\,, \\ &\ddot{z} + 2\Omega_a \dot{y} - 2\Omega_b \dot{x} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp + gz) = 0\,, \\ &\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} = 0\,. \end{aligned}$$

Der gewöhnliche Lösungsansatz erweist sich in diesem Falle insofern als unzureichend, als die trigonometrischen Faktoren nicht herausfallen. Wir wählen deshalb den allgemeineren exponentiellen Ausdruck:

$$(2)\quad \begin{aligned} x &= A\, e^{\lambda c + i(\mu a - \nu t)}\,, \\ y &= B\, e^{\lambda c + i(\mu a - \nu t)}\,, \\ z &= C\, e^{\lambda c + i(\mu a - \nu t)}\,, \\ Sp &= D\, e^{\lambda c + i(\mu a - \nu t)}\,. \end{aligned}$$

Beim Einsetzen in die Störungsgleichungen fällt dann der Exponentialfaktor heraus, und die Determinantengleichung des linearen homogenen Systems gibt die folgende Relation zwischen den Wellenparametern:

$$\nu^2[\nu^2(\mu^2 - \lambda^2) + (2\Omega_a i\mu + 2\Omega_c\lambda)^2] = 0\,.$$

Wenn man die uninteressante Lösung $\nu = 0$ fortläßt, so gibt dies zwei Wurzeln λ, die wir folgendermaßen schreiben:

$$(3)\qquad \lambda = \pm\lambda_1 + i\lambda_2\,,\quad \text{wo}\quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\mu\nu\sqrt{\nu^2 - 4\Omega_a^2 - 4\Omega_c^2}}{\nu^2 - 4\Omega_c^2} \\ \lambda_2 = \dfrac{4\Omega_a\Omega_c\mu}{\nu^2 - 4\Omega_c^2}\,. \end{cases}$$

Mit diesen Werten von λ ergibt sich für die Amplituden, durch C ausgedrückt:

$$(4)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{-4\Omega_a\Omega_c \pm i\nu\sqrt{\nu^2 - 4\Omega_a^2 - 4\Omega_c^2}}{\nu^2 - 4\Omega_c^2}\,C\,, \\ B = \dfrac{2\Omega_a i\nu \pm 2\Omega_c\sqrt{\nu^2 - 4\Omega_a^2 - 4\Omega_c^2}}{\nu^2 - 4\Omega_c^2}\,C\,, \\ D = \left(-g + 2\Omega_b\dfrac{\nu}{\mu} \pm \dfrac{\nu}{\mu}\sqrt{\nu^2 - 4\Omega_a^2 - 4\Omega_c^2}\right)C\,. \end{cases}$$

Wir erhalten also zwei partikuläre Lösungen der Form (2), und das allgemeine Integral ist durch eine lineare Kombination derselben mit zwei Konstanten C_1 und C_2 gegeben. Das Verschwinden der Vertikalamplitude an der starren Grenzfläche $c = c_0$ gibt dann: $C_1 e^{\lambda_1 c_0} + C_2 e^{-\lambda_1 c_0} = 0$. Wählt man deshalb $C_1 = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda_1}C_0 e^{-\lambda_1 c_0}$ und $C_2 = -\frac{1}{2}\frac{\mu}{\lambda_1}C_0 e^{\lambda_1 c_0}$, so lassen sich die Integrale für den Fall $\lambda_1^2 > 0$, d. h. $\nu^2 > 4\Omega_a^2 + 4\Omega_c^2$ in der folgenden Form schreiben:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = C_0 i\left\{\cosh\lambda_1(c-c_0) + \dfrac{4\Omega_a\Omega_c i}{\nu\sqrt{\nu^2 - 4\Omega_a^2 - 4\Omega_c^2}}\sinh\lambda_1(c-c_0)\right\}e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}\,, \\ y = C_0\left\{\dfrac{2\Omega_c}{\nu}\cosh\lambda_1(c-c_0) + \dfrac{2\Omega_a i}{\sqrt{\nu^2 - 4\Omega_a^2 - 4\Omega_c^2}}\sinh\lambda_1(c-c_0)\right\}e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}\,, \\ z = \dfrac{\mu}{\lambda_1}C_0\sinh\lambda_1(c-c_0)\,e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}\,, \\ Sp = C_0\left\{\dfrac{\nu^2 - 4\Omega_c^2}{\mu}\cosh\lambda_1(c-c_0) - (\mu g - 2\Omega_b\nu)\dfrac{1}{\lambda_1}\sinh\lambda_1(c-c_0)\right\}e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}\,. \end{cases}$$

Für $\lambda_1 = 0$, d. h. $\nu^2 = 4\Omega_a^2 + 4\Omega_c^2$ ergibt sich hieraus:

$$(5')\qquad \begin{cases} x = C_0 i\left\{1 + \dfrac{4\Omega_a\Omega_c i}{\nu^2 - 4\Omega_c^2}\mu(c-c_0)\right\}e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}\,, \\ y = C_0\left\{\dfrac{2\Omega_c}{\nu} + \dfrac{2\Omega_a\mu\nu i}{\nu^2 - 4\Omega_c^2}(c-c_0)\right\}e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}\,, \\ z = C_0\mu(c-c_0)\,e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}\,, \\ Sp = C_0\left\{\dfrac{\nu^2 - 4\Omega_c^2}{\mu} - (\mu g - 2\Omega_b\nu)(c-c_0)\right\}e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}\,. \end{cases}$$

Wenn schließlich $\lambda_1^2 < 0$ ist, d. h. $\nu^2 < 4\Omega_a^2 + 4\Omega_c^2$, so setzen wir $\lambda_1 = i\bar{\lambda}_1$, wo $\bar{\lambda}_1$ reell ist, und erhalten:

$$
(5'') \quad
\begin{aligned}
x &= C_0 i \left\{ \cos\bar{\lambda}_1 (c - c_0) + \frac{4\,\Omega_a \Omega_c i}{\nu\sqrt{4\,\Omega_a^2 + 4\,\Omega_c^2 - \nu^2}} \sin\bar{\lambda}_1 (c - c_0) \right\} e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}, \\
y &= C_0 \left\{ \frac{2\,\Omega_c}{\nu} \cos\bar{\lambda}_1 (c - c_0) + \frac{2\,\Omega_a i}{\sqrt{4\,\Omega_a^2 + 4\,\Omega_c^2 - \nu^2}} \sin\bar{\lambda}_1 (c - c_0) \right\} e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)} \\
z &= \frac{\mu}{\bar{\lambda}_1} C_0 \sin\bar{\lambda}_1 (c - c_0)\, e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}, \\
Sp &= C_0 \left\{ \frac{\nu^2 - 4\,\Omega_c^2}{\mu} \cos\bar{\lambda}_1 (c - c_0) - (\mu g - 2\Omega_b \nu)\, \frac{1}{\bar{\lambda}_1} \sin\bar{\lambda}_1 (c - c_0) \right\} e^{i(\mu a + \lambda_2 c - \nu t)}.
\end{aligned}
$$

Wie gewöhnlich hat man den reellen oder den imaginären Teil dieser Ausdrücke fortzulassen, um eine Lösung von physikalischer Realität zu erhalten.

Da die Phase dieser Wellenstörung durch den in a und c linearen Ausdruck

$$
(6) \qquad \mu a + \lambda_2 c = \mu \left(a + \frac{4\,\Omega_a \Omega_c}{\nu^2 - 4\,\Omega_c^2} c \right)
$$

gegeben ist, so pflanzt sich die Welle längs der Geraden

$$
(7) \qquad a - \frac{\nu^2 - 4\,\Omega_c^2}{4\,\Omega_a \Omega_c} c = \text{konst.}
$$

fort, die, je nach den Werten der Verhältnisse $2\Omega_a/\nu$ und $2\Omega_c/\nu$, einen beliebigen Winkel mit der Horizontalen bildet. *Wenn die Erddrehungskomponenten Ω_a und Ω_c gleichzeitig auftreten, kann man folglich keine Wellenfortpflanzung der elementaren, einfach-harmonischen Form* (5) *längs der Erdoberfläche erhalten.*

Wegen der Superpositionseigenschaft der Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems stellt aber auch eine unendliche Summe solcher Elementarintegrale eine Lösung dar, wobei die Summation über alle möglichen Werte der Wellenparameter C_0, μ, ν auszuführen ist. In dieser Weise würde man zwar eine Welle erhalten, die sich längs der Erdoberfläche fortpflanzt; sie würde aber eine zeitlich veränderliche Konfiguration aufweisen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns jedoch hier, wie auch sonst überall, auf die Betrachtung von Wellen permanenten Charakters, die aber nach dem Obigen eine meist nicht-horizontale Fortpflanzungsrichtung haben.

Es soll hier nicht auf die Frage eingegangen werden, inwieweit dies in den gemachten Vereinfachungen des Problems bedingt ist oder nicht; es scheint in der Tat möglich, daß man bei der Behandlung des nicht-ebenen Problems, auf einer Kugel oder einem Ellipsoid, permanente Wellen vom einfach-harmonischen Typus erhalten kann, die sich längs der Oberfläche fortpflanzen.

Für unsere Zwecke ist es nur von geringem Interesse, Wellen zu diskutieren, die sich nicht horizontal fortpflanzen, oder solche Zellularwellen näher zu untersuchen, die parallelepipedische Zellen und je nach der Frequenz verschieden geneigte Wände haben. Wir begnügen uns mit der Untersuchung von horizontal sich fortpflanzenden Wellen, die sich ergeben, wenn die eine oder die andere der Erdrotationskomponenten Ω_c oder Ω_a gleich Null ist. $\Omega_c = 0$ trifft zu für Wellen am Äquator mit beliebiger Fortpflanzungsrichtung und $\Omega_a = 0$ für Wellen in beliebiger Breite, die sich zonal fortpflanzen.

(A) *Wellen beliebiger Fortpflanzungsrichtung am Äquator.* Die horizontale a-Achse, längs der sich die Wellen fortpflanzen, bildet mit dem Äquator einen Winkel, dessen Kosinus durch Ω_b/Ω gegeben ist. Wenn man in den Formeln (5) $\Omega_c = 0$ einsetzt und den imaginären Teil der Integrale fortläßt, so erhält man, mit

$$\lambda = \mu\sqrt{1 - \frac{4\Omega_a^2}{\nu^2}}: \tag{8}$$

$$\begin{aligned} x &= -C_0 \cosh\lambda(c-c_0)\sin(\mu a - \nu t)\,, \\ y &= -\frac{2\Omega_a\mu}{\lambda\nu} C_0 \sinh\lambda(c-c_0)\sin(\mu a - \nu t)\,, \\ z &= \frac{\mu}{\lambda} C_0 \sinh\lambda(c-c_0)\cos(\mu a - \nu t)\,, \\ Sp &= C_0\left[\frac{\nu^2}{\mu}\cosh\lambda(c-c_0) - (\mu g - 2\Omega_b\nu)\frac{1}{\lambda}\sinh\lambda(c-c_0)\right]\cos(\mu a - \nu t)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Hieraus findet man sofort die entsprechenden Lösungen für $\lambda = 0$ und für $\lambda^2 < 0$.

Während der Störungsbewegung (9) beschreiben die Teilchen eine elliptische Bahn

$$\frac{x^2+y^2}{\cosh^2\lambda(c-c_0) - \frac{4\Omega_a^2}{\nu^2}} + \frac{z^2}{\sinh^2\lambda(c-c_0)} = \frac{C_0^2}{1 - \frac{4\Omega_a^2}{\nu^2}} \tag{10}$$

mit vertikaler kleiner Achse und einem überall konstanten Brennpunktabstand $2C_0$. Die horizontale große Achse bildet mit der Fortpflanzungsrichtung einen Winkel ψ, der durch

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\frac{2\Omega_a}{\nu}}{\sqrt{1 - \frac{4\Omega_a^2}{\nu^2}}}\operatorname{tgh}\lambda(c-c_0) \tag{11}$$

gegeben ist. Dieser Winkel ist am Boden gleich Null; hier schwingen die Teilchen in der Fortpflanzungsrichtung, ebenso wie bei verschwindender Erddrehung. Er nimmt ferner nach oben stetig zu und nimmt den größten Wert an der oberen Schichtgrenze an.

Für den Spezialfall, daß die Fortpflanzung längs des Meridians stattfindet, hat man $\Omega_a = \Omega$ und $\Omega_b = 0$ zu setzen. Da nach (8) λ durch Änderung des Vorzeichens von ν ungeändert bleibt, kann man dann in bekannter Weise aus (9) die entsprechenden stehenden Schwingungen bilden. Es ergibt sich also:

$$
\begin{aligned}
x &= -C_0 \cosh\lambda(c-c_0)\sin\mu a\cos\nu t\,,\\
y &= \frac{2\Omega\mu}{\lambda\nu} C_0 \sinh\lambda(c-c_0)\cos\mu a\sin\nu t\,,\\
z &= \frac{\mu}{\lambda} C_0 \sinh\lambda(c-c_0)\cos\mu a\cos\nu t\,,\\
S p &= C_0\left[\frac{\nu}{\mu}\cosh\lambda(c-c_0) - \mu g\frac{1}{\lambda}\sinh\lambda(c-c_0)\right]\cos\mu a\cos\nu t.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Die Lösung (12) stimmt dann, bis auf die belanglose Konstante und die verschiedene Orientierung der horizontalen Koordinatenachsen, mit den gravoid-elastoiden Schwingungen **144** (4) überein.

Bei anderer Fortpflanzungsrichtung sind die Verschiebungskomponenten x, y, z dieselben, nur tritt Ω_a an Stelle von Ω; für die Kinematik der stehenden Schwingungen sei deshalb auf die in **144** gegebene Diskussion verwiesen. Wir wollen nur kurz die durch das Vorhandensein von Ω_b bewirkte Änderung des Störungsdruckes und dadurch der Frequenzengleichung betrachten, die hier von den folgenden Formen ist:

$$\nu^2\sqrt{1-\frac{4\Omega_a^2}{\nu^2}} = (\mu g - 2\Omega_b\nu)\,\mathrm{tgh}\left(\sqrt{1-\frac{4\Omega_a^2}{\nu^2}}\,\mu(c_1-c_0)\right) \tag{13}$$

$$4\Omega_a^2 = (\mu g - 4\Omega_b\Omega_a)\,\mu(c_1-c_0)\,, \tag{13'}$$

$$\nu^2\sqrt{\frac{4\Omega_a^2}{\nu^2}-1} = (\mu g - 2\Omega_b\nu)\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{4\Omega_a^2}{\nu^2}-1}\,\mu(c_1-c_0)\right). \tag{13''}$$

Die Formeln stimmen mit den entsprechenden Formeln **144** (10) bis (10″) überein, wenn man dort Ω durch Ω_a und g durch $g - 2\Omega_b\bar{\omega}$ ersetzt.

Im Spezialfall unendlicher Schichtdicke reduziert sich die Frequenzengleichung (13) auf:

$$\nu^2\sqrt{1-\frac{4\Omega_a}{\nu^2}} = \mu g - 2\Omega_b\nu\,. \tag{13a}$$

Wenn wir diese Gleichung in einer $\mu\nu$-Ebene darstellen, wobei wir nur die Halbebene $\mu > 0$ zu berücksichtigen brauchen, so erhalten wir zwei Kurvenzweige, der eine mit positiven, der andere mit negativen ν. Beide kommen vom Unendlichen her und gehen nach abnehmenden $\mu|\nu|$-Werten, wobei der obere Zweig mit horizontaler Tangente im Punkte $\left(\frac{4\Omega_a\Omega_b}{g},\ 2\Omega_a\right)$ und der untere im Punkte $(0,\ -2\Omega)$ endigt (unter der Annahme $\Omega_b > 0$). Die Fortsetzung der Kurve nach kleineren $|\nu|$-Werten folgt aus der Gleichung (13″). Da die linke Seite dieser Gleichung positiv ist, muß das Argument des Tangens bei der Grund-

schwingung im ersten oder im zweiten Quadranten liegen, je nachdem ob $\mu g - 2\Omega_b \nu \gtrless 0$ ist, d. h. je nachdem ob man sich rechts oder links der Geraden $\mu g - 2\Omega_b \nu = 0$ befindet. An dieser Geraden selbst ist also das Argument gleich $\pi/2$. Bei unendlicher Schichtdicke bleibt nun das Argument nur dann endlich, wenn $\nu^2 = 4\Omega_a^2$ oder $\mu = 0$ ist. Die Verbindung der beiden Kurvenzweige (13a) ist folglich durch die Gerade $\nu = 2\Omega_a$ bis an die Ordinatenachse und durch diese Achse selbst gegeben.

Bei sehr kleiner Schichtdicke ergibt sich aus allen drei Formen der Frequenzengleichung:

(13b) $\nu^2 = (\mu g - 2\Omega_b \nu)\,\mu(c_1 - c_0)$,

also die durch das Vorhandensein von Ω_b modifizierte LAGRANGEsche Formel. Bei verschwindender Schichtdicke erhält man hieraus die Abszissenachse $\nu = 0$.

Zwischen den Grenzkurven für die Schichtdicken Null und Unendlich hat man die Kurven für alle andere Schichtdicken, deren Verlauf jetzt klar ist. Sie fangen im Ursprung an, und ihre Zweige beiderseits der Abszissenachse gehen mit ständig wachsenden Zahlenwerten der Ordinaten nach $\mu = \infty$. In der Abb. 83 sind sie für den Fall $\Omega_a = \Omega_b$ dargestellt.

Abb. 83. Frequenzengleichung für Wellen am Äquator mit beliebiger Fortpflanzungsrichtung ($\Omega_a = \Omega_b$).

Durch Zusammensetzung zweier Wellen (9) mit zum Äquator symmetrischen Fortpflanzungsrichtungen ergeben sich gravoid-elastoide Wellen, die sich längs des Äquators fortpflanzen:

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
x &= \frac{C}{\mu^2+\varkappa^2}\left(\mu \cosh\lambda c - \frac{2\Omega\varkappa^2}{\lambda\nu}\sinh\lambda c\right)\cos\varkappa b\cos(\mu a - \nu t)\,;\\
y &= -\frac{\varkappa C}{\mu^2+\varkappa^2}\left(\cosh\lambda c + \frac{2\Omega\mu}{\lambda\nu}\sinh\lambda c\right)\sin\varkappa b\sin(\mu a - \nu t)\,,\\
z &= \frac{C}{\lambda}\sinh\lambda c\cos\varkappa b\sin(\mu a - \nu t)\,,\\
Sp &= C\left[\frac{\nu^2}{\mu^2+\varkappa^2}\cosh\lambda c + \left(-g + \frac{2\Omega\mu\nu}{\mu^2+\varkappa^2}\right)\frac{1}{\lambda}\sinh\lambda c\right]\cos\varkappa b\sin(\mu a - \nu t)\,,
\end{aligned}
$$

wo:

$$
(15)\quad \lambda^2 = \mu^2 + \varkappa^2\left(1 - \frac{4\Omega^2}{\nu^2}\right).
$$

Diese Wellen stimmen für $g = 0$ mit der Lösung **120** (6) überein, in ähnlicher Weise wie die gravoid-elastoiden Schwingungen **144** (4) mit den Lösungen **118** (7) übereinstimmten. Für $\varkappa = 0$ reduzieren sich

die Wellen (14) auf die zweidimensionalen Wellen **143** (7) und für $\mu = 0$ auf die gravoid-elastoiden Schwingungen **144** (4).

(B) *Zonal sich fortpflanzende Wellen in beliebiger Breite.* Daß sich gerade dieser Fall mit elementaren Hilfsmitteln behandeln läßt, ist für das Zyklonenproblem außerordentlich wichtig; die Zyklonen haben ja durchweg eine mehr oder weniger zonale Fortpflanzungsrichtung.

Für $\Omega_a = 0$ reduziert sich die Störungsbewegung der Formeln (5) und (5″) auf die für den Pol gültigen Lösungen **145** (4) und (4′), nur daß man Ω durch Ω_c und g durch $g - 2\Omega_b \tilde{\omega}$ zu ersetzen hat. Die Kinematik der Wellenbewegung wird deshalb dieselbe wie am Pol. Insbesondere erhält man für den Neigungswinkel zwischen der solidifiierbaren Stromfläche und der Horizontalebene den Ausdruck:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\mu\nu}{2\Omega_c\lambda} \operatorname{tgh}\lambda(c - c_0) = \frac{\mu\nu}{2\Omega_c\bar{\lambda}} \operatorname{tg}\lambda(c - c_0).$$

Beim Übergange von Ω zu Ω_c wird die kritische Frequenz nicht mehr $\nu = 2\Omega$, sondern $\nu = 2\Omega_c$, und entsprechend die kritische Periode nicht gleich dem halben Sterntag von 12 Stunden, sondern gleich dem *halben Pendeltag* (bei 60° Breite 14 Stunden). Bei der kritischen Periode hat man die reine Trägheitsbewegung, bei den kleineren Perioden die nichtzellulare Wellenbewegung und bei den größeren Perioden die zellulare Wellenbewegung. Die Stromlinien und die Orbitalellipsen sind auf Zylinderflächen gelegen, deren Profilkurven beziehungsweise für nichtzellulare und zellulare Bewegung durch die Abb. 82a und b gegeben sind. Die Erzeugenden dieser Zylinderflächen sind Tangenten zu den Parallelen.

Da man wie am Pol eine beliebige dieser Zylinderflächen solidifiieren und ebenfalls eine freie Oberfläche einführen kann, so ergibt sich dieselbe Regel wie am Pol (S. 542), die man hier auch in der folgenden Form aussprechen kann: *Längs der Südküste eines Kontinents pflanzen sich die nichtzellularen Wellen nach Osten und die zellularen* (reelles ν) *nach Westen fort. Längs der Nordküste eines Kontinents pflanzen sich die nichtzellularen Wellen nach Westen und die zellularen nach Osten fort.*

Diese Lösungen werden für die Gezeitentheorie von Bedeutung sein, wenn man sie unter Berücksichtigung der gezeitenerzeugenden Kräfte verallgemeinert. Dabei gibt die zellulare Lösung Perioden länger als den halben Pendeltag, darunter insbesondere die ganztägige Periode.

Wenn man in **145** (12) und (12′) Ω durch Ω_c und g durch $g - 2\Omega_b \tilde{\omega}$ ersetzt, erhält man die folgende Frequenzengleichung:

$$(16) \qquad \nu^2 \sqrt{1 - \frac{4\Omega_c^2}{\nu^2}} = (\mu g - 2\Omega_b \nu) \operatorname{tgh} \frac{\mu(c_1 - c_0)}{\sqrt{1 - \frac{4\Omega_c^2}{\nu^2}}}$$

$$(16') \qquad \nu^2 \sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{\nu^2} - 1} = -(\mu g - 2\Omega_b \nu) \operatorname{tg} \frac{\mu(c_1 - c_0)}{\sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{\nu^2} - 1}}$$

In dem $\mu\nu$-Diagramm befinden sich dann die der Gleichung (16) entsprechenden Frequenzenkurven zur rechten Seite der Geraden $\mu g - 2\Omega_b \nu = 0$, und zwar fängt bei positiven Werten der Erddrehungskomponenten die eine Kurvenschar im Punkte $\left(\frac{4\,\Omega_b\,\Omega_c}{g},\ 2\Omega_c\right)$ an, die andere im Punkte $(0,\ -2\Omega)$. Die Geraden $\nu = \pm 2\Omega_c$ stellen dabei die Frequenzenkurven für verschwindende Schichtdicke dar.

Aus der Gleichung (16′) ersieht man sofort, daß, je nachdem ob man sich links oder rechts der Geraden $\mu g - 2\Omega_b \nu = 0$ befindet, das Argument des Tangens im ersten oder im zweiten Quadranten liegt. Für wachsendes μ nähert sich das Argument sehr bald dem Wert π; entsprechend haben dann die Frequenzenkurven die Form von gleichseitigen Hyperbeln, die um so näher der Abszissenachse liegen, je größer die Schichtdicken sind (Abb. 84 für $\Omega_b = \Omega_c$). Als Grenzkurve für unendliche Schichtdicke hat man die beiden Koordinatenachsen.

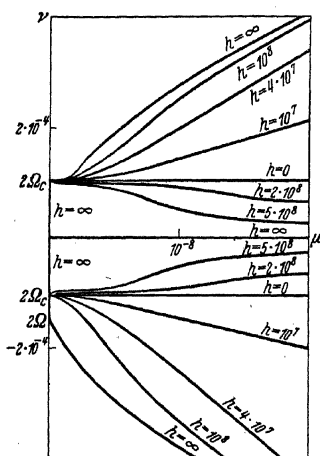



Abb. 84. Frequenzengleichung für zonal sich fortpflanzende Wellen in 45° n. Br.

In demjenigen Quadranten, wo $\Omega_b \nu < 0$ ist, bewirkt das Vorhandensein von Ω_b nur ganz kleine Änderungen in dem Verlauf der Frequenzenkurven der Abb. 81. Anders aber in dem Quadranten, wo $\Omega_b \nu > 0$ ist; beiderseits der Geraden der Trägheitsfrequenz strahlen die Frequenzenkurven von zwei verschiedenen Punkten aus. Diesen entsprechen aber sehr große Wellenlängen, und wenn wir uns auch hier auf die Betrachtung von Wellen beschränken, die kleiner als der Erdradius sind, so bewirkt das Vorhandensein von Ω_b so unwesentliche Änderungen in dem Kurvenverlauf der Abb. 81, daß sie in dem verwendeten Maßstab kaum bemerkbar sind.

Wie im vorigen Abschnitt können wir auch hier den Winkel θ_1 der solidifiierbaren Stromflächen mit der ungestörten Oberfläche anstatt der Schichtdicke $c_1 - c_0$ als Parameter in (16) und (16′) einführen, wodurch sich diese beiden Gleichungen auf eine einzige

$$\nu(\nu^2 - 4\Omega_c^2) = 2\Omega_c(\mu g - 2\Omega_b \nu)\operatorname{tg}\theta_1 \tag{17}$$

reduzieren. Für nicht allzu große Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ist das Glied mit Ω_b zu vernachlässigen, und wir sind wieder auf die Formel **146** (1) geführt, mit dem einzigen Unterschied, daß Ω_c an Stelle von Ω getreten ist.

148. Inkompressibilität: Wellen in zwei Schichten. Es seien zwei inkompressible Flüssigkeitsschichten mit den Dichten Q und Q' aufeinander gelagert, die durch eine Diskontinuitätsfläche $c = c_1$ getrennt und durch die starren horizontalen Ebenen $c = c_0$ und $c = c_2$ begrenzt sind. Es soll die Einwirkung der Erddrehung auf die innere Welle dieses Systems untersucht werden, die sich der Einfachheit halber zonal fortpflanzen soll, d. h. $\Omega_a = 0$.

Für die untere Schicht gilt dann die Lösung **147** (5) mit $\Omega_a = 0$, und für die obere Schicht die entsprechende Lösung mit gestrichenen Buchstaben und mit c_2 an Stelle von c_0. Durch Einführung der Vertikalamplitude C_1 an der inneren Grenzfläche als neue willkürliche Konstante:

$$C_1 = \frac{\mu}{\lambda} C_0 \sinh\lambda(c_1 - c_0) = \frac{\mu}{\lambda} C_0' \sinh\lambda(c_1 - c_2),$$

ist die kinematische Grenzbedingung hier erfüllt. Die nichtzellulare Lösung, für $\nu^2 > 4\Omega_c^2$, wird somit:

$$(1)\quad \begin{aligned}
x &= \frac{\lambda}{\mu} \frac{C_1}{\sinh\lambda(c_1-c_0)} \cosh\lambda(c - c_0)\cos(\mu a - \nu t),\\
y &= \frac{2\Omega_c\lambda}{\nu\mu} \frac{C_1}{\sinh\lambda(c_1-c_0)} \cosh\lambda(c - c_0)\sin(\mu a - \nu t),\\
z &= \frac{C_1}{\sinh\lambda(c_1-c_0)} \sinh\lambda(c - c_0)\sin(\mu a - \nu t),\\
Sp &= \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{\sinh\lambda(c_1-c_0)} \left\{\frac{\nu^2}{\lambda}\cosh\lambda(c-c_0) - (g - 2\Omega_b\tilde{\omega})\sinh\lambda(c-c_0)\right\}\sin(\mu a - \nu t).
\end{aligned}$$

$$(1')\quad \begin{aligned}
x' &= \frac{\lambda}{\mu} \frac{C_1}{\sinh\lambda(c_1-c_2)} \cosh\lambda(c - c_2)\cos(\mu a - \nu t),\\
y' &= \frac{2\Omega_c\lambda}{\nu\mu} \frac{C_1}{\sinh\lambda(c_1-c_2)} \cosh\lambda(c - c_2)\sin(\mu a - \nu t),\\
z' &= \frac{C_1}{\sinh\lambda(c_1-c_2)} \sinh\lambda(c - c_2)\sin(\mu a - \nu t),\\
S'p' &= \frac{\lambda}{\mu} \frac{C_1}{\sinh\lambda(c_1-c_2)} \left\{\frac{\nu^2}{\lambda}\cosh\lambda(c-c_2) - (g - 2\Omega_b\tilde{\omega})\sinh\lambda(c-c_2)\right\}\sin(\mu a - \nu t)
\end{aligned}$$

wo:

$$(2)\quad \lambda = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{4\Omega_c^2}{\nu^2}}}$$

Die entsprechende zellulare Lösung, für $\nu^2 < 4\Omega_c^2$, ergibt sich unmittelbar hieraus und braucht nicht explizite aufgeschrieben zu werden.

Das kinematische Bild der Wellenbewegung in der unteren Schicht deckt sich vollständig mit dem in **147** (B) für eine einzige Schicht

angegebenen. So haben z. B. die solidifiierbaren Stromflächen den Neigungswinkel θ mit der Horizontalebene, wo:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\mu\nu}{2\Omega_c\lambda}\operatorname{tgh}\lambda(c - c_0) = \frac{\mu\nu}{2\Omega_c\bar{\lambda}}\operatorname{tg}\bar{\lambda}(c - c_0)\,. \tag{3}$$

Die Stromlinien und Bahnen der Teilchen in der oberen Schicht sind durch dieselben Gleichungen wie für die untere Schicht gegeben, wenn man nur c_0 durch c_2 ersetzt. So findet man z. B. für den Neigungswinkel θ' der Stromflächen:

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\mu\nu}{2\Omega_c\lambda}\operatorname{tgh}\lambda(c - c_2) = \frac{\mu\nu}{2\Omega_c\bar{\lambda}}\operatorname{tg}\bar{\lambda}(c - c_2)\,. \tag{3'}$$

Wenn beide Schichten von gleicher Mächtigkeit sind, verlaufen die Stromflächen in beiden Schichten symmetrisch zur ungestörten Grenzfläche der Schichten. Auch bei verschiedenen Schichtmächtigkeiten liegt θ im ersten und θ' im zweiten Quadranten, solange die Bewegung nichtzellular ist. Ganz allgemein haben dann die Teilchen beider Schichten entgegengesetzte Umlaufsrichtungen in der Vertikalprojektion und dieselbe Umlaufsrichtung in der Horizontalprojektion.

Bei zellularer Bewegung können die Winkel θ_1 und θ_1', unter denen die solidifiierbaren Stromflächen die ungestörte Diskontinuitätsfläche schneiden, in demselben Quadranten liegen, und zwar muß dann die Faltung, welche die Stromfläche jeder Schicht hat, bei der einen Schicht innerhalb und bei der anderen Schicht außerhalb der Grenzen der Schicht fallen.

Aus der Druckgleichheit an der Grenzfläche $c = c_1$ erhält man die Frequenzengleichung:

$$\nu^2\sqrt{1 - \frac{4\Omega_c^2}{\nu^2}}\{Q\operatorname{cotgh}\lambda(c_1 - c_0) + Q'\operatorname{cotgh}\lambda(c_2 - c_1)\} = (Q - Q')(\mu g - 2\Omega_b\nu)\,. \tag{4}$$

Bei verschwindender Dichte der oberen Schicht führt dies wieder zu der Gleichung **147** (16) zurück.

Im Grenzfall unendlicher Schichtdicken ergibt sich hieraus:

$$\nu^2\sqrt{1 - \frac{4\Omega_c^2}{\nu^2}}(Q + Q') = (Q - Q')(\mu g - 2\Omega_b\nu)\,. \tag{4a}$$

In dem $\mu\nu$-Diagramm stellt diese Gleichung für große Werte der Koordinaten angenähert eine Parabel dar; bei abnehmendem μ nimmt jedoch die Frequenz langsamer als nach dem parabolischen Gesetz ab und erreicht die Trägheitsfrequenz $\nu = 2\Omega_c$ für $\mu = \frac{4\Omega_b\Omega_c}{g}$.

Für kleine Schichtdicken ergibt sich ferner aus (4) die Gleichung:

$$(\nu^2 - 4\Omega_c^2)\left(\frac{Q}{c_1 - c_0} + \frac{Q'}{c_2 - c_1}\right) = (Q - Q')\,\mu(\mu g - 2\Omega_b\nu)\,, \tag{4b}$$

die bei verschwindenden Schichtdicken zu $\nu^2 = 4\Omega_c^2$, also zur Trägheitsfrequenz führt.

Die Frequenzenkurven für endliche Schichtdicken verlaufen zwischen diesen beiden Grenzkurven.

Für noch kleinere Frequenzen führt man

$$\bar{\lambda} = i\lambda = \frac{\mu}{\sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{\nu^2} - 1}} \tag{5}$$

in (4) ein und erhält die Frequenzengleichung der zellularen Wellenbewegung:

$$\nu^2 \sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{\nu^2} - 1}\left\{Q \operatorname{cotg} \bar{\lambda}(c_1 - c_0) + Q' \operatorname{cotg} \bar{\lambda}(c_2 - c_1)\right\} = -(Q - Q')(\mu g - 2\Omega_b \nu). \tag{6}$$

Zur Befriedigung dieser Gleichung ist es notwendig, daß mindestens eins der Argumente des Kotangens im zweiten Quadranten liegt.

In den Frequenzengleichungen (4) und (6) können wir mit Hilfe von (3) und (3') die beiden Neigungswinkel θ_1 und θ_1' an Stelle der Schichtmächtigkeiten als Parameter einführen und erhalten dann die eine Gleichung:

$$\nu(\nu^2 - 4\Omega_c^2)(Q \operatorname{cotg}\theta_1 - Q' \operatorname{cotg}\theta_1') = 2\Omega_c (Q - Q')(\mu g - 2\Omega_b \nu). \tag{7}$$

Hieraus geht hervor, daß die beiden Winkel einander gleich werden können, $\theta_1 = \theta_1'$, so daß die Stromflächen der beiden Schichten an der Diskontinuitätsfläche stetig ineinander übergehen. Man hat dann:

$$\nu(\nu^2 - 4\Omega_c^2) = 2\Omega_c(\mu g - 2\Omega_b \nu) \operatorname{tg}\theta_1, \tag{8}$$

d. h. θ_1 muß im zweiten Quadranten liegen, so daß die Stromflächen in der unteren Schicht eine Faltung aufweisen. Diese Formel ist identisch mit der Formel **147** (17), die sich auf eine einzige Schicht bezieht: die beiden an der Diskontinuitätsfläche stetig ineinander übergehenden Flächen sind nur Teile einer und derselben Fläche, die innerhalb einer Zelle der Höhe $c_2 - c_0 = \pi/\bar{\lambda}$ liegt. Die obere Schicht befindet sich oberhalb des Niveaus der Druckamplitude Null, und es bleibt für die Bewegung innerhalb der Zelle gleichgültig, welche Dichte Q' die obere Schicht hat, wenn sie nur kleiner als Q bleibt: aus diesem Grunde fallen die Dichten aus der Formel (8) heraus. Unter den möglichen Dichten der oberen Schicht ist auch $Q' = 0$, welches die freie Oberfläche der unteren Schicht gibt.

149. Elastische Wellen. Um den Einfluß der Erddrehung auf die rein elastischen Longitudinalwellen zu untersuchen, lassen wir die Schwerkraft außer acht. Die kompressible Flüssigkeit können wir dann im Grundzustand homogen voraussetzen, $\Gamma = 0$. Weiter nehmen wir überall gleiche Kompressibilität an, $\gamma =$ konst. Mit der a-Achse in der Fortpflanzungsrichtung der Wellen und der ac-Ebene als Meridional-

ebene wird $\Omega_b = 0$; ferner soll a die einzige unabhängige Variable sein, so daß sich die Störungsgleichungen **142** (3) und (4) auf die folgende Form reduzieren:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\ddot{x} \qquad - 2\Omega_c \dot{y} + \frac{\partial}{\partial a}(S p) = 0, \\ &\ddot{y} + 2\Omega_c \dot{x} - 2\Omega_a \dot{z} \qquad = 0, \\ &\ddot{z} + 2\Omega_a \dot{y} \qquad = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial a} + \gamma S p \qquad = 0. \end{aligned}$$

Ist die *Fortpflanzungsrichtung a parallel der Erdachse*, so ist $\Omega_c = 0$, und es tritt ein Zerfall des Systems (1) ein. Die erste und die letzte Gleichung geben die gleichen Longitudinalwellen, die auf der nichtrotierenden Erde auftreten (**93**). Die beiden anderen Gleichungen definieren eine reine Trägheitsbewegung der ganzen Masse in Ebenen parallel zur Äquatorebene mit der Winkelgeschwindigkeit -2Ω. Diese beiden Bewegungen können unabhängig voneinander bestehen.

Ist die *Fortpflanzungsrichtung a senkrecht zur Erdachse*, so ist $\Omega_a = 0$. Aus (1) folgt $z = 0$, die Bewegung bleibt in Ebenen parallel zur Äquatorebene und wird hier dargestellt durch die Lösung:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= A \cos(\mu a - \nu t), \\ y &= \frac{2\Omega}{\nu} A \sin(\mu a - \nu t), \\ S p &= \frac{\mu}{\gamma} A \sin(\mu a - \nu t), \end{aligned}$$

mit der Frequenzengleichung:

$$(3)\qquad \nu^2 = \frac{1}{\gamma}\mu^2 + 4\Omega^2,$$

und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$(3')\qquad \omega = \frac{\nu}{\mu} = \pm\sqrt{\frac{1}{\gamma} + \frac{4\Omega^2}{\mu^2}},$$

die immer größer als die LAPLACEsche Schallgeschwindigkeit $\tilde{\omega}_L = \sqrt{1/\gamma}$ ist. Die Bahnen der Teilchen sind die Ellipsen:

$$(4)\qquad x^2 + \frac{\nu^2}{4\Omega^2} y^2 = A^2,$$

die in Ebenen parallel zur Äquatorebene liegen, mit der großen Achse in der Fortpflanzungsrichtung und der kleinen senkrecht dazu: das ist die Einwirkung der Corioliskraft auf die bei verschwindender Wirkung der Erddrehung gradlinigen Schwingungen. Bei den kurzen Perioden der akustischen Erscheinungen hat man kurze Wellen, grad-

linige Schwingungen und die LAPLACEsche Schallgeschwindigkeit. Bei zunehmenden Perioden werden die Wellen immer länger, die Bahnen werden elliptisch mit zunehmender Transversalachse, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit größer. Bei der Trägheitsperiode von 12 Stunden ($\nu = -2\Omega$) sind die Bahnen zirkular, die Wellenlänge und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich: das ist dieselbe reine Trägheitsbewegung, in die sich auch die Schwerewellen am Pol auflösen, wenn die Trägheitsperiode erreicht wird.

In einer $\mu^2\nu^2$-Ebene wird die Frequenzengleichung (3) durch eine Gerade parallel der Schallgeschwindigkeitsgeraden $\tilde{\omega}_L = \sqrt{1/\gamma}$ dargestellt.

Bei beliebiger Richtung der a-Achse und der Fortpflanzung ergibt sich schließlich als Lösung des vollständigen Systems (1):

$$
\begin{aligned}
x &= (\nu^2 - 4\Omega_a^2)\, A_0 \cos(\mu a - \nu t)\,, \\
y &= 2\Omega_c\, \nu A_0 \sin(\mu a - \nu t)\,, \\
z &= -4\Omega_a \Omega_c A_0 \cos(\mu a - \nu t)\,, \\
S p &= \frac{\mu}{\gamma} (\nu^2 - 4\Omega_a^2)\, A_0 \sin(\mu a - \nu t)\,.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Die kleine Achse der elliptischen Bahnen ist jetzt parallel zum Äquator und senkrecht zur Meridionalebene; die große Achse liegt in der Meridionalebene und bildet den Winkel ψ mit der Fortpflanzungsrichtung, wobei

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{4\,\Omega_a\,\Omega_c}{\nu^2 - 4\,\Omega_a^2} \tag{6}$$

ist. Ferner hat man die Frequenzengleichung:

$$\nu^4 - \left(\frac{1}{\gamma}\mu^2 + 4\Omega^2\right)\nu^2 + 4\Omega_a^2 \frac{1}{\gamma}\mu^2 = 0\,. \tag{7}$$

In der $\mu^2\nu^2$-Ebene stellt dies eine Hyperbel dar; sie schneidet die Ordinatenachse in den Punkten $\nu^2 = 0$ und $\nu^2 = 4\Omega^2$ und hat die Asymptoten $\nu^2 = 4\Omega_a^2$ und $\nu^2 = \frac{1}{\gamma}\mu^2 + 4\Omega_c^2$. Für $\mu = 0$, d. h. für unendliche Wellenlänge, hat man $\nu^2 = 4\Omega^2$, also die Periode des Trägheitsumlaufes, die folglich bei jeder Fortpflanzungsrichtung der Wellen eintreten kann. Im Grenzfall einer Fortpflanzung parallel oder senkrecht zur Erdachse, wenn also entweder Ω_c oder Ω_a verschwindet, fallen die Hyperbeläste mit den Asymptoten zusammen. Die Gleichung (7) reduziert sich nämlich für $\Omega_c = 0$ auf:

$$(\nu^2 - 4\Omega^2)\left(\nu^2 - \frac{1}{\gamma}\mu^2\right) = 0\,; \tag{7a}$$

es ergibt sich also die reine Trägheitsbewegung und die rein akustischen Wellen, wie schon oben gefunden. Für $\Omega_a = 0$ reduziert sich die Gleichung (7) auf:

(7b) $$\nu^2\left(\nu^2 - \frac{1}{\gamma}\mu^2 - 4\Omega^2\right) = 0 .$$

Die horizontale Asymptote ist hier mit der Abszissenachse zusammengefallen und die schräge mit der Geraden (3).

Die Lage der Hyperbel ist in der Abb. 85 für drei Fälle eingezeichnet, nämlich für $\Omega_c = 0$ (7a), für $\Omega_a = \Omega_c$ und für $\Omega_a = 0$ (7b).

Abb. 85. Frequenzengleichung der elastischen Wellen bei Erddrehung.

Es ist beachtenswert, daß die Umlaufsrichtung in der Projektion der Bahn auf die ab-Ebene nach (5) antizyklonisch oder zyklonisch ist, je nachdem ob $\nu^2 \gtrless 4\Omega_a^2$ ist, d. h. je nachdem man es mit dem oberen oder dem unteren Hyperbelast zu tun hat.

Die Wirkung der Erddrehung auf die ebenen akustischen Wellen **93** (10) und (12) läßt sich auch behandeln und führt zu Resultaten, die an sich interessant sind, wobei unter anderem zellulare Wellen und Überschall-Fortpflanzungsgeschwindigkeiten auftreten, die aber für unsere Aufgaben von geringerem Interesse sind.

150. Isothermes Medium: Wellen am Pol. Bei den Gleichgewichtsstörungen des isothermen Mediums ergab sich als kombinierte Wirkung der Heterogenität und der Kompressibilität eine große Anzahl von Wellengattungen (**98**, **99**). Wir werden jetzt sehen, wie sich diese verschiedenen Wellengattungen unter der Einwirkung der Erddrehung abändern. Dabei legen wir das Hauptgewicht auf die großen Änderungen, die sich bei den langen Perioden einstellen.

Der Grundzustand des Gleichgewichtes bleibt genau derselbe wie bei verschwindender Erddrehung mit nach oben exponentiell veränderlichem Druck und spezifischem Volumen.

Wenn wir uns der Einfachheit halber auf die Verhältnisse am Pol beschränken, d. h. $\Omega_a = \Omega_b = 0$, $\Omega_c = \Omega$, so ergibt sich aus den Störungsgleichungen **142** (3) und (4) für eine von b unabhängige Störung:

(1) $$\begin{aligned} &\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \frac{\partial}{\partial a}(Sp + gz) &&= 0, \\ &\ddot{y} + 2\Omega\dot{x} &&= 0, \\ &\ddot{z} + \frac{\partial}{\partial c}(Sp + gz) - (\Gamma - \gamma)gSp &&= 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma Sp &&= 0. \end{aligned}$$

Diesem Gleichungssystem mit konstanten Koeffizienten genügt wiederum der einfach-harmonische Lösungsansatz **145** (2). In (1) eingesetzt, ergeben sich dann die folgenden Relationen zwischen den Amplituden:

$$(2)\qquad A = \frac{\mu(\lambda - g\gamma)}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)}\,C, \qquad B = \frac{2\Omega}{\cdot\cdot}\,A,$$
$$D = \frac{\lambda(\nu^2 - 4\Omega^2) - \mu^2 g}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)}\,C,$$

während die Determinantengleichung die folgende Form annimmt:

$$(3)\qquad \lambda^2 - g\Gamma\lambda + \gamma\nu^2 - \mu^2\,\frac{\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)}{\nu^2 - 4\Omega^2} = 0\,.$$

Hieraus erhält man:

$$(4)\qquad \lambda = \tfrac{1}{2}g\Gamma \pm \eta\,, \qquad \eta^2 = \tfrac{1}{4}g^2\Gamma^2 - \gamma\nu^2 + \mu^2\,\frac{\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)}{\nu^2 - 4\Omega^2}$$

Der Ausdruck von η^2 läßt sich auch in den für die folgende Diskussion geeigneteren Formen schreiben:

$$(5)\qquad \eta^2 = g^2(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)^2 + \left(\frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2} - \gamma\right)[\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)]\,.$$

$$(5')\qquad \eta^2 = g^2\left(\tfrac{1}{2}\Gamma - \frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2} - \gamma\right)\left(\nu^2 - \frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2}\right)$$

Die eingehende Diskussion der Kinematik dieser Wellen ist erst möglich nach dem genaueren Studium der Hilfsgröße η. Wir zeichnen deshalb die Kurven $\eta^2 =$ konst. in ein $\mu^2\nu^2$-Diagramm ein (Abb. 86a). Wie bei verschwindender Erddrehung ergibt sich eine Hyperbelschar, die aber hier nicht mehr durch den Ursprung, sondern durch den Punkt $\nu^2 = 4\Omega^2$ auf der Ordinatenachse hindurchgeht. Für den speziellen Wert $\eta^2 = g^2(\gamma - \frac{1}{2}\Gamma)^2$ artet die Hyperbel nach (5) in die Geraden der Transversalfrequenz T, $\nu^2 = g^2(\Gamma - \gamma)$ (vgl. **95**) und der von der Erddrehung modifizierten Schallgeschwindigkeit L, $\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2) = 0$ aus. Wie schon in **97** bemerkt, trennt die erste Gerade das Hochfrequenzgebiet von dem Tieffrequenzgebiet, und die zweite Gerade trennt hier das modifizierte Überschallgebiet von dem modifizierten Unterschallgebiet. Die Gerade der Transversalfrequenz ist gemeinsame Asymptote aller Hyperbeln; die andere Asymptote:

$$\eta^2 = \mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2) + g^2(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)^2,$$

ist parallel der Schallgeschwindigkeitsgeraden und liegt im Unterschall- bzw. Überschallgebiet, je nachdem ob $\eta^2 \gtrless g^2(\gamma - \frac{1}{2}\Gamma)^2$ ist.

Man findet die kritische Hyperbel $\eta^2 = 0$ (0 in der Abb.) im Überschall-Hochfrequenz- und im Unterschall-Tieffrequenzgebiet; sie trennt das Gebiet der positiven η^2-Werte oder der nichtzellularen Wellen von den zwei Gebieten der negativen η^2-Werte oder der zellularen Wellen (schraffiert in der Abb.).

Im Hochfrequenzgebiet ist die Einwirkung der Erddrehung unbedeutend, und das Diagramm zeigt ziemlich genau denselben Verlauf der η-Kurven wie bei verschwindender Erddrehung. Im Tieffrequenzgebiet macht sich dagegen die Erddrehung geltend, und zwar um so mehr, je kleiner die Frequenz ist. Bei Annäherung an die *Geraden der Trägheitsfrequenz* $\nu^2 = 4\Omega^2$ wird η^2 sehr stark negativ, um beim Passieren

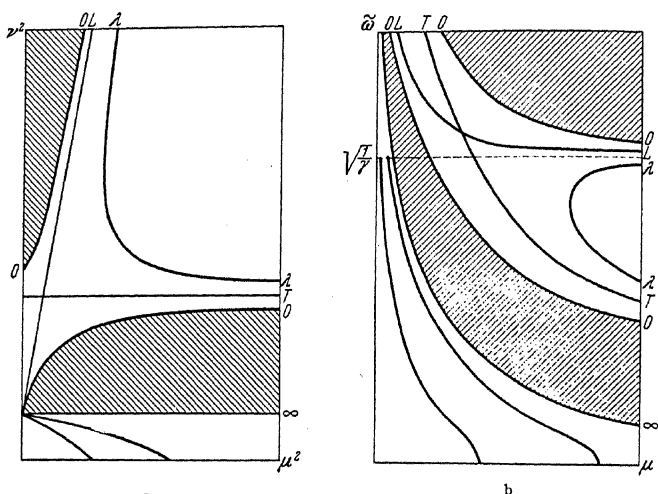



Abb. 86. Frequenzengleichung für eine isotherme Schicht am Pol.

dieser Geraden (∞ in der Abb.) plötzlich von $-\infty$ auf $+\infty$ hinaufzuspringen. Bei weiter abnehmender Frequenz nimmt auch η^2 ab, bleibt aber immer noch positiv, so daß sich *für Frequenzen unterhalb der Trägheitsfrequenz* ein neues Gebiet mit positiven η^2-Werten ergibt; d. h. *bei genügend langen Perioden werden die eventuell möglichen Wellen wieder nichtzellular.*

Da die η-Kurven als Funktion von μ und $\tilde{\omega}$ im nächsten Kapitel zur Anwendung kommen, sind sie auch in ein $\mu\tilde{\omega}$-Diagramm eingezeichnet worden (Abb. 86b), unter alleiniger Berücksichtigung des ersten Quadranten, da Symmetrie für beide Koordinatenachsen vorliegt. Um das Gebiet in der Nähe der Trägheitsfrequenz deutlicher hervortreten zu lassen, sind die Kurven in verzerrtem Maßstab gezeichnet.

Es ist bei der obigen Diskussion vorausgesetzt worden, daß die Transversalfrequenz des isothermen Mediums viel größer als die Trägheitsfrequenz ist. Dies wird auch der Fall sein, wenn die mit der kleinen Störung verbundenen Zustandsänderungen *adiabatisch* verlaufen.

Sollten aber diese Änderungen *beinahe isotherm* verlaufen, d. h. sollte das innere Gleichgewicht des Mediums fast indifferent sein, wie es bei sehr langsamen Schwingungen der Atmosphäre wohl zutreffen wird, so können beide Frequenzen von der gleichen Größenordnung werden. Das Diagramm behält aber immer noch dieselben charakteristischen Züge, solange die Transversalfrequenz nicht kleiner als die Trägheitsfrequenz ist.

Wenn das isotherme Medium unten durch einen starren Boden $c = 0$ begrenzt ist, erhält man für die Amplituden (2) unter Verwendung beider Wurzeln λ und Einführung einer geeigneten Konstanten:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu C_0}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ \cosh \eta c - g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma) \frac{1}{\eta} \sinh \eta c \right\}, \\ B &= \frac{2\Omega}{\nu} A, \qquad C = C_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \frac{1}{\eta} \sinh \eta c, \\ D &= \frac{(\nu^2 - 4\Omega^2) C_0}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ \cosh \eta c - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) \frac{1}{\eta} \sinh \eta c \right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Diese nichtzellulare Wellenbewegung gilt nur für $\eta^2 > 0$. Für $\eta^2 = 0$ folgt hieraus durch einen Grenzübergang:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu C_0}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \{1 - g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma) c\}, \\ B &= \frac{2\Omega}{\nu} A, \qquad C = C_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} c, \\ D &= \frac{(\nu^2 - 4\Omega^2) C_0}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ 1 - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) c \right\}. \end{aligned} \tag{6'}$$

Wenn endlich $\eta^2 < 0$ ist, schreibt man $\eta = i\zeta$ und erhält die zellulare Wellenbewegung:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu C_0}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ \cos \zeta c - g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma) \frac{1}{\zeta} \sin \zeta c \right\}, \\ B &= \frac{2\Omega}{\nu} A, \qquad C = C_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \frac{1}{\zeta} \sin \zeta c, \\ D &= \frac{(\nu^2 - 4\Omega^2) C_0}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} e^{\frac{1}{2} g \Gamma c} \left\{ \cos \zeta c - g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2} - \tfrac{1}{2}\Gamma\right) \frac{1}{\zeta} \sin \zeta c \right\}. \end{aligned} \tag{6''}$$

In allen drei Fällen beschreibt ein Flüssigkeitsteilchen bei der Störungsbewegung eine zur Vertikalen geneigte Ellipse mit den Achsen A und $\sqrt{B^2 + C^2}$. Der Neigungssinn ist bei der nichtzellularen Wellenbewegung dadurch eindeutig festgelegt, daß der Umlauf des Teilchens in der Horizontalprojektion der Bahn immer antizyklonisch verlaufen soll. Diese Neigung nimmt bei abnehmender Verhältniszahl $\nu/(2\Omega)$ immer ab, und wird zuletzt bei der reinen Trägheitsbewegung $\nu = \pm 2\Omega$ gleich

Null. η ist dann unendlich, und die Bewegung verläuft horizontal mit den Amplituden:

$$A = \pm B = A_0 e^{\frac{1}{2} g \Gamma c}, \tag{7}$$

d. h. bei der Trägheitsbewegung im isothermen Medium beschreiben die Teilchen *Trägheitskreise, deren Radien nach oben exponentiell zunehmen.* Für noch kleinere Frequenzen nimmt die Neigung wieder zu (für $\mu > 0$). Übrigens ist auch hier eine stetige Zunahme der Neigung mit der Höhe vorhanden, mit dem Werte Null am Boden beginnend.

Für die Projektion der Stromlinien auf die Vertikalebene durch die Fortpflanzungsrichtung findet man in den drei Fällen:

$$e^{\frac{\mu^2(\frac{1}{2}\Gamma - \gamma)}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} g c} \left[\frac{1}{\eta} \sinh \eta c\right]^{\frac{\mu^2}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)}} \sin(\mu a - \nu t) = K, \tag{8}$$

$$e^{\frac{\mu^2(\frac{1}{2}\Gamma - \gamma)}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} g c} \, c^{\frac{\mu^2}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)}} \sin(\mu a - \nu t) = K, \tag{8'}$$

$$e^{\frac{\mu^2(\frac{1}{2}\Gamma - \gamma)}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} g c} \left[\frac{1}{\zeta} \sin \zeta c\right]^{\frac{\mu^2}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)}} \sin(\mu a - \nu t) = K, \tag{8''}$$

d. h. dieselbe Konfiguration wie für die bei verschwindender Erddrehung in dieser Ebene enthaltenen Stromlinien (s. Abb. 40). In dem neu hinzugekommenen Gebiet für $\nu^2 < 4\Omega^2$ findet man den Stromlinientypus des Unterschall-Hochfrequenzgebietes wieder.

Für die Projektion der Stromlinien auf die Horizontalebene ergibt sich in allen drei Fällen die Gleichung:

$$e^{\frac{\mu \nu}{2\Omega} b} \sin(\mu a - \nu t) = K_1, \tag{9}$$

also Stromlinien derselben Form wie die bei einer unendlichen inkompressiblen Flüssigkeit in einer Vertikalebene enthaltenen Stromlinien (vgl. die Bemerkung S. 536—537).

Durch Division der Gleichungen (8) bis (8″) mit (9) findet man schließlich die Gleichung der von der Zeit unabhängigen Stromflächen:

$$e^{-\frac{\mu \nu}{2\Omega} b + \frac{\mu^2(\frac{1}{2}\Gamma - \gamma)}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} g c} \left[\frac{1}{\eta} \sinh \eta c\right]^{\frac{\mu^2}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)}} = \frac{K}{K_1}, \tag{10}$$

$$e^{-\frac{\mu \nu}{2\Omega} b + \frac{\mu^2(\frac{1}{2}\Gamma - \gamma)}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} g c} \, c^{\frac{\mu^2}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)}} \qquad \frac{K}{K_1}, \tag{10'}$$

$$e^{-\frac{\mu \nu}{2\Omega} b + \frac{\mu^2(\frac{1}{2}\Gamma - \gamma)}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)} g c} \left[\frac{1}{\zeta} \sin \zeta c\right]^{\frac{\mu^2}{\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)}} = \frac{K}{K_1}, \tag{10''}$$

die Zylinderflächen mit Erzeugenden parallel der Fortpflanzungsrichtung sind. Die Profilkurven haben qualitativ denselben Verlauf wie im Falle der Homogenität und Inkompressibilität, die im nichtzellularen Falle

durch Abb. 82a, im zellularen durch Abb. 82b gegeben sind. Im letzteren Falle besteht aber nicht mehr die Symmetrie der Kurven relativ zu der horizontalen Geraden der Trägheitsfrequenz. Diese Gerade kann je nach der Frequenz in der oberen oder der unteren Hälfte der Zelle liegen.

Diese Stromflächen enthalten die Orbitalbahnen und lassen sich wie gewöhnlich solidifiieren. Ihr Neigungswinkel θ ist in den drei Fällen durch

$$
\begin{aligned}
[\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)] \operatorname{ctg}\theta &= \frac{2\Omega\mu}{\nu}[\eta \operatorname{ctgh} \eta c - g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)] \\
&= \frac{2\Omega\mu}{\nu}\left[\frac{1}{c} - g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)\right] \qquad (11) \\
&= \frac{2\Omega\mu}{\nu}[\zeta \operatorname{ctg} \zeta c - g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)]
\end{aligned}
$$

gegeben. Dieser Winkel ist am Boden Null und wächst nach oben stetig.

Im nichtzellularen Fall nähert sich der Winkel θ einem unterhalb π gelegenen Grenzwert, der bestimmt ist durch die Asymptote:

$$
\frac{2\Omega\mu}{\nu}[\eta - g(\gamma - \tfrac{1}{2})]\, c - [\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)]\, b = \text{konst.} \qquad (12)
$$

Wegen (5) kann diese Gleichung auch in der Form

$$
2\Omega\mu \frac{\nu^2 - g^2(\Gamma - \gamma)}{\nu^2 - 4\Omega^2}\, c - [\eta + g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma)]\, b = \text{konst.} \qquad (12')
$$

geschrieben werden. Bei schwacher Kompressibilität, $\gamma < \frac{1}{2}\Gamma$, folgt aus (12), daß die Asymptote bei Unterschallgeschwindigkeit im ersten, bei Überschallgeschwindigkeit im zweiten Quadranten liegt. Bei starker Kompressibilität, $\gamma > \frac{1}{2}\Gamma$, folgt aus (12'), daß die Asymptote für $\nu^2 < 4\Omega^2$ oder $\nu^2 > g^2(\Gamma - \gamma)$ im ersten, für $4\Omega^2 < \nu^2 < g^2(\Gamma - \gamma)$, (im Gebiet zwischen den Geraden der Trägheitsfrequenz und der Transversalfrequenz) im zweiten Quadranten liegt. *Darin, daß der Winkel θ im nichtzellularen Fall den Wert $\pi/2$ überschreiten kann, zeigt sich ein wichtiger Unterschied gegenüber dem früheren Fall der Homogenität und Inkompressibilität.*

Im zellularen Fall durchläuft der Winkel den Wert von 0 bis 2π innerhalb jeder doppelten Zelle.

Man findet $\theta = \pi/2$ und folglich eine *vertikale* Stromfläche in dem Niveau c_A, wo die Horizontalamplitude verschwindet, und das in den drei Fällen gegeben ist durch:

$$
\begin{aligned}
&\eta \operatorname{ctgh} \eta c_A = g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma), \qquad \frac{1}{c_A} = g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma), \\
&\zeta \operatorname{ctg} \zeta c_A = g(\gamma - \tfrac{1}{2}\Gamma).
\end{aligned} \qquad (13)
$$

Das Niveau c_D der verschwindenden Druckamplitude, wo man eine freie Oberfläche einlegen kann, ergibt sich in den drei Fällen aus den ähnlich gebauten Formeln:

$$(14)\quad \begin{cases} \eta \operatorname{ctgh} \eta c_D = g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right), & \frac{1}{c_D} = g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right), \\ \zeta \operatorname{ctg} \zeta c_D = g\left(\frac{\mu^2}{\nu^2 - 4\Omega^2} - \frac{1}{2}\Gamma\right). \end{cases}$$

Aus (13) und (14) ersieht man sofort, daß $c_A < c_D$ ist, wenn $\nu^2 - 4\Omega^2 < 0$ oder wenn $\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2) < 0$; d. h. das Niveau, wo die Stromflächen vertikal werden, befindet sich unterhalb der freien Oberfläche erstens bei Perioden größer als der halbe Sterntag und zweitens bei Überschallgeschwindigkeit. In allen anderen Fällen befindet sich das Niveau, wo die Stromflächen vertikal werden, oberhalb der freien Oberfläche.

Die Diskussion von (14) ist in genau derselben Weise zu führen wie für die entsprechenden Formeln ohne Erddrehung **99** (4). Für unendliche Schichtmächtigkeit, $c_D = \infty$, ist $\operatorname{ctgh} \eta c_D = 1$; nach dem Werte (5′) von η ergeben sich dann in den Diagrammen Abb. 86a und b die modifizierten LAPLACEschen und STOKESschen Kurven als Lösungskurven. Diese Kurven zerlegen das Feld in zwei stumpfwinklige und zwei spitzwinklige Gebiete. Die Kurven für große Schichtmächtigkeiten schmiegen sich in den stumpfwinkligen Gebieten nahe an diese beiden Lösungskurven an, während sich die Kurven für kleine Schichtmächtigkeiten der Geraden $\nu^2 = 4\Omega^2$ nähern, die eine Lösung für $c_D = 0$ darstellt.

Wir können jetzt einen Überblick über die physikalisch möglichen Lösungen gewinnen. Wir müssen dabei zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ob die Transversalfrequenz *größer oder kleiner* als die Trägheitsfrequenz ist:

$$g^2(\Gamma - \gamma) \gtrless 4\Omega^2,$$

d. h. je nachdem ob die Transversalperiode des isothermen Mediums kleiner oder größer als der halbe Sterntag ist.

Im ersteren Fall hat man bei Perioden unterhalb des halben Sterntages, $\nu^2 > 4\Omega^2$, wie bei verschwindender Erddrehung (**97**) sowohl die nichtzellulare wie die zellulare Lösung. Alle drei Formen (10), (10′), (10″) der Stromflächen können vorkommen, und man hat die Möglichkeit einer freien Oberfläche nach den Gleichungen (14).

Bei Perioden gleich dem halben Sterntag, $\nu^2 = 4\Omega^2$, tritt die oben beschriebene Trägheitsbewegung ein.

Verhältnisse, die von den früheren ganz verschieden sind, treten dagegen auf, wenn die Trägheitsperiode überschritten wird, $\nu^2 < 4\Omega^2$.

In diesem Falle ist $\eta^2 > 0$; die erste Gleichung (14) gibt dann bei reellem ν nur Lösungen für negative Werte von c_D. D. h. die betrachtete

isotherme Schicht grenzt nach oben an eine starre Horizontalebene, und erst in einem tieferen Niveau kann man die freie Oberfläche einlegen, eine Schichtung, die wir außer Betracht lassen müssen. Man könnte erwarten, daß sich unter Einführung komplexer Werte von ν^2 und η^2 in die erste Gleichung (14) immerhin Lösungen mit $c_D > 0$ ergeben. Dies würde dann Instabilität der langsamen Schwingungen bedeuten. Die Durchführung der Rechnung zeigt aber, daß dies nicht eintreffen kann. Man hat also:

Ist die Transversalperiode kürzer als der halbe Sterntag (große Stabilitä), tso existieren weder zellulare noch nichtzellulare Wellen mit Perioden größer als der halbe Sterntag.

Im letzteren Falle, $g^2(\Gamma - \gamma) < 4\Omega^2$, ist $\eta^2 > 0$ für $\nu^2 > 4\Omega^2$ und für $\nu^2 < g^2(\Gamma - \gamma)$, während $\eta^2 < 0$ ist für $g^2(\Gamma - \gamma) < \nu^2 < 4\Omega^2$. Die Gleichungen (14) haben dann nur Lösungen für $\nu^2 > g^2(\Gamma - \gamma)$. Es ergibt sich also:

Ist die Transversalperiode länger als der halbe Sterntag (kleine Stabilität), so existieren zellulare Wellen mit Perioden zwischen dem halben Sterntag und dieser Transversalperiode, aber keine Wellen mit längeren Perioden.

Läßt man die Transversalperiode unbegrenzt anwachsen, so kommt man zu dem Fall des inneren indifferenten Gleichgewichtes und findet, wie in homogenen, inkompressiblen Medien, Zellularwellen aller Perioden größer als der halbe Sterntag.

In der isothermen Atmosphäre betrug die Transversalperiode bei adiabatischer Kompressibilität 5,6 Minuten (**95**), also nur einen sehr kleinen Bruchteil des halben Sterntages: hier liegt der Fall vor, wo Wellen mit Perioden länger als der halbe Sterntag ausgeschlossen sind.

Die atmosphärischen Prozesse verlaufen aber nie genau adiabatisch. Wegen der Langsamkeit der Bewegungen muß man immer mit einer Kompressibilität rechnen, deren Größe zwischen der adiabatischen und der isothermen gelegen ist. Je näher man der isothermen Kompressibilität kommt, um so kleiner wird die innere Stabilität des isothermen Mediums und um so größer die Transversalperiode. Bei hinlänglich langsamen, fast isotherm verlaufenden Bewegungen muß man deshalb mit der Möglichkeit zellularer Wellen mit Perioden länger als der halbe Sterntag in der isothermen Atmosphäre rechnen.

Es kann überraschend erscheinen, daß nach dem Vorhergehenden ein Gebiet zu existieren scheint, wo keine Wellenlösungen möglich sind. Man muß sich aber daran erinnern, daß die vorausgesetzte Wellenlösung **145** (2) von spezieller Form war; die Wellen wurden von einfach harmonischer Form mit zeitlich unveränderlichem Wellenprofil angenommen. Es ist aber sehr wohl denkbar, daß man durch eine geeignete Summation über mehrere oder wenn nötig unendlich viele Elementar-

lösungen zu allgemeineren Lösungen geführt werden könnte, die diese Lücke ausfüllen.

Wenn wir anstatt Wellen am Pol zonal sich fortpflanzende Wellen in einer beliebigen Breite untersucht hätten, so würden wir dieselben Resultate wie oben gefunden haben, nur mit dem einen Unterschied, daß in einer beliebigen Breite der *halbe Pendeltag* dieselbe Rolle spielt wie am Pol der *halbe Sterntag*.

Schließlich können wir wie in **146** die partikuläre Lösung betrachten, die sich ergibt, wenn man eine feste Grenzfläche durch Solidifiieren einer Stromfläche einführt. Mit Hilfe von (11) hat man dann den Neigungswinkel θ_1 der Stromflächen an der ungestörten Grenzfläche an Stelle der Schichtdicke c_D in die Frequenzengleichung (13) einzuführen. Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt dann in zwei Faktoren:

$$(14)\qquad [\mu^2 - \gamma(\nu^2 - 4\Omega^2)][\nu(\nu^2 - 4\Omega^2) - 2\Omega\,\mu\, g \operatorname{tg}\theta_1] = 0\,.$$

Durch Nullsetzen des ersten Faktors ergibt sich die von der Erddrehung modifizierte Schallgeschwindigkeit; die entsprechende horizontale Störungsbewegung haben wir schon in **149** (2) kennengelernt.

Durch Nullsetzen des zweiten Faktors erhält man wieder die Gleichung **146** (1) für eine homogene, inkompressible Schicht. Man hat also eine Zerlegung in eine reine Kompressionswelle und in eine Welle von Trägheitswellentypus, bei der die Heterogenität und Kompressibilität überhaupt nicht eingreift. Bei Perioden größer als der halbe Sterntag kann man, ebensowenig wie oben, eine freie Oberfläche einführen.

Perioden größer als der halbe Sterntag treten wieder nur bei sehr schwacher innerer Stabilität auf, wenn die Transversalperiode länger als der halbe Sterntag ist. Für die dann auftretenden zellularen Wellen hat man dieselbe Einseitigkeit des Fortpflanzungssinnes wie bei den entsprechenden Wellen im Falle der Homogenität und Inkompressibilität, **146**.

Aus den in diesem Abschnitt für ein isothermes Medium entwickelten Formeln kann man auch leicht die Einwirkung der Erddrehung auf zwei im Gleichgewicht sich befindliche isotherme Schichten bestimmen, die durch eine Diskontinuitätsfläche voneinander getrennt sind. Solange die Schichtung stabil ist, bewirkt das Vorhandensein der Diskontinuität nur eine erhöhte innere Stabilität des Gesamtsystems. Deshalb wird man ebensowenig wie im Falle einer einzigen Schicht Wellen vom einfach-harmonischen Typus mit Perioden größer als der halbe Pendeltag erhalten können.

Wenn jede Schicht durch eine solidifiierte Stromfläche begrenzt ist, und diese Stromflächen an der Diskontinuitätsfläche stetig ineinander übergehen, so kommt man wieder auf die Frequenzengleichung (14). Ganz wie im Falle der Homogenität und Inkompressibilität ist der Dichtesprung an der inneren Grenzfläche belanglos, da die Stromflächen beider Schichten in Wirklichkeit dieselbe Gleichung erfüllen.

Vierzehntes Kapitel.

Störung gradliniger Strömungen auf der rotierenden Erde. Zyklonenwellen.

151. Grundzustand und Wellenlösung bei zonal bewegten Schichten. Wir gehen zu der letzten Verallgemeinerung unserer Störungsprobleme über: der Grundzustand soll nicht mehr ein Zustand des Gleichgewichtes, sondern der gleichmäßigen Bewegung relativ zu der rotierenden Erde sein. Es handelt sich mit anderen Worten um den Einfluß der Erddrehung auf die in **107** und **109** studierten Wellen, die bei translatorisch bewegten Schichten auftreten. Dabei werden wir uns auf den gleichzeitig einfachsten und wichtigsten Fall beschränken, wo die Translationsbewegungen rein zonal (d. h. längs der Parallelen) sind.

Wegen der Bewegung der Schichten machen sich die Corioliskräfte schon im Grundzustand geltend. Die Druck- und Massenverteilung wird eine andere als bei verschwindender Erddrehung und soll zunächst ermittelt werden.

Die Schwere im gewöhnlichen Sinne des Wortes, d. h. die Resultierende der Massenanziehung und der Zentrifugalkraft wegen der Erddrehung, soll innerhalb des betrachteten Gebietes durch den nach Betrag und Richtung konstanten Vektor $\mathbf{g}$ dargestellt sein. Die entsprechenden Niveauflächen sind horizontal und äquidistant. Die Translationsbewegung der Schichten soll horizontal und zonal gerichtet sein.

Wir legen die a-Achse längs dieser horizontalen Translationsrichtung, wodurch $g_a = 0$ wird. Die b- und c-Achse sollen dagegen erst nachträglich bestimmte Richtungen erhalten; entsprechend sind die Komponenten g_b und g_c der Schwerkraft längs dieser Achsen vorläufig als unbestimmte Größen zu betrachten. Die Gleichungen des Grundzustandes werden dann:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 0 &= -S\frac{\partial P}{\partial a}, \\ g_b + 2\Omega_c U &= -S\frac{\partial P}{\partial b}, \\ g_c - 2\Omega_b U &= -S\frac{\partial P}{\partial c}, \end{aligned}$$

wo S eine Funktion von b und c ist. Die Differentialgleichung der Isobarflächen ist folglich gegeben durch:

$$(g_b + 2\Omega_c U)\,db + (g_c - 2\Omega_b U)\,dc = -S\,dP = 0\,. \tag{2}$$

Die Isobarflächen sind also parallele Ebenen, deren Schnittlinien mit den Horizontalebenen parallel zur a-Achse verlaufen. Ihre Neigung zu der ab-Ebene ist durch

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{g_b + 2\Omega_c U}{g_c - 2\Omega_b U} \tag{3}$$

gegeben. Wählt man z. B. diese bis jetzt willkürlich gebliebene Koordinatenebene parallel zu den Isobarflächen, so wird der Zähler in (3) gleich Null, und man erhält für den Neigungswinkel θ_p zwischen Isobarflächen und Niveauflächen, da $g_b = g \sin\theta_p$ ist:

$$\sin\theta_p = -\frac{2\Omega_c U}{g}\,. \tag{4}$$

Hier ist Ω_c die Komponente von $\boldsymbol{\Omega}$ senkrecht zur Isobarfläche.

Wenn zwei Schichten verschiedener Translationsbewegung U und U' aufeinander lagern und durch eine Diskontinuitätsfläche voneinander getrennt sind, so gelten für die obere Schicht die entsprechenden Gleichungen mit gestrichenen Buchstaben. Die Differentialgleichung der Diskontinuitätsfläche, $dP - dP' = 0$ für $b = b'$, $c = c'$, ergibt dann:

$$\left\{\begin{aligned} &\{\varrho(g_b + 2\Omega_c U) - \varrho'(g_b + 2\Omega_c U')\}\,db \\ &+ \{\varrho(g_c - 2\Omega_b U) - \varrho'(g_c - 2\Omega_b U')\}\,dc = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Dies stellt im allgemeinen eine Zylinderfläche mit Erzeugenden parallel zur Grundströmung dar. Nur in einigen Spezialfällen ergibt sich eine ebene Diskontinuitätsfläche; dies tritt z. B. in den beiden Fällen ein, wo die Medien inkompressibel oder wo sie isotherm sind. Im folgenden werden wir uns mit der Betrachtung dieser einfachen Fälle begnügen.

Es empfiehlt sich dann, die bis jetzt willkürlich gebliebene ab-Ebene parallel zur Diskontinuitätsfläche zu legen, wodurch diese die Gleichung $c = c_1$ erhält. Aus (5) folgt dann:

$$\varrho_1(g_b + 2\Omega_c U) = \varrho_1'(g_b + 2\Omega_c U')\,. \tag{6}$$

Dies stellt in dem gewählten Koordinatensystem die erweiterte MARGULESsche Formel dar, wie man durch Transformation auf ein zur Schwerkraft orientiertes System sofort erkennt (vgl. **128**).

Führt man in (6) $g_b = g \sin\theta_d$ ein, wo θ_d den Neigungswinkel der Diskontinuitätsfläche mit den Niveauflächen bedeutet, so erhält man:

$$\sin\theta_d = \frac{2\Omega_c}{g}\,\frac{\varrho_1' U' - \varrho_1 U}{\varrho_1 - \varrho_1'} \tag{6'}$$

Da das System (1) in den beiden zu betrachtenden Spezialfällen unmittelbar integrabel ist, schreiben wir für diese Fälle die Gleichung der Isobaren in endlicher Form auf.

Bei Inkompressibilität erhält man direkt:

$$P = P_0 - Q(g_b + 2\Omega_c U)\, b - Q(g_c - 2\Omega_b U)\, c. \tag{7}$$

Bei Isothermie verwendet man die Barotropierelation $\nabla Q = \Gamma \nabla P$ zur Elimination von P und erhält für die Dichte eine exponentielle Abhängigkeit von b und c:

$$Q = Q_0\, e^{-\Gamma'(g_b + 2\Omega_c U)b - \Gamma'(g_c - 2\Omega_b U)c}, \tag{8}$$

woraus sich sodann für die Druckverteilung ergibt:

$$P = \frac{1}{\Gamma'} Q = P_0\, e^{-\Gamma'(g_b + 2\Omega_c U)b - \Gamma'(g_c - 2\Omega_b U)c}. \tag{9}$$

Wenn Isothermie vorliegt, schreibt man die MARGULESsche Formel (6) in den zweckmäßigeren Formen:

$$\Gamma(g_b + 2\Omega_c U) = \Gamma'(g_b + 2\Omega_c U'), \tag{10}$$

oder:

$$\frac{1}{\Theta}(g_b + 2\Omega_c U) = \frac{1}{\Theta'}(g_b + 2\Omega_c U'), \tag{10a}$$

indem man einerseits die Relation $Q_1/Q_1' = \Gamma/\Gamma'$, andererseits die Gasgleichung verwendet. Hieraus findet man leicht:

$$g_b + 2\Omega_c U = 2\Omega_c \Gamma' \frac{U' - U}{\Gamma - \Gamma'} = 2\Omega_c \Theta \frac{U' - U}{\Theta' - \Theta}, \tag{11}$$

$$g_b + 2\Omega_c U' = 2\Omega_c \Gamma \frac{U' - U}{\Gamma - \Gamma'} = 2\Omega_c \Theta' \frac{U' - U}{\Theta' - \Theta}. \tag{11'}$$

Diese im folgenden häufig vorkommenden Größen sind also *dem Verhältnis zwischen dem Geschwindigkeitssprung und dem Temperatursprung an der Diskontinuitätsfläche proportional.* Ferner sind diese Größen positiv, wenn die leichtere Schicht die größere Ostwärtsgeschwindigkeit hat.

Der oben definierten Grundströmung sei nun eine kleine Störung überlagert; diese befriedigt die folgenden Störungsgleichungen, die sich aus **89** (5b) und (6) durch Hinzufügen der Coriolisbeschleunigung ergeben, wobei $\Omega_a = 0$ ist:

$$\left\{\begin{aligned}
&\ddot{x} + 2\Omega_b \dot{z} - 2\Omega_c \dot{y} + \frac{\partial}{\partial a}[Sp + (g_b + 2\Omega_c U)y + (g_c - 2\Omega_b U)z] = 0,\\
&\ddot{y} + 2\Omega_c \dot{x} + \frac{\partial}{\partial b}[Sp + (g_b + 2\Omega_c U)y + (g_c - 2\Omega_b U)z]\\
&\qquad - (\Gamma - \gamma)\, Sp\,(g_b + 2\Omega_c U) = 0,\\
&\ddot{z} - 2\Omega_b \dot{x} + \frac{\partial}{\partial c}[Sp + (g_b + 2\Omega_c U)y + (g_c - 2\Omega_b U)z]\\
&\qquad - (\Gamma - \gamma)\, Sp\,(g_c - 2\Omega_b U) = 0,\\
&\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial c} + \gamma S p = 0.
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Im allgemeinen Fall sind die Koeffizienten dieses Gleichungssystems Funktionen von b und c. Wir wählen deshalb eine in Richtung der Grundströmung sich fortpflanzende Wellenstörung der einfach-harmonischen Form:

$$(13)\quad \begin{cases} x = A\cos[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ y = B\sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ z = C\sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \\ Sp = D\sin[\mu a - (\nu - U\mu)t], \end{cases}$$

wo die Amplituden Funktionen von b und c sind. Relativ zur Grundströmung gibt dies elliptische Orbitalbahnen der Teilchen:

$$(14)\quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2 + z^2}{B^2 + C^2} = 1.$$

Für die Umlaufsrichtung in der Bahn gelten immer noch die Bemerkungen von S. 376 für den Fall verschwindender Erddrehung.

Zu den obigen Bewegungsgleichungen sind noch die Grenzbedingungen hinzuzufügen. An einer äußeren starren Grenzfläche ist die Normalgeschwindigkeit gleich Null, und an einer inneren Diskontinuitätsfläche gelten nach **78** (8) die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t}[p - p' - (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\cdot\nabla' P'] - (U - U')\frac{\partial}{\partial a'}(p' - \mathbf{r}'\cdot\nabla' P') = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}[p - p' - (\mathbf{r} - \mathbf{r}')\cdot\nabla P] - (U - U')\frac{\partial}{\partial a}(p - \mathbf{r}\cdot\nabla P) = 0,$$
$$\text{wenn } t = 0,\ a = a',\ b = b',\ c = c'.$$

Einsetzen von (13) und Umformung der Glieder gibt:

$$-(\nu - U\mu)\left[QD - Q'D' - (B - B')\frac{\partial P'}{\partial b'} - (C - C')\frac{\partial P'}{\partial c'}\right] = 0,$$
$$-(\nu - U'\mu)\left[QD - Q'D' - (B - B')\frac{\partial P}{\partial b} - (C - C')\frac{\partial P}{\partial c}\right] = 0,$$
$$\text{wenn } b = b',\ c = c'.$$

Da aber nach der MARGULESschen Formel $\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{\partial P'}{\partial b'}$ ist, so folgt hieraus erstens:

$$(15)\quad C = C', \qquad \text{wenn} \qquad b = b',\ c = c',$$

und zweitens:

$$(16)\quad \begin{cases} Q[D + (g_b + 2\Omega_c U)B] - Q'[D' + (g_b + 2\Omega_c U')B'] = 0, \\ \text{wenn } b = b',\ c = c'. \end{cases}$$

In den folgenden Abschnitten sollen einige einfache Integrationen dieser Gleichungen durchgeführt werden.

152. Eine zonal bewegte inkompressible Schicht. Es sei zuerst eine einzige homogene und inkompressible Flüssigkeitsschicht vorhanden,

d. h. $\Gamma = \gamma = 0$. Soll $c = c_1$ eine freie Oberfläche sein, so muß P von b unabhängig sein, also nach **151** (7):

$$g_b + 2\Omega_c U = 0, \tag{1}$$

woraus für den Neigungswinkel θ_p der Isobarflächen zu den Niveauflächen:

$$\operatorname{tg}\theta_p = -\frac{2\Omega_c U}{g_c} \tag{1'}$$

folgt.

Ferner sollen die Amplituden der Störung **151** (13) nur von der c-Koordinate abhängen. Durch Einsetzen in die Störungsgleichungen **151** (12) ergibt sich dann ein homogenes Gleichungssystem für die vier Amplituden mit c als einzige unabhängige Variable, da der trigonometrische Faktor herausfällt. Durch Elimination dreier Amplituden aus diesem System erhält man die Differentialgleichung der vierten; behält man die Amplitude C bei, so ergibt sich:

$$C'' - \frac{\mu^2(\nu - U\mu)^2}{(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2}\, C = 0. \tag{2}$$

Wenn C hieraus gefunden ist, so bestimmen sich die anderen Amplituden aus den folgenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &A = \frac{1}{\mu}C', \qquad B = \frac{2\Omega_c}{\nu - U\mu}\,\frac{1}{\mu}C',\\ &D = \frac{(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2}{\mu^2}\, C' - (g_c - 2\Omega_b\tilde{\omega})\, C. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Das allgemeine Integral von (2), d. h. die lineare Kombination der zwei partikularen Exponentiallösungen, kann an einem *horizontalen Boden* $c + b \operatorname{tg}\theta_p = 0$ *nicht zum Verschwinden gebracht werden.* Um dies zu erreichen, müßte auch eine Abhängigkeit der Amplituden von der b-Koordinate vorausgesetzt werden. Wir können aber eine Isobarfläche der Grundströmung, $c = c_0$, solidifiieren und erhalten somit die *Wellenbewegung in einer zur Schwere geneigten Schicht der konstanten Mächtigkeit* $c_1 - c_0$. Die Lösung von (2) ist dann durch $C = \frac{\mu}{\lambda} A_0 \sinh\lambda(c - c_0)$ gegeben, wo:

$$\lambda^2 = \frac{\mu^2(\nu - U\mu)^2}{(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2} \tag{4}$$

und A_0 eine willkürliche Konstante ist.

Die vollständige Lösung für die Amplituden wird entsprechend ($\lambda^2 > 0$):

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cosh\lambda(c - c_0),\\ B &= \frac{2\Omega_c}{\nu - U\mu} A_0 \cosh\lambda(c - c_0),\\ C &= \frac{\mu}{\lambda} A_0 \sinh\lambda(c - c_0),\\ D &= \frac{\mu}{\lambda} A_0 \left[\frac{(\nu - U\mu)^2}{\lambda}\cosh\lambda(c - c_0) - (g_c - 2\Omega_b\tilde{\omega})\sinh\lambda(c - c_0)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Für $\lambda^2 < 0$ erhält man hieraus die entsprechende zellulare Lösung. Die Lösung (5) ist mit der für die Gleichgewichtsstörung gefundenen Lösung **145** (4) identisch, wenn man nur ν durch $\nu - U\mu$ und g durch $g_c - 2\Omega_b\tilde{\omega}$ ersetzt. Die kritische *Orbitalperiode* wird also hier dieselbe wie die kritische Periode im Abschnitt **147**, nämlich der *halbe Pendeltag*.

Die Lösung (5) gilt für eine Schicht gleichmäßiger Dicke, kann aber auch als angenäherte Lösung für eine schwach keilförmige Schicht weit von deren Grat gelten. Auf die formale Lösung für den vollständigen keilförmigen Raum ist früher hingewiesen worden, **146**, S. 541.

Die solidifiierbaren Stromflächen haben die Gleichung:

$$(6) \qquad {}^{-\frac{\mu(\nu - U\mu)}{2\Omega_c} b} \sinh\lambda(c - c_0) = \text{konst.}$$

Ihr Neigungswinkel θ zu den ungestörten Isobarflächen ist somit durch

$$(7) \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\mu(\nu - U\mu)}{2\Omega_c\lambda} \operatorname{tgh}\lambda(c - c_0)$$

gegeben. Soll eine solidifiierbare Stromfläche den horizontalen Erdboden darstellen, so hat man für den Winkel θ_1, unter dem die freie Oberfläche diesen Erdboden schneidet: $\theta_1 = \pi - \theta_p$; aus (1') und (7) folgt dann:

$$(8) \qquad \frac{2\Omega_c U}{g_c} = \frac{\mu(\nu - U\mu)}{2\Omega_c\lambda} \operatorname{tgh}\lambda(c_1 - c_0).$$

Durch Elimination von $c_1 - c_0$ aus dieser Gleichung und der Frequenzengleichung:

$$(9) \qquad \frac{(\nu - U\mu)^2}{\;} - (g_c - 2\Omega_b\tilde{\omega}) \operatorname{tgh}\lambda(c_1 - c_0) = 0$$

ergibt sich, unter Berücksichtigung von (4):

$$(10) \qquad \mu^2(\tilde{\omega} \quad U)^3 = 4\Omega_c^2\tilde{\omega}\,\frac{g_c - 2\Omega_b U}{g_c}.$$

Da das Glied mit Ω_b bei den gewöhnlich vorkommenden Grundgeschwindigkeiten sehr klein im Vergleich zu g_c ist, kann es in erster Annäherung fortgelassen werden; man erhält dann:

$$(10\text{a}) \qquad \mu^2(\tilde{\omega} - U)^3 = 4\Omega_c^2\tilde{\omega}.$$

Wie man sieht, sind reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zwischen 0 und U ausgeschlossen.

Im Grenzfall $U = 0$ gibt die Gleichung $\tilde{\omega} = 0$ oder $\nu^2 = 4\Omega^2$. Das heißt, man erhält entweder keine periodische Bewegung oder es findet die Trägheitsbewegung statt. Die gewöhnlichen Schwerewellen, die

zwar der Gleichung (9) genügen, nicht aber der Gleichung (8), kommen nicht mehr vor: sie sind durch die Methode des Solidifiierens von Stromflächen ausgeschlossen worden, der Tatsache entsprechend, daß g_c in der Gleichung (10a) nicht mehr vorkommt.

Wenn man die Gleichung (10a) nach der Orbitalfrequenz $\nu - U\mu$ ordnet:

$$(10'a) \qquad (\nu - U\mu)\left[(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2\right] = 4\Omega_c^2 U\mu ,$$

so wird ihre mathematische Äquivalenz mit der Gleichung **147** (17) für die Fortpflanzung von Wellen längs einer schrägen Küste sofort evident. Aus der dort geführten Diskussion entnimmt man: *für $U > 0$, was einer Südküste entspricht, pflanzen sich eine stabile nichtzellulare Welle nach Osten und zwei zellulare Wellen nach Westen fort, die bei großen Wellenlängen stabil, bei kürzeren Wellenlängen instabil sind.*

Für $U < 0$, also an einer Nordküste, ergeben sich die entgegengesetzten Fortpflanzungsrichtungen der Wellen.

153. Zwei zonal bewegte inkompressible Schichten gleichmäßiger Dicke. Wenn zwei Schichten aufeinander lagern, wählt man am bequemsten, wie schon im vorletzten Abschnitt gezeigt, die c-Achse senkrecht zur inneren Diskontinuitätsfläche. Man erhält dann als Relation zwischen den Grundgeschwindigkeiten und Dichten die MARGULESsche Formel:

$$(1) \qquad Q(g_b + 2\Omega_c U) = Q'(g_b + 2\Omega_c U') .$$

Der Neigungswinkel θ_d zwischen der Diskontinuitätsfläche und den Niveauflächen ist somit gegeben durch:

$$(1') \qquad \operatorname{tg}\theta_d = \frac{2\Omega_c}{g_c}\,\frac{Q'U' - QU}{Q - Q'} .$$

Parallel zur inneren Grenzfläche $c = c_1$ kann man zwei starre Begrenzungsflächen $c = c_0$ und $c = c_2$ legen. Die Störungsbewegung in der unteren Schicht ist dann durch die Lösung **152** (4) und (5) mit verschwindender Normalamplitude C für $c = c_0$ gegeben, nur ist D durch $D + (g_b + 2\Omega_c U)B$ zu ersetzen. Für die obere Schicht gilt die entsprechende Lösung mit gestrichenen Buchstaben und c_2 anstatt c_0.

Die Kontinuität der Normalamplitude an der Diskontinuitätsfläche wird dadurch befriedigt, daß man die Normalamplitude C_1 an dieser Fläche als neue willkürliche Konstante einführt:

$$C_1 = \frac{\mu}{\lambda} A_0 \sinh\lambda(c_1 - c_0) = \frac{\mu}{\lambda'} A_0' \sinh\lambda'(c_1 - c_2) .$$

Die Amplituden werden dann:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
A &= \frac{\lambda}{\mu} C_1 \frac{\cosh\lambda(c-c_0)}{\sinh\lambda(c_1-c_0)},\\
B &= \frac{2\Omega_c}{\nu - U\mu}\,\frac{\lambda}{\mu} C_1 \frac{\cosh\lambda(c-c_0)}{\sinh\lambda(c_1-c_0)},\\
C &= C_1 \frac{\sinh\lambda(c-c_0)}{\sinh\lambda(c_1-c_0)},\\
D+(g_b+2\Omega_c U)B &= \frac{C_1}{\sinh\lambda(c_1-c_0)}\left[\frac{(\nu-U\mu)^2}{\lambda}\cosh\lambda(c-c_0)-(g_c-2\Omega_b\tilde{\omega})\sinh\lambda(c-c_0)\right],
\end{aligned}
$$

$$
(2')\qquad
\begin{aligned}
A' &= \frac{\lambda'}{\mu} C_1 \frac{\cosh\lambda'(c-c_2)}{\sinh\lambda'(c_1-c_2)},\\
B' &= \frac{2\Omega_c}{\nu - U'\mu}\,\frac{\lambda'}{\mu} C_1 \frac{\cosh\lambda'(c-c_2)}{\sinh\lambda'(c_1-c_2)},\\
C' &= C_1 \frac{\sinh\lambda'(c-c_2)}{\sinh\lambda'(c_1-c_2)},\\
D'+(g_b+2\Omega_c U')B' &= \frac{C_1}{\sinh\lambda'(c_1-c_2)}\left[\frac{(\nu-U'\mu)^2}{\lambda'}\cosh\lambda'(c-c_2)-(g_c-2\Omega_b\tilde{\omega})\sinh\lambda'(c-c_2)\right],
\end{aligned}
$$

wo

$$
(3)\qquad \lambda = \sqrt{1-\frac{4}{(\nu-U\mu)^2}},\quad \text{und}\quad \lambda' = \sqrt{1-\frac{4\,\Omega_c^2}{(\nu-U'\mu)^2}}
$$

ist.

Die Ausdrücke der Druckamplituden D und D' sind mit Rücksicht auf die dynamische Grenzflächenbedingung **151** (16) an der Diskontinuitätsfläche in der obigen Form geschrieben worden.

Die Lösung (2) gilt, solange $\lambda^2 > 0$, d. h. solange die Orbitalperiode in der *unteren* Schicht kleiner als der halbe Pendeltag ist, und die Lösung (2'), solange $\lambda'^2 > 0$, d. h. solange die Orbitalperiode in der *oberen* Sohicht kleiner als der halbe Pendeltag ist. Wird eine der Größen λ^2 und λ'^2 negativ, so nimmt die entsprechende Lösung zellulare Form an. Der Übergang zu diesen Lösungsformen, die wir nicht aufzuschreiben brauchen, geschieht durch $\lambda = \infty$ bzw. $\lambda' = \infty$, wodurch die Amplituden A und B bzw. A' und B' unendlich werden. Um dies zu vermeiden, kann man eine neue willkürliche Konstante $\bar{C}_1 = C_1\lambda\lambda'$ einführen. Man kann aber auch die Formen (2) und (2') beibehalten, wenn man nur bei der späteren Diskussion der Frequenzengleichung auch $\lambda = \infty$ und $\lambda' = \infty$ als Wurzeln dieser Gleichung mitrechnet.

Die Projektion der Stromlinien in der unteren Schicht auf die ac-Ebene wird:

$$
(4)\qquad \sinh\lambda(c-c_0)\sin[\mu a-(\nu-U\mu)t] = K.
$$

Die entsprechenden Stromlinien in der oberen Schicht ergeben sich, wenn man in (4) gestrichene Buchstaben verwendet und c_0 durch c_2 ersetzt.

Die Stromlinien in einer Ebene durch die Fortpflanzungsrichtung und senkrecht zur geneigten Diskontinuitätsfläche sind also identisch mit den bei verschwindender Erddrehung gefundenen Stromlinien in einer Vertikalebene: sie sind in der unteren Schicht vom konkav-parabolischen Typus und in der oberen vom konvex-parabolischen Typus. Bei der zellularen Bewegung findet man entsprechend Stromlinien vom elliptischen Typus.

Für die Projektion der Stromlinien auf die Diskontinuitätsfläche ergibt sich ferner:

$$e^{\frac{\mu^2(\tilde{\omega} - U)}{2\Omega_c} b} \sin[\mu a - (\nu - U\mu) t] = K_1, \tag{5}$$

also eine Gleichung von derselben Form wie für die Stromlinien in einer Vertikalebene im Falle unendlicher Tiefe und verschwindender Erddrehung. Je nachdem ob $\tilde{\omega} - U \gtrless 0$ ist, sind die Stromlinien konkav-parabolisch oder konvex-parabolisch.

Durch Division von (4) mit (5) findet man wie früher zylindrische Stromflächen, die Erzeugenden parallel zur Grundgeschwindigkeit haben, und die von der Zeit unabhängig sind:

$$\cdot^{\frac{\mu^2(\tilde{\omega} - U)}{2\Omega_c} b} \sinh \lambda (c - c_0) = \frac{K}{K_1}. \tag{6}$$

Die entsprechende Gleichung für die obere Schicht ergibt sich wieder, wenn man gestrichene Buchstaben verwendet und c_2 an Stelle von c_0 schreibt:

$$e^{-\frac{\mu^2(\tilde{\omega} - U')}{2\Omega_c} b} \sinh \lambda'(c - c_2) = \frac{K'}{K'_1}. \tag{6'}$$

Unter Berücksichtigung der dynamischen Grenzflächenbedingung **151** (16) führen die Lösungen (2) und (2′) zu der folgenden Frequenzengleichung:

$$\begin{cases} Q \dfrac{(\nu - U\mu)^2}{\lambda} \operatorname{ctgh} \lambda (c_1 - c_0) + Q' \dfrac{(\nu - U'\mu)^2}{\lambda'} \operatorname{ctgh} \lambda' (c_2 - c_1) \\ \qquad = (Q - Q')(g_c - 2\Omega_b \tilde{\omega}). \end{cases} \tag{7}$$

Für Geschwindigkeiten unterhalb 500 m/sec ist das Glied $2\Omega_b \tilde{\omega}$ klein im Vergleich zu g_c. Man kann deshalb ohne großen Fehler das Glied mit Ω_b vernachlässigen.

Für die Diskussion dieser Gleichung nehmen wir zunächst den Fall *unendlicher Schichtmächtigkeiten*, wobei beide ctgh-Funktionen durch 1

die Lösungskurven für endliche Schichtmächtigkeiten in den Gebieten I, II und III zwischen den oben gefundenen Kurven für unendliche Mächtigkeiten und den kritischen Hyperbeln verlaufen müssen. Es ergibt sich wie im Abschnitt **109** Instabilität im Gebiet II.

Im Gebiet IV ist die Orbitalperiode in der oberen Schicht größer, in der unteren kleiner als der halbe Pendeltag. Also wird λ' rein imaginär, während λ reell bleibt. Die Frequenzengleichung schreibt sich dann in der folgenden reellen Form:

$$\left.\begin{aligned} & Q(\nu - U\mu)^2 \sqrt{1 - \frac{4\Omega_c^2}{(\nu - U\mu)^2}} \operatorname{ctgh} \frac{\mu(c_1 - c_0)}{\sqrt{1 - \frac{4\Omega_c^2}{(\nu - U\mu)^2}}} \\ & - Q'(\nu - U'\mu)^2 \sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{(\nu - U'\mu)^2} - 1} \operatorname{ctg} \frac{\mu(c_2 - c_1)}{\sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{(\nu - U'\mu)^2} - 1}} = (Q - Q')\mu g_c \end{aligned}\right\} \tag{7b}$$

Die beiden kritischen Hyperbeln $\mu(\tilde{\omega} - U') = \pm 2\Omega_c$ sind Lösungskurven für $c_2 - c_1 = 0$, das Argument des Kotangens ist dabei gleich π. Für endliche Werte von $c_2 - c_1$ ergeben sich jedoch keine Asymptoten für $\mu = \infty$; die Kurven schneiden die Gerade $\tilde{\omega} = U'$ und verlaufen nach oben asymptotisch gegen die Ordinatenachse, und unten berühren sie die dritte Randkurve des Gebietes, die Hyperbel $\mu(\tilde{\omega} - U) = 2\Omega_c$ (vgl. Abb. 87). Diese bildet dann die Fortsetzung der Frequenzenkurven bis zu dem an der Abszissenachse gelegenen Schnittpunkt der Hyperbeläste. Die Kurven verlaufen um so näher an der Ordinatenachse, je größer $c_2 - c_1$ ist ($c_1 - c_0$ als konstant betrachtet). Zu bemerken ist noch, daß ein Stück der Geraden $\tilde{\omega} = U'$ die Lösungskurve für $c_2 - c_1 = \infty$ darstellt. Es ergibt sich folglich Instabilität für kurze Wellen bei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten nahe der Grundgeschwindigkeit U', und für lange Wellen bei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten unterhalb dieser Grundgeschwindigkeit und bei einer Orbitalfrequenz nahe der kritischen in der unteren Schicht.

Im Gebiet V des imaginären λ findet man einen beinahe spiegelbildlich ähnlichen Verlauf der Kurven für verschiedene Werte von $c_1 - c_0$.

Im Gebiet VI sind beide Orbitalperioden größer als der halbe Pendeltag und sowohl λ wie auch λ' imaginär. Die Frequenzengleichung wird entsprechend:

$$\left.\begin{aligned} & -Q(\nu - U\mu)^2 \sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{(\nu - U\mu)^2} - 1} \operatorname{ctg} \frac{\mu(c_1 - c_0)}{\sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{(\nu - U\mu)^2} - 1}} \\ & - Q'(\nu - U'\mu)^2 \sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{(\nu - U'\mu)^2} - 1} \operatorname{ctg} \frac{\mu(c_2 - c_1)}{\sqrt{\frac{4\Omega_c^2}{(\nu - U'\mu)^2} - 1}} = (Q - Q')\mu g_c. \end{aligned}\right\} \tag{7c}$$

Eine Lösung ist immer möglich, wenn mindestens eins der Argumente der Kotangenten im zweiten Quadranten liegt, wodurch die Stromflächen in der entsprechenden Schicht eine Faltung erhalten. Im ersten Quadranten der $\mu, \omega - \frac{U+U'}{2}$-Ebene verlaufen die Kurven für verschiedene $c_1 - c_0$-Werte längs der kritischen Hyperbel von $\bar{\omega} = \infty$ und treffen die Abszissenachse im Schnittpunkt der beiden Hyperbeln, und zwar liegen sie der Hyperbel um so näher, je kleiner $c_1 - c_0$ ist. Dabei ist die Hyperbel selbst eine Lösung für $c_1 - c_0 = 0$. Im vierten Quadranten hat man angenähert spiegelbildlich ähnliche Kurven für verschiedene Werte von $c_2 - c_1$.

In der Abb. 87 sind in den Gebieten IV, V und VI zwei Lösungskurven für endliche Schichtmächtigkeiten gestrichelt eingezeichnet.

Was die Untersuchung über das schon im Kap. IX Gefundene hinaus an wesentlich Neuem gebracht hat, bezieht sich auf die Gebiete IV, V und VI in der Abb. 87: die Bewegung ändert vollständig ihren Charakter, wenn die Orbitalperiode in der einen Schicht oder in beiden Schichten den halben Pendeltag überschreitet. Vor allem treten bei diesen Wellen großer Periode neue Instabilitätsbedingungen auf. Während früher besonders die kurzen Wellen instabil waren, *können jetzt — infolge der Erddrehung — instabile Wellen von den Dimensionen und den Perioden der Zyklonen auftreten*, eine für die Zyklonentheorie höchst bedeutungsvolle Tatsache.

Sonst haben die Wellen nicht besonders große Ähnlichkeit mit den Zyklonenwellen. Dies darf natürlich nicht überraschen, solange die Diskontinuitätsfläche den Erdboden nicht schneidet und somit unten kein Keil gebildet wird. Wir werden deshalb versuchen, ob wir durch Solidifiieren der Stromflächen Begrenzungen mit Keil erhalten können.

154. Zwei zonal bewegte inkompressible Schichten mit solidifiierten Stromflächen als Grenzflächen. Aus den Integralen **153** (2), (2′) oder aus den Gleichungen der Stromflächen **153** (6), (6′) findet man die Winkel θ und θ', welche die solidifiierbaren Stromflächen mit der ab-Ebene bilden:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\mu^2(\bar{\omega} - U)}{2\Omega_e\lambda} \operatorname{tgh}\lambda(c - c_0) = \frac{\mu^2(\bar{\omega} - U)}{2\Omega_e\bar{\lambda}} \operatorname{tg}\bar{\lambda}(c - c_0),$$

$$\text{(1′)} \qquad \operatorname{tg}\theta' = \frac{\mu^2(\bar{\omega} - U')}{2\Omega_e\lambda'} \operatorname{tgh}\lambda'(c - c_2) = \frac{\mu^2(\bar{\omega} - U')}{2\Omega_e\bar{\lambda}'} \operatorname{tg}\bar{\lambda}'(c - c_2)$$

Hieraus folgt als Bedingung dafür, daß die Stromflächen beider Schichten an der Diskontinuitätsfläche $c = c_1$ dieselbe Neigung zu dieser haben, $\theta_1 = \theta_1'$:

$$\text{(2)} \qquad \frac{\bar{\omega} - U}{\lambda} \operatorname{tgh}\lambda(c_1 - c_0) = -\frac{\bar{\omega} - U'}{\lambda'} \operatorname{tgh}\lambda'(c_2 - c_1).$$

Deutet man diese solidifiierbare Fläche als den horizontalen Erdboden, so muß $\theta_1 = \theta_1' = \pi - \theta_d$ sein, wo θ_d den Winkel der Diskontinuitätsfläche mit dem Erdboden darstellt. *Dieser Winkel soll im ersten Quadranten liegen, weil die kalte und langsamer ostwärts gehende Masse nördlich der warmen und schneller ostwärts gehenden Masse liegen soll.* Entsprechend muß also $\theta_1 = \theta_1'$ im *zweiten* Quadranten liegen.

Bei reellen Werten von λ und λ', d. h. für nichtzellulare Bewegung in beiden Schichten, erkennt man sofort, daß die Gleichung (2) nur für $U < \tilde{\omega} < U'$ erfüllt werden kann, d. h. wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwischen den beiden Grundgeschwindigkeiten liegt. Da aber nach (1) θ_1 dann im ersten Quadranten liegt, ist dieser Fall für das Zyklonenproblem von geringem Interesse. Die Projektion des Gleitwirbels an der Diskontinuitätsfläche auf den Erdboden wird nämlich antizyklonisch, *und die Diskontinuitätsfläche kann sich nicht dauernd in der Atmosphäre halten* (**128**).

Ist λ imaginär und die Orbitalperiode in der unteren Schicht somit größer als der halbe Pendeltag, so folgt immer noch aus (1'), daß $\tilde{\omega} > U'$ ist. Für $\lambda^2 < 0$, $\lambda'^2 > 0$ ergibt sich aber aus **153** (3):

$$(\nu - U\mu)^2 < 4\Omega_c^2 < (\nu - U'\mu)^2,$$

und hieraus erhält man für $U' > U$:

$$\tilde{\omega} < \frac{U' + U}{2},$$

ein Resultat, das dem obigen, wonach $\tilde{\omega} > U'$ ist, widerspricht. *In diesem Falle ergibt sich also keine brauchbare Lösung.*

Wenn $\lambda^2 > 0$ und $\lambda'^2 < 0$, findet man in ganz entsprechender Weise, *daß auch dann keine Lösung möglich ist.*

Sind schließlich sowohl λ wie λ' imaginär, in welchem Falle die Bewegung in beiden Schichten zellular ist und Orbitalperioden größer als der halbe Pendeltag besitzt, so ergibt sich aus (2):

$$(2') \qquad \frac{\tilde{\omega} - U}{\bar{\lambda}} \operatorname{tg} \bar{\lambda} (c_1 - c_0) = \quad U' \operatorname{tg} \bar{\lambda}' (c_2 - c_1).$$

Hieraus ersieht man, daß *die Winkel θ_1 und θ_1' nur in den unten* (S. 580) *angegebenen drei Fällen* (a), (b), (c) *die Möglichkeit haben, im zweiten Quadranten zu liegen.*

Für den Fall, daß die somit in dem gleichen Quadranten liegenden Winkel auch einander gleich werden und folglich eine gemeinschaftliche horizontale Tangentenebene der beiden Stromflächen definieren können, ist der Verlauf der zusammengesetzten solidifiierten Stromfläche in der Abb. 88a, b, c gegeben:

Die schräge gestrichelte Gerade stellt die Diskontinuitätsfläche dar; die gekrümmte, voll ausgezogene Linie ist die Profilkurve der zusammen-

gesetzten Stromfläche, die asymptotisch zu zwei zu der Diskontinuitätsfläche parallelen Ebenen verläuft; die Stromfläche und diese beiden Asymptotenebenen hat man sich solidifiiert zu denken.

Diese Abbildung, die auch für spätere Untersuchungen grundlegend sein wird, veranlaßt gewisse wichtige Überlegungen. Uns interessiert das Feld nur innerhalb des kleinen gestrichelten Rechteckes, wo die solidifiierte Stromfläche als angenähert eben und horizontal gelten kann und

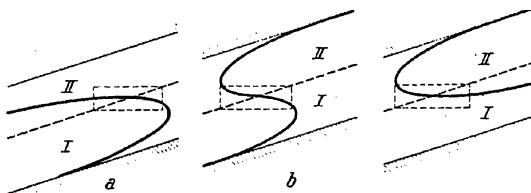



Abb. 88. Solidifiierbare Stromflächen.

von der schrägen Diskontinuitätsfläche geschnitten wird. Unsere Aufgabe ist, zu untersuchen, ob innerhalb dieses kleinen Gebietes ein Bewegungsfeld bestehen kann, ähnlich dem Bewegungsfeld in einer Zyklonenwelle, die sich längs des Erdbodens fortpflanzt. Daß die solidifiierte Stromfläche innerhalb des Rechteckes mit genügender Annäherung als horizontaler Erdboden gedeutet werden kann, geht aus den Bemerkungen über die in Frage kommenden Dimensionen hervor. Betrachtet man ein Rechteck, dessen Länge etwa mit dem Durchmesser der Zyklonen (2000 km) übereinstimmt, so zeigt eine einfache Rechnung, daß die Krümmung der Stromfläche innerhalb des Rechteckes immer *kleiner* ist als diejenige der Erdoberfläche. Der Fehler, den wir begehen, wenn wir die Horizontalebene innerhalb des Rechteckes durch die solidifiierbare Stromfläche ersetzen, wird folglich *kleiner* als der Fehler, den wir schon begangen haben, als wir den Erdboden als eben voraussetzten.

Eine völlig brauchbare Lösung des Zyklonenproblems wird sich offenbar ausschließlich unter der Voraussetzung ergeben, daß das Feld eine endliche Intensität nur innerhalb des hervorgehobenen „kleinen" Rechteckes hat und im großen Raum außerhalb schnell bedeutungslos wird. In dieser Hinsicht verhalten sich aber die nichtzellulare und die zellulare Lösung wesentlich verschieden. Bei der nichtzellularen Bewegung nimmt die Feldintensität exponentiell mit dem Abstande von der Diskontinuitätsfläche ab und wird mit wachsendem Abstand von dieser Fläche bald bedeutungslos. Bei der zellularen Bewegung dagegen besitzt das Feld volle Intensität im ganzen Raume innerhalb der solidifiierten Feldgrenzen, und die Bewegung in dem uns interessierenden kleinen Raum wird nur eine unbedeutende Begleiterscheinung zu der Gesamtbewegung.

Atmosphäre entsprechen, so kommt man auf Fortpflanzungsgeschwindigkeiten von der Größenordnung 1000 m/sec. Es ist offenbar eine von der Erddrehung abhängige, formal mögliche Trägheitswelle, die aber wegen ihrer Stabilität und ihrer großen westwärtsgerichteten Geschwindigkeit von den Zyklonenwellen ganz verschieden ist.

Nachdem somit der Fall (c) erledigt ist, haben wir die beiden Wurzeln zu betrachten, die sich angenähert aus der Gleichung zweiten Grades (6) ergeben. Da $\Delta U > 0$, sieht man sofort, daß $\bar{\omega} > 0$, d. h. *wir haben die Fälle* (a) *und* (b), Abb. 88a und b. Da $\bar{\omega}$ sein Vorzeichen nicht wechseln kann, liegt ein einseitiger Fortpflanzungssinn vor, wie früher in einer einzigen Schicht nach der Einführung der solidifiierten Stromfläche als Grenzfläche (**146**). Da $\bar{\omega}$ positiv ist, geht die Fortpflanzung nach Osten, und da nach Voraussetzung die kalten Massen links von dieser Fortpflanzungsrichtung liegen, *haben diese Wellen die Fortpflanzungsrichtung der Zyklonen.*

Um jetzt diese ostwärts gehenden Wellen in bezug auf Stabilität zu untersuchen, lösen wir (6) nach $\bar{\omega}$ auf. Gleichzeitig können wir, mit Rücksicht auf die Anwendungen auf die Atmosphäre, das Verhältnis der Dichten $\Delta Q/\bar{Q}$ durch das entsprechende Temperaturverhältnis $\Delta\Theta/\bar{\Theta}$ ersetzen. Dann erhält man:

$$\bar{\omega} = \bar{U} + \frac{2\Omega_c^2}{3\mu^2\Delta U}\frac{\Delta\Theta}{\bar{\Theta}} \pm \sqrt{\left(\frac{2\Omega_c^2}{3\mu^2\Delta U}\frac{\Delta\Theta}{\bar{\Theta}}\right)^2 + \frac{4\Omega_c^2\bar{U}}{3\mu^2\Delta U}\frac{\Delta\Theta}{\bar{\Theta}} - \frac{(\Delta U)^2}{12}} \tag{8}$$

Wenn kein Temperatursprung vorhanden ist, ergibt sich also immer Instabilität des Grundzustandes. Auch bei vorhandenem Temperatursprung kann der Grundzustand kurzen Wellen gegenüber instabil werden, wenn nur der Windsprung genügend groß ist.

Die Bedingung der Instabilität läßt sich in der Form

$$L^2 < \frac{6\pi^2\Delta U}{\Delta\Theta}\bar{\Theta}\left[-\bar{U} + \sqrt{\bar{U}^2 + \frac{(\Delta U)^2}{12}}\right] \tag{9}$$

schreiben. Setzt man die mittlere Geschwindigkeit der Schichten gleich Null, $\bar{U} = 0$, und $\Omega_c = 0{,}6313 \cdot 10^{-4}$, was einer Breite von 60° entspricht, und wählt man bei einem Windsprung von 10 m/sec, $\Delta U = 10$ m/sec, einen Temperatursprung $\Delta\Theta/\bar{\Theta} = 1/250$, so ergibt sich Instabilität für alle Wellen kürzer als $1{,}035 \cdot 10^7$ m, d. h. für alle Wellen kürzer als der Erdquadrant. Man hat folglich Instabilität bei allen wirklich vorkommenden Wellen. Bei größerem Temperatursprung rückt die Stabilitätsgrenze allerdings zu kleineren Wellenlängen herunter, aber bei den in der Atmosphäre vorkommenden Sprüngen der Temperatur und des Windes nicht weiter als zu Wellenlängen der Größenordnung 1000 km. *Unsere ostwärts gehenden Wellen werden also instabil bei Wellenlängen von den Dimensionen der Zyklonen.*

Unter Anwendung der auf S. 418 benutzten Methode kann man das exakte Stabilitätskriterium der vollständigen Gleichung (5) entnehmen. Für größere Temperatursprünge gilt (9) nicht mehr. Während nach der Näherungsformel (9) der Stabilitätsbereich mit dem Temperatursprunge in solcher Weise zunehmen sollte, daß im Grenzfall eines unendlichen Temperatursprunges alle Wellenlängen stabil sind, bleibt in Wirklichkeit immer ein Instabilitätsbereich der kurzen Wellen bestehen.

In zwei wichtigen Punkten, Instabilität und einseitiger Fortpflanzungsrichtung, hat sich somit eine auffällige Analogie mit den Zyklonenerscheinungen gezeigt. Wir haben aber noch das *Stromlinienbild* dieser Wellen zu betrachten. Die Bewegung ist in beiden Schichten zellular, und die Stromlinien in den solidifiierbaren Stromflächen sind vom elliptischen Typus. Es fragt sich, inwieweit diese Stromlinien auf dem horizontalen Teil der solidifiierten Fläche Ähnlichkeit mit den Stromlinien einer meteorologischen Karte einer jungen Zyklone aufweisen.

Der elliptische Punkt befindet sich dort auf der solidifiierten Stromfläche, wo diese eine zur Diskontinuitätsfläche normale Tangentenebene hat. Die obere Schicht gibt die *Stromlinien südlich der Schnittlinie der Diskontinuitätsfläche mit dem horizontalen Erdboden.* Im Falle (a), wo die Welle größere Geschwindigkeit als die Grundströmungen hat, fällt der elliptische Punkt der südlichen Stromlinien nördlich der Diskontinuitätslinie und erscheint folglich nicht im Felde. D. h. die Stromlinien südlich der Diskontinuitätslinie haben eine Ausbuchtung nach Süden, was mit den meteorologischen Karten übereinstimmt bei Zyklonen, die schneller als beide Ströme laufen.

Die *Stromlinien nördlich der Diskontinuitätslinie,* die der unteren, kalten Schicht angehören, haben ihren elliptischen Punkt in unendlicher Ferne nördlich der Diskontinuitätslinie. Sie haben also eine Ausbuchtung nach Süden, *in schroffem Gegensatz zu den Zyklonen, welche hier Stromlinien mit starker Ausbuchtung nach Norden aufweisen.*

Daß zu dieser qualitativen Diskrepanz noch eine quantitative hinzukommt, darf nicht überraschen: solange die Wellen instabil und dadurch in einem Hauptpunkte den zyklonischen Wellen ähnlich sind, haben sie viel kleinere Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und entsprechend größere Perioden als die Zyklonen: die Perioden betragen meist mehrere Tage, während sie bei den Zyklonen von der Größenordnung eines einzigen Tages sind.

Wie vorauszusehen war, hat unsere Untersuchung wohl zu einer teilweisen Ähnlichkeit mit den Zyklonen geführt, nicht aber eine vollständige Zyklonentheorie gegeben. Um die weitere Untersuchung frucht-

bar zu gestalten, ist es jedoch wichtig, den Grund des Mißlingens festzustellen.

Zunächst könnte es naheliegend erscheinen, den Grund des Mißlingens ganz und gar auf die *Methode* zu legen: die zum Solidifiieren geeigneten Stromflächen existieren in der elementaren Lösung nur, wenn die Bewegung beiderseits der Diskontinuitätsfläche zellular ist. In dem von gewissen Gesichtspunkten aus mehr versprechenden Fall der nichtzellularen Bewegung beiderseits der Fläche versagt diese einfache Methode. Hätten wir aber das Problem ganz allgemein als *Randwertproblem* mit den verlangten Grenzflächenbedingungen gelöst (vgl. S. 541), so hätten wir die nichtzellulare Bewegung mitberücksichtigen können und dabei sicher sogleich das richtige Stromlinienbild gefunden.

Eine befriedigende Theorie hätte sich aber dennoch nicht ergeben, und zwar aus mehreren Gründen. Die Bewegung innerhalb des uns interessierenden kleinen Raumes wäre allerdings nicht *in gleichem Maße* wie bei der Zellularbewegung eine unbedeutende Begleiterscheinung zu der weitverbreiteten Bewegung außerhalb geworden. Das in der Nähe der Diskontinuitätsfläche konzentrierte nichtzellulare Bewegungsfeld hat aber in der Nähe dieser Fläche überall gleich große Intensität, wie weit wir uns auch längs dieser von der horizontalen „Erdoberfläche" entfernen. Um das Feld zu begrenzen, hätte man das Problem noch durch die Einführung einer starren oder freien Grenzfläche komplizieren müssen.

Aber auch dies hätte eine andere Schwierigkeit nicht beseitigt:

Im Abschnitt **147** (B) haben wir nämlich gesehen, daß in einer homogen-inkompressiblen Schicht die Orbitalumläufe bei der nichtzellularen Wellenbewegung nie den halben Pendeltag überschreiten können, während dagegen die Zyklonenperiode von der Größenordnung des ganzen Pendeltages ist. Verbinden wir nun dies mit den oben gefundenen negativen Resultaten für den Fall der zellularen Bewegung, so werden wir zu dem folgenden Schluß gezwungen:

In einem aus homogen-inkompressiblen Schichten bestehenden flüssigen System können weder die zellularen noch die nichtzellularen Wellen eine befriedigende Übereinstimmung mit den Zyklonenwellen geben: bei brauchbaren großen Perioden hat man ein unbrauchbares Stromlinienfeld, bei brauchbarem Stromlinienfeld hat man unbrauchbar kleine Perioden.

Dieses negative Resultat ist von großer Wichtigkeit, es zeigt deutlich, daß man mit dem einfachsten und zuerst zu versuchenden Medium, der homogen-inkompressiblen Flüssigkeit, nicht zum Ziele kommt. Im Hinblick auf die weitere Arbeit präzisiert dieses negative Resultat sofort in einem wichtigen Punkte die Voraussetzungen, unter denen die in den Abschnitten **139** **(I)** bis **(III)** gegebene elementare Zyklonentheorie gültig bleibt. Wir haben in diesen elementaren Entwicklungen ausdrücklich

vermieden, die physikalischen Eigenschaften der flüssigen Schichten genauer festzusetzen. Die ganze Entwicklung fußt aber auf der Voraussetzung, daß die Wellen von dem gewöhnlichen nichtzellularen Typus sind. Implizite aber besagt dies, daß das flüssige Medium ein solches sein muß, in dem eine nichtzellulare Bewegung mit Orbitalperioden von der vollen Länge der Zyklonenperiode bestehen kann. Für den weiteren Ausbau der mathematischen Theorie werden die Bedingungen des Überganges von der nichtzellularen zur zellularen Bewegung von grundlegender Bedeutung sein.

Nun kann eine Zellularbewegung durch zwei voneinander unabhängige Ursachen entstehen: in *autobarotropen* Medien mit ihrem indifferenten inneren Gleichgewichte durch die Erddrehung und nur durch die Erddrehung; in den *heterotropen* Medien, mit ihrem stabilen inneren Gleichgewichte, zugleich eben durch dieses innere stabile Gleichgewicht. Bei den autobarotropen Medien, zu denen ja die homogen-inkompressible Flüssigkeit gehört, wird deshalb die Trägheitsperiode immer den Übergang von der einen zu der anderen Bewegungsform geben. Bei den heterotropen Medien mit ihrem baroklinen Massenfelde erfolgt aber der Übergang ganz anders: wir haben es schon im Falle der Gleichgewichtsstörung des isothermen Mediums bei vorhandener Erddrehung (**150**) gesehen.

Wir haben deshalb jeden Grund zu versuchen, ob nicht mit dem isothermen Medium das zu erzielen ist, was im Falle des homogen-inkompressiblen nicht gelungen ist.

Die Untersuchung wird wesentlich komplizierter. Inwieweit die Methode des Solidifiierens der Stromflächen dabei mehr Erfolg als in dem jetzt behandelten Fall haben wird, läßt sich nicht voraussehen. Wenn sich aber diese Methode als brauchbar erweisen sollte, so läßt sich sogleich voraussehen, daß die Lösung einen wichtigen Vorzug haben wird. Im isothermen Medium wird, genau wie in dem homogen-inkompressiblen, die Intensität des nichtzellularen Bewegungsfeldes exponentiell mit dem Abstande von der Diskontinuitätsfläche abnehmen. Im Falle des isothermen Mediums kommt aber hinzu, daß die Dichte exponentiell mit dem Abstande vom Erdboden abnimmt. Diese beiden Bedingungen haben zur Folge, daß das dynamisch bedeutungsvolle Feld eng begrenzt wird: die größte Intensität wird dort auftreten, wo die Diskontinuitätsfläche den horizontalen Erdboden schneidet oder in meteorologischer Sprache: beiderseits der hin- und herwogenden Polarfront; und von dieser Stelle der maximalen Störung aus wird das Feld sowohl seitwärts wie aufwärts schnell an Bedeutung abnehmen.

155. Störungen des zonal bewegten isothermen Mediums. Für den Fall der Isothermie hat das Gleichungssystem **151** (12) immer noch

konstante Koeffizienten. Wir nehmen auch hier, wie oben im Falle der Inkompressibilität, an, daß die Amplituden Funktionen nur von c sind; die Richtung der c-Achse lassen wir aber vorläufig unbestimmt. Aus den Störungsgleichungen erhalten wir dann durch Einsetzen der Wellenlösung **151** (13) ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Amplituden. Hieraus können wieder drei Amplituden durch die vierte, z. B. die Normalamplitude C, ausgedrückt werden, wodurch sich ergibt:

$$(1)\quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{\mu N}\{[(\nu - U\mu)^2 - (\Gamma-\gamma)(g_b + 2\Omega_c U)(g_b + 2\Omega_c \varpi)]\,C' \\ &\quad - (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,\gamma\,(\nu - U\mu)^2 C\}, \\ B &= \frac{1}{N}\{[2\Omega_c - (\Gamma-\gamma)(g_b + 2\Omega_c U)(\varpi - U)](\varpi - U)\,C' \\ &\quad + (g_c - 2\Omega_b\varpi)[\Gamma(g_b + 2\Omega_c U) - \gamma(g_b + 2\Omega_c\varpi)]\,C\}, \\ D + (g_b + 2\Omega_c U)B &= \frac{1}{N}\{M(\varpi - U)^2 C' - (g_c - 2\Omega_b\varpi)\big[(\nu - U\mu)^2 \\ &\quad - (g_b + 2\Omega_c U)[\Gamma(g_b + 2\Omega_c U) - \gamma(g_b + 2\Omega_c\varpi)]\big]\,C\}. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung sind hier die Hilfsgrößen

$$(2)\qquad M = (\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2 - (\Gamma-\gamma)\,(g_b + 2\Omega_c U)^2,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} N = (\nu - U\mu)^2\,[1 - \gamma\,(\varpi - U)^2] \\ \quad - (g_b + 2\Omega_c\varpi)\,[\Gamma(g_b + 2\Omega_c U) - \gamma\,(g_b + 2\Omega_c\varpi)] \end{cases}$$

eingeführt worden. Ferner findet man die folgende Differentialgleichung für die Normalamplitude:

$$(4)\qquad \begin{aligned} MC'' - 2M\lambda C' + \{-\mu^2 N + \mu^2 (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,[\Gamma(g_c - 2\Omega_b U) \\ - \gamma\,(g_c - 2\Omega_b\varpi)]\}\,C = 0, \end{aligned}$$

mit dem folgenden Wert von λ:

$$(5)\quad \lambda = \frac{\Gamma}{2M}\{(g_c - 2\Omega_b U)\,[(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2] - 4\Omega_b\Omega_c\,(g_b + 2\Omega_c U)\}.$$

Die Lösung von (4) ist exponentiell:

$$C = C_0\, e^{(\lambda \pm \eta)c}$$

mit dem Wert von η:

$$(6)\quad \eta^2 = \lambda^2 + \frac{\mu^2}{M}\{N - (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,[\Gamma(g_c - 2\Omega_b U) - \gamma\,(g_c - 2\Omega_b\varpi)]\}.$$

Führen wir sogleich eine starre Grenzfläche im Niveau $c = c_0$ ein, wo wir $C = 0$ verlangen, so finden wir die Lösung der Differentialgleichung (4) in den folgenden Formen:

Bei der nichtzellularen Bewegung ($\eta^2 > 0$):

$$(7)\qquad C = C_0\, e^{\lambda c}\, \frac{1}{\eta} \sinh \eta\,(c - c_0).$$

Im Übergangsfall ($\eta = 0$):

$$(7') \qquad C = C_0 e^{\lambda c}(c - c_0).$$

Bei der zellularen Bewegung ($\eta^2 < 0$, $\eta = i\zeta$):

$$(7'') \qquad C = C_0 e^{\lambda c} \frac{1}{\zeta} \sin\zeta(c - c_0).$$

Außer dem uns von früher bekannten Übergangsfall (7') haben wir aber jetzt noch einen wichtigen *Fall der Entartung* zu berücksichtigen, welcher dann eintritt, wenn $M = 0$ ist. Diese entartete Bewegung befriedigt nicht die Grenzflächenbedingung $C = 0$ für $c = c_0$, und sie hat für uns nur insofern Bedeutung, als sie mit *einer Orbitalfrequenz verläuft, die eine Größe von fundamentaler Wichtigkeit ist.* Setzt man in (2) $M = 0$, so findet man nämlich:

$$(8) \qquad (\nu - U\mu)^2 = 4\Omega_c^2 + (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2.$$

In zwei Fällen reduziert sich diese Frequenz auf die reine Trägheitsfrequenz, $(\nu - U\mu)^2 = 4\Omega_c^2$, und die entartete Bewegung auf die reine Trägheitsbewegung:

1. wenn das Medium autobarotrop ist, $\Gamma - \gamma = 0$, mit entsprechendem indifferenten inneren Gleichgewichte;

2. wenn keine Horizontalbewegung vorhanden ist, $U = 0$, so daß die ungestörte freie Oberfläche oder die innere Diskontinuitätsfläche horizontal wird, wodurch $g_b = 0$.

Ein Beispiel für 1. war das bewegte oder unbewegte homogen-inkompressible Medium, ein Beispiel für 2. das unbewegte isotherme Medium.

Die von der reinen Trägheitsbewegung verschiedene, entartete Bewegung tritt deshalb erst jetzt auf, wo wir ein bewegtes, nichtbarotropes Medium vor uns haben. Die Orbitalfrequenz dieser Bewegung werden wir die *Entartungsfrequenz* nennen: sie kann als eine Trägheitsfrequenz aufgefaßt werden, die durch die Wirkung der Schwerkraft im Innern des baroklinen Massenfeldes modifiziert, und zwar vergrößert worden ist. Entsprechend ist die *Entartungsperiode kürzer als die reine Trägheitsperiode.*

Ehe wir in dem folgenden Abschnitt zu der vollständigen Diskussion unserer Formeln übergehen, fügen wir noch die folgende allgemeine Bemerkung hinzu. Ohne auf dynamische Betrachtungen einzugehen, sieht man ein, daß eine zellulare Bewegung in der Schicht zwischen zwei parallelen starren Grenzflächen bestehen kann. Soll andererseits die obere Grenzfläche frei sein, so folgt aus der MARGULESschen Formel **151** (6), daß $g_b + 2\Omega_c U = 0$ sein muß. Zur Befriedigung der dynamischen Grenzflächenbedingung an der freien Oberfläche muß dann der starre Boden dieser Fläche parallel sein, und man findet nichts wesentlich Neues über das hinaus, was wir in **150** für die Gleichgewichtsstörung

einer einzigen isothermen Schicht gefunden haben. Wir richten deshalb im folgenden sogleich unsere Aufmerksamkeit auf *zwei* bewegte isotherme Schichten.

156. Diskussion von Hilfsgrößen. Die vielen verschiedenen Wellengattungen, die nach unseren früheren Untersuchungen im isothermen Medium vorkommen können, treten in den Formeln des vorhergehenden Abschnittes in den modifizierten Formen auf, die aus der Erddrehung in Verbindung mit der Horizontalbewegung der Schichten folgen. Es liegt in der Natur der Sache, daß eine umständliche Diskussion erforderlich ist, um sie unter den neuen Verhältnissen wiederzuerkennen und um bei dem Heraussieben keine der für uns brauchbaren Lösungen zu verlieren.

Um die Formeln einfach schreiben zu können, haben wir außer der schon bekannten Hilfsgröße η noch die neuen Größen M und N eingeführt. Jetzt schreiben wir η in den drei für die Diskussion geeigneten Formen:

$$(1)\quad \eta^2 = l^2 + \mu^2 \frac{NE}{r^2 M}, \quad \eta^2 = m^2 + \frac{NF}{s^2 M}, \quad \eta^2 M^2 (\varpi - U)^4 = n^2 + NG,$$

wo noch die folgenden acht Hilfsgrößen auftreten:

$$(2)\quad \begin{aligned} r &= (\nu - U\mu)^2 - (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)(g_b + 2\Omega_c \varpi), \\ s &= (\varpi - U)[2\Omega_c - (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)(\varpi - U)]. \end{aligned}$$

$$(3)\quad l = \lambda - \frac{1}{r}(g_c - 2\Omega_b \varpi)\gamma(\nu - U\mu)^2.$$

$$(4)\quad m = \lambda + \frac{1}{s}(g_c - 2\Omega_b \varpi)[\Gamma(g_b + 2\Omega_c U) - \gamma(g_b + 2\Omega_c \varpi)].$$

$$(5)\quad \begin{cases} n = M(\varpi - U)^2 \lambda - (g_c - 2\Omega_b \varpi)\{(\nu - U\mu)^2 \\ \quad - (g_b + 2\Omega_c U)[\Gamma(g_b + 2\Omega_c U) - \gamma(g_b + 2\Omega_c \varpi)]\}. \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{aligned} E = {} & [(\nu - U\mu)^2 - (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)(g_b + 2\Omega_c \varpi)]^2 \\ & - \Gamma(g_c - 2\Omega_b U)(g_c - 2\Omega_b \varpi)[(\nu - U\mu)^2 - (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)(g_b + 2\Omega_c \varpi)] \\ & + \gamma(g_c - 2\Omega_b \varpi)^2[(\nu - U\mu)^2 - (F - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2]. \end{aligned}$$

$$(7)\quad \begin{aligned} F = {} & (\nu - U\mu)^2[2\Omega_c - (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)(\varpi - U)]^2 \\ & - 2\Omega_c \Gamma(g_c - 2\Omega_b U)(g_c - 2\Omega_b \varpi)[2\Omega_c - (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)(\varpi - U)] \\ & + (g_c - 2\Omega_b \varpi)^2[4\Omega_c^2 \gamma - (\Gamma - \gamma)^2(g_b + 2\Omega_c U)]. \end{aligned}$$

$$(8)\quad \begin{aligned} G = {} & \mu^2(\varpi - U)^4[(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2 - (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2] \\ & - (g_c - 2\Omega_b \varpi)^2[(\nu - U\mu)^2 - (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2] \\ & - 2\Omega_c \Gamma(g_c - 2\Omega_b U)(g_c - 2\Omega_b \varpi)(\varpi - U)(g_b + 2\Omega_c U). \end{aligned}$$

Die Größen $2\Omega_b U$ und $2\Omega_b \bar{\omega}$ sind bei allen vorkommenden Werten von U und $\bar{\omega}$ klein im Vergleich zu g_c und werden deshalb später in den Verbindungen $g_c - 2\Omega_b U$ und $g_c - 2\Omega_b \bar{\omega}$ vernachlässigt.

Um nach dieser Vereinfachung die Hilfsgrößen in ihrer Abhängigkeit von μ und $\bar{\omega}$ zu untersuchen, zeichnet man Kurven für konstante Werte dieser Größen und besonders ihre Nullkurven in ein $\mu, \bar{\omega} - U$-Diagramm ein. Dieses Diagramm wird uns alle späteren Diskussionen sehr erleichtern. Da Symmetrie um die Ordinatenachse vorliegt, braucht man nur die Halbebene $\mu > 0$ zu betrachten. *Der Verlauf der Kurven ist, je nach dem Werte des in* **151** (11) *definierten Ausdruckes* $g_b + 2\Omega_c U$, *zum Teil sehr verschiedenartig.* Deshalb müssen mehrere Diagramme mit verschiedenen Werten dieses Parameters $g_b + 2\Omega_c U$ gezeichnet werden, wobei wir für $U' > U$, $\Theta' > \Theta$ nur positive Werte zu berücksichtigen brauchen.

Nach **155** (2) bestimmt die Gleichung $M = 0$ die *Entartungsfrequenz*, die, wie erwähnt, für $g_b + 2\Omega_c U = 0$ mit der wahren Trägheitsfrequenz zusammenfällt, aber für von Null verschiedene Werte dieses Parameters größer ist. In unserem Diagramm Abb. 89, wo die Kurve $M = 0$ gestrichelt eingezeichnet ist, stellt sie eine gleichschenklige Hyperbel dar mit den Koordinatenachsen als Asymptoten. Zwischen den Hyperbelästen ist $M < 0$.

Für $g_b + 2\Omega_c U = 0$, d. h. wenn kein Windsprung vorliegt, zerfällt die in **155** (3) definierte Größe N in zwei Faktoren, und die Gleichung $N = 0$ wird:

$$N = (\bar{\omega} - U)^2 \{\mu^2 - \gamma [(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2]\} = 0 .$$

Durch Nullsetzen des ersten Faktors ergibt sich die Abszissenachse $\bar{\omega} - U = 0$ als singuläre Doppelwurzel. Durch Nullsetzen des zweiten Faktors ergeben sich die *durch Erddrehung und Konvektion modifizierten Kurven der* LAPLACE*schen Schallgeschwindigkeit.* Sie verlaufen in der Nähe der Ordinatenachse wie die gleichschenkligen Hyperbeln $\nu - U\mu = \pm 2\Omega_c$ und nähern sich im übrigen asymptotisch den horizontalen Schallgeraden $\bar{\omega} - U = \pm \sqrt{1/\gamma}$.

Wenn der Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ von Null verschieden aber klein ist, und also ein kleiner Windsprung vorliegt, ergeben sich nur kleine Änderungen in dem Verlauf der beiden letzten N-Kurven (vgl. die Abb. 89 A); insbesondere bleibt die frühere Hyperbelform in der Nähe der Ordinatenachse bestehen. Die Doppelwurzel dagegen, welche früher die Abszissenachse ergab, geht in zwei von μ abhängige Wurzeln über, die eine Kurve auf jeder Seite der Abszissenachse ergeben. Für große μ nähern sich diese Kurven asymptotisch der Abszissenachse wie die

gleichschenkligen Hyperbeln $(\nu - U\mu)^2 = (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2$. Wie aus **155** (3) zu ersehen ist, schneiden sie die Ordinatenachse in den Punkten:

$$\varpi - U = \frac{\Gamma - \gamma \; g_b + 2\Omega_c U}{2\Omega_c} \qquad \varpi - U = -\frac{g_b + 2\Omega_c U}{2\Omega_c}, \tag{9}$$

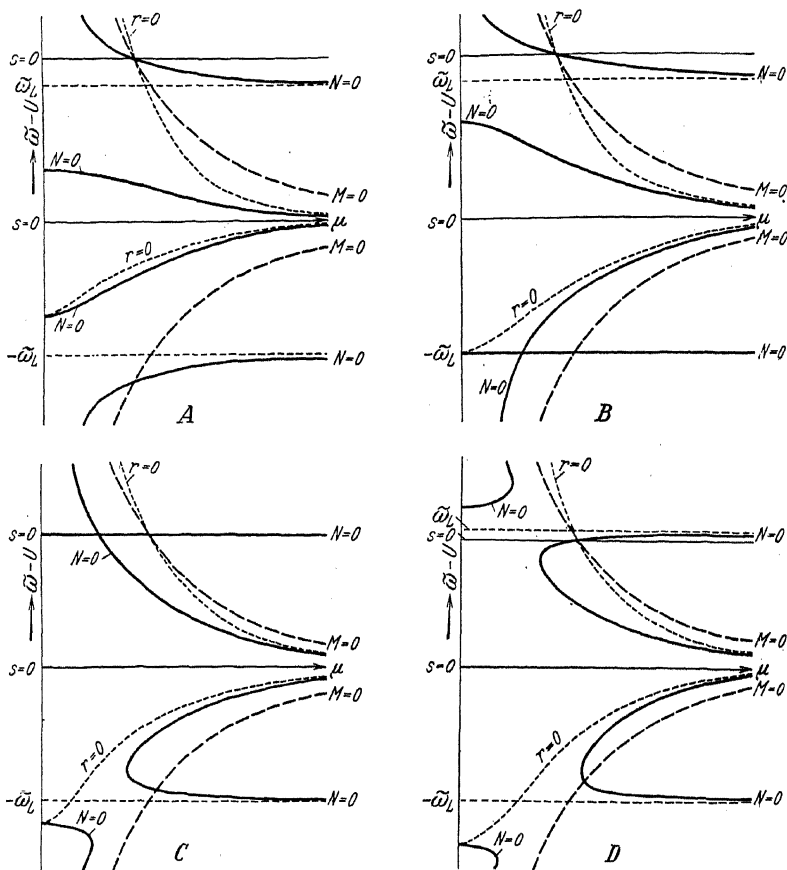



Abb. 89. Die Kurven $M = 0$, $N = 0$, $r = 0$, $s = 0$.

von welchen der erstere oberhalb der Abszissenachse, der letztere unterhalb, und zwar weiter entfernt liegt. Es ist wichtig zu beachten, daß N innerhalb dieser Kurven negativ ist.

Für wachsende Werte des Parameteıs $g_b + 2\Omega_c U$, d. h. bei zunehmendem Windsprung, rücken die Schnittpunkte (9) ständig auseinander. Wenn speziell der *untere kritische Parameterwert*

$$g_b + 2\Omega_c U = 2\Omega_c \sqrt{1/\gamma} \tag{10}$$

vorliegt, so ergibt sich für den unteren Schnittpunkt: $\varpi - U = -\sqrt{1/\gamma}$; nach **155** (3) ist dann *die Schallgerade eine Lösung der Gleichung* $N = 0$ (Abb. 89 B). Die andere Lösung im vierten Quadranten ist durch eine zu beiden Koordinatenachsen asymptotisch verlaufende Kurve gegeben, welche die Schallgerade in dem Punkt

$$(11) \qquad \left(\Omega_c \sqrt{2\Gamma}, \; -\sqrt{1/\gamma}\right)$$

schneidet, der also ein Doppelpunkt der Kurve $N = 0$ ist.

Für noch größere Werte des Parameters $g_b + 2\Omega_c U$ erfolgt eine vollständige Änderung in dem Verlauf der Kurven $N = 0$. Der im Unterschallgebiet des vierten Quadranten verlaufende Kurvenast biegt nach Erreichen eines minimalen μ-Wertes mit *vertikaler Tangente* um und geht asymptotisch gegen die Schallgerade. Der Kurvenast des Oberschallgebietes fängt an der Ordinatenachse an, erreicht einen maximalen μ-Wert und geht asymptotisch gegen die negative Ordinatenachse (Abb. 89 C). In dieser Figur ist der *obere kritische Parameterwert*

$$(12) \qquad g_b + 2\Omega_c U = 2\Omega_c \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{\Gamma - \gamma}$$

gewählt worden, in welchem Falle der obere Schnittpunkt (9) von $N = 0$ mit der Ordinatenachse gerade in die Schallgerade $\varpi - U = \sqrt{1/\gamma}$ fällt. Diese ist dann ihrerseits eine Lösung von $N = 0$, und man findet auch hier einen Doppelpunkt, nämlich:

$$(13) \qquad \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$

Wenn schließlich der Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ noch größer wird, ergibt sich ein ganz entsprechender Umschlag in dem Kurvenverlauf des ersten Quadranten, wie es schon oben für den vierten Quadranten auseinandergesetzt worden ist (Abb. 89 D). Je größer der Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ ist, desto mehr rücken die Kurven nach größeren Abszissen hinüber.

Von Bedeutung sind auch die Schnittpunkte zwischen den Kurven $M = 0$ und $N = 0$. Für die Ordinaten derselben ergibt sich:

$$(14) \qquad \varpi - U = \frac{2\Omega_c}{\Gamma - \gamma \; g_b + 2\Omega_c U}, \quad \varpi - U = -\frac{1}{\gamma} \frac{2\Omega_c}{g_b + 2\Omega_c U}.$$

Für kleine Werte des Parameters $g_b + 2\Omega_c U$ liegt der erste Punkt im oberen, der zweite im unteren Oberschallgebiet. Für den unteren kritischen Parameterwert (10) ist der untere Schnittpunkt zu der Schallgeraden hinaufgerückt; die Abszisse ist dabei:

$$\mu = 2\Omega_c \sqrt{\Gamma},$$

also $\sqrt{2}$mal größer als für den Doppelpunkt (11). Für den oberen kritischen Parameterwert (12) fällt der obere Schnittpunkt entsprechend in die Schallgerade; die Abszisse ist dann:

$$\mu = 2\Omega_c \sqrt{\frac{\Gamma\gamma}{\Gamma - \gamma}},$$

also wieder das $\sqrt{2}$fache von derjenigen des Doppelpunktes (13). Für noch größere Werte des Parameters $g_b + 2\Omega_c U$ fallen beide Schnittpunkte in die Unterschallgebiete, und zwar der Abszissenachse um so näher, je größer der Parameterwert ist.

Die Gleichung $r = 0$ stellt nach (2) im $\mu, \tilde{\omega} - U$-Diagramm zwei zu beiden Seiten der Abszissenachse verlaufende Kurven dar (in der Abb. 89 punktiert eingezeichnet); im Gebiet zwischen diesen Kurven ist $r < 0$. Für große μ sind sie angenähert Hyperbeln mit derselben Gleichung wie die inneren Zweige von $N = 0$: $(\nu - U\mu)^2 = (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2$, und zwar nähern sie sich diesen Kurven von oben für wachsende μ. Die Kurve des vierten Quadranten verläuft somit oberhalb des entsprechenden Zweiges von $N = 0$; sie schneidet die Ordinatenachse in demselben Punkt (9) wie diese Kurve. Die Kurve des ersten Quadranten schneidet $N = 0$ in dem oberen Schnittpunkt (14) zwischen $M = 0$ und $N = 0$ und nähert sich der Ordinatenachse gemäß der Gleichung:

$$\mu^2 (\tilde{\omega} - U) = (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)\, 2\Omega_c .$$

Die Gleichung $s = 0$ (in der Abb. 89 dünn eingezeichnet) besteht nach (2) einfach aus der Abszissenachse und der horizontalen Geraden durch den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der Kurven $M = 0$, $N = 0$ und $r = 0$. Im Gebiet zwischen diesen beiden horizontalen Geraden ist $s > 0$.

Die Gleichung $E = 0$ gibt eine *modifizierte Transversalfrequenz* (S. 328). Aus (6) erhält man nämlich für $g_b + 2\Omega_c U = 0$:

$$E = (\nu - U\mu)^2 \{(\nu - U\mu)^2 - g_c^2 (\Gamma - \gamma)\} = 0 .$$

Man hat also die Koordinatenachsen $\tilde{\omega} - U = 0$ und $\mu = 0$ als Doppelwurzeln und die Transversalfrequenz als dritte Wurzel. Diese letztere stellt im Diagramm zwei zur Abszissenachse symmetrisch verlaufende gleichschenklige Hyperbeln dar.

Wenn der Parameter von Null verschieden ist, spaltet sich ein Gebiet $E > 0$ in der Nähe der Koordinatenachsen ab. Im ersten Quadranten reicht das Gebiet $E < 0$ nicht mehr an die Ordinatenachse; die hyperbelähnliche Kurve, die für große μ angenähert die Gleichung $(\nu - U\mu)^2 = (\Gamma - \gamma)[(g_b + 2\Omega_c U)^2 + g_c^2]$ hat, kehrt nach

Erreichen einer horizontalen Tangente nach unten um, und nähert sich schließlich wieder der Abszissenachse wie $N = 0$, d. h. wie die Hyperbel: $(\nu - U\mu)^2 = (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2$. Im vierten Quadranten reicht aber das Gebiet $E < 0$ immer noch an die Ordinatenachse; $E = 0$ hat nämlich zwei reelle Wurzeln für $\mu = 0$. Die Ordinaten dieser Schnittpunkte sind angenähert durch

$$\bar{\omega} - U = -\frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma} \frac{g_b + 2\Omega_c U}{2\Omega_c} \quad \text{und} \quad \bar{\omega} - U = -\frac{\Gamma g_c^2}{(\Gamma - \gamma) 2\Omega_c (g_b + 2\Omega_c U)}$$

gegeben und sind folglich dem Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ direkt bzw. umgekehrt proportional. Die Kurve $E = 0$ ist in der Abb. 90 als Punkt-Strich-Kurve dargestellt, wo auch zur besseren Orientierung die Entartungsfrequenz $M = 0$ gestrichelt eingezeichnet ist.

Abb. 90. Die Kurve $E = 0$.

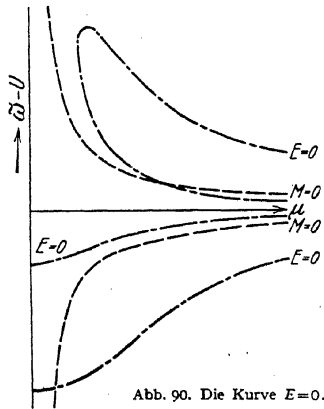
Die Gleichung $F = 0$ stellt auch eine *modifizierte Transversalfrequenz* dar, denn nach (7) geht sie für $g_b + 2\Omega_c U = 0$ in die oben betrachtete Wurzel von $E = 0$ über:

$$F = 4\Omega_c^2\{(\nu - U\mu)^2 - g_c^2(\Gamma - \gamma)\} = 0.$$

Im Gebiet zwischen diesen Hyperbelästen ist $F < 0$.

Wenn der Parameter von Null verschieden ist, wird die Kurve des vierten Quadranten wenig geändert; nur entfernt sie sich etwas von der Abszissenachse und nähert sich stark der Ordinatenachse, wo sie sogar innerhalb der Kurven $M = 0$ und $N = 0$ verläuft. Die Kurve des ersten Quadranten dagegen erhält einen komplizierten Verlauf. Zwar hat sie immer noch die Abszissenachse als Asymptote; es ergibt sich aber jetzt ein Schnittpunkt mit der Ordinatenachse, gegeben durch:

$$(15) \qquad \bar{\omega} - U = \frac{4\Omega_c^2 + (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2}{2\Omega_c \Gamma (g_b + 2\Omega_c U)}$$

Wenn der Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ von Null an wächst, rückt dieser Schnittpunkt vom Unendlichen herunter, erreicht seinen Minimalwert $\bar{\omega} - U = \frac{\sqrt{\Gamma - \gamma}}{\Gamma}$ für den Parameterwert $\frac{2\Omega_c}{\sqrt{\Gamma - \gamma}}$ und rückt dann wieder nach oben. Wenn der Parameter den kritischen Wert (12) erreicht, ist der Schnittpunkt nach $\bar{\omega} - U = \sqrt{1/\gamma}$ hinausgerückt; wie aus (7) zu ersehen ist, wird dann auch die Schallgerade eine Lösung von $F = 0$ sein. Während man bei Parametern unterhalb des kritischen

Wertes (12) nur eine einzige Kurve $F = 0$ hat, die von dem Schnittpunkt (15) unter ständig abnehmender Ordinate sich der Abszissenachse asymptotisch nähert (Abb. 91 a, wo F als Punkt-Punkt-Strich-Kurve eingezeichnet ist), hat man bei Parametern oberhalb des kritischen Wertes und folglich bei Schnittpunkten oberhalb der Schallgeraden zwei getrennte Kurven (Abb. 91 b). Die obere geht von dem Schnittpunkt (15) zu der Asymptote:

$$\tilde{\omega} - U = \frac{2\Omega_c}{(\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)}, \tag{16}$$

die in diesem Falle unterhalb der Schallgeraden liegt und für den Grenzfall des kritischen Parameterwertes mit ihr zusammenfällt.

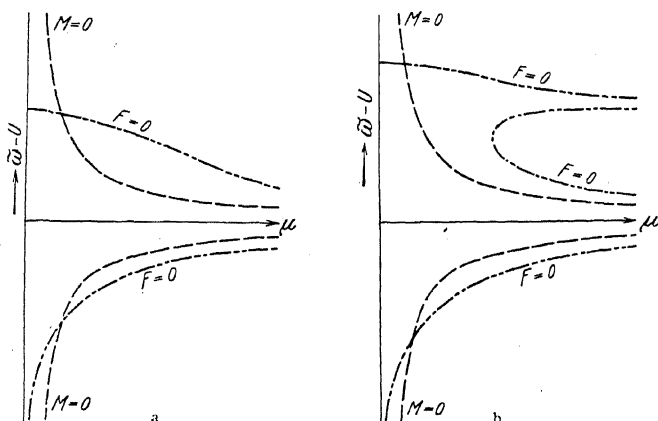



Abb. 91. Die Kurve $F = 0$.

Die untere Kurve dagegen hat eine vertikale Tangente und die Abszissenachse und die Gerade (16) als Asymptoten.

Es sei noch bemerkt, daß der Schnittpunkt (15) oberhalb oder unterhalb des Schnittpunktes (9) zwischen $N = 0$ und $\mu = 0$ liegt, je nachdem ob der Parameter unterhalb oder oberhalb des kritischen Wertes (12) ist.

Die Gleichung $G = 0$ gibt nach (8) eine modifizierte Stokes*sche Kurve*, indem sie für $g_b + 2\Omega_c U = 0$ in

$$G = (\nu - U\mu)^2 \{(\tilde{\omega} - U)^2 [(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2] - g_c^2\}$$

übergeht, d. h. in die Koordinatenachsen und die durch Erddrehung abgeänderte Stokessche Kurve. Die letztere verläuft außerhalb der Hyperbel $(\nu - U\mu)^2 = 4\Omega_c^2$ mit den Achsen als Asymptoten.

Wenn der Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ von Null verschieden ist, ändern sich die Stokesschen Kurven nur wenig; bemerkenswert ist jedoch,

daß die untere Kurve nicht mehr die negative Ordinatenachse als Asymptote hat. Es spaltet sich nämlich ein Gebiet $G > 0$ an den Koordinatenachsen ab, dessen Randkurve für große μ die Gleichung

$$(\nu - U\mu)^2 = (\Gamma - \gamma)(g_b + 2\Omega_c U)^2 - \Gamma(g_b + 2\Omega_c U)\, 2\Omega_c(\bar{\omega} - U)$$

hat. Beide Kurven liegen somit unterhalb der entsprechenden Kurven $N = 0$. Die obere Kurve schneidet die Ordinatenachse im Punkte: $\bar{\omega} - U = \frac{\Gamma - \gamma}{\Gamma} \frac{g_b + 2\Omega_c U}{2\Omega_c}$, die untere schneidet zuerst $M = 0$ bei der Ordinate: $\bar{\omega} = -\frac{2\Omega_c}{\Gamma(g_b + 2\Omega_c U)}$ und geht nach Erreichen eines minimalen $\bar{\omega}$-Wertes in die untere STOKESsche Kurve über (Abb. 92).

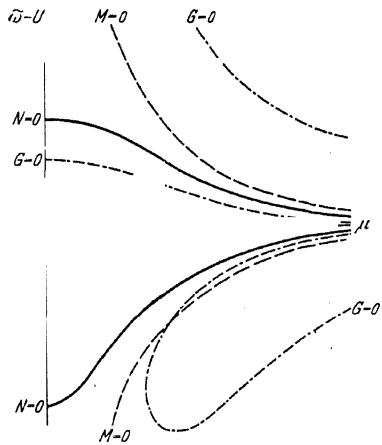
Abb. 92. Die Kurve G.

Um schließlich zur Diskussion der η-Kurven überzugehen, von denen besonders die Nullkurve von Bedeutung ist, da sie das zellulare von dem nichtzellularen Gebiet trennt, setzen wir in der Gleichung **155** (6) $g_b + 2\Omega_c U = 0$ und erhalten:

$$\eta^2 = \frac{1}{4}\Gamma^2 g_c^2 - \gamma(\nu - U\mu)^2 + \mu^2 \frac{(\nu - U\mu)^2 - g_c^2(\Gamma - \gamma)}{(\nu - U\mu)^2 - 4\Omega_c^2}.$$

Diese Gleichung ist mit **150** (5) identisch, nur daß die Orbitalfrequenz $\nu - U\mu$ an Stelle der Frequenz ν getreten ist. Da Symmetrie zur Abszissenachse vorliegt, braucht nur der erste Quadrant berücksichtigt zu werden. Es ergaben sich (Abb. 86b) zwei getrennte Gebiete mit $\eta^2 < 0$, das eine im Überschall-Hochfrequenzgebiet, das andere im Unterschall-Tieffrequenzgebiet, und zwar war das letztere nach unten durch die kritische Hyperbel der Trägheitsfrequenz begrenzt.

Wir gehen sodann zur Diskussion der vollständigen Gleichung **155** (6) über, wenn der Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ von Null verschieden ist, indem wir nur die Kurven $\eta = 0$ betrachten. Es besteht dann erstens keine Symmetrie zur Abszissenachse. Jedoch bleibt der Verlauf der Kurven ziemlich ungeändert, solange die Orbitalfrequenz groß im Vergleich zu $2\Omega_c$ ist; die Erddrehung führt also eine wesentliche Modifikation der Kurven nur in der Nähe der Koordinatenachsen herbei.

Man sieht sofort, daß η^2 unendlich wird für die Entartungsfrequenz, d. h. an der kritischen Hyperbel $M = 0$. Wenn man zu

etwas größeren Orbitalfrequenzen übergeht, erfolgt aber nicht mehr der sprunghafte Übergang in $\eta^2 = -\infty$, sondern η^2 bleibt immer noch positiv, wenn auch sehr stark abnehmend, so daß die Kurve $\eta = 0$ trotzdem in unmittelbarer Nähe von $M = 0$ verläuft. Für kleinere μ entfernt sie sich allmählich von $M = 0$, um bei einer Geschwindigkeit wenig oberhalb der Schallgeschwindigkeit mit horizontaler Tangente umzubiegen und zu kleineren Geschwindigkeiten zurückzukehren. Für große μ hat sie dann angenähert dieselbe Gleichung wie $E = 0$:

$$(\nu - U\mu)^2 = (\Gamma - \gamma)\,[(g_b + 2\Omega_c U)^2 + g_c^2],$$

d. h. sie schneidet zuletzt die Kurve der früheren Transversalfrequenz und verläuft später oberhalb derselben.

Für Orbitalfrequenzen unterhalb der Entartungsfrequenz ist η^2 positiv, wie bei Gleichgewichtsstörung für Frequenzen ν unterhalb der Trägheitsfrequenz $2\Omega_c$.

157. Stromlinien und solidifiierbare Stromflächen. Wenn man aus **155** (1) und (7) die Geschwindigkeitskomponenten bildet und in die Gleichung der Stromlinien einsetzt, lassen sich die Variablen sofort separieren. Nach Integration findet man dann für die Projektion der Stromlinien auf die ac-Ebene:

$$[e^{lc}\sinh\eta\,(c - c_0)]^{\frac{r}{N}} \sin[\mu\, a - (\nu - U\mu)\, t] = K, \tag{1}$$

wo r und l die durch **156** (2) und (3) gegebenen Hilfsgrößen sind. Die Stromlinien sind von demselben Typus wie die bei verschwindender Erddrehung in einer Vertikalebene enthaltenen.

Wir suchen sodann achsenparallele Stromlinien.

Wie gewöhnlich gibt $K = 0$ *die geraden Stromlinien parallel der c-Achse*: $\mu\, a - (\nu - U\mu)\, t = k\,\pi$, wo k ganzzahlig ist.

Weiter sieht man, daß sich im Niveau $c = c_A$, gegeben durch:

$$\eta\,\mathrm{ctgh}\,\eta\,(c_A - c_0) = -\,l, \tag{2}$$

ein neutraler Punkt befindet, der elliptisch oder hyperbolisch ist, je nachdem ob $r/N \gtrless 0$ ist. Hieraus schließt man (η immer positiv vorausgesetzt):

(A) Bei $r/N > 0$ und elliptischem Punkt ergeben sich die folgenden *geraden Stromlinien parallel der a-Achse*:

$K = 0$ für $c = c_0$ bei nichtzellularer Bewegung,
$c = c_0 + k\,\pi\,\frac{H}{2}$ bei zellularer Bewegung (wo H die doppelte Zellenhöhe ist),

$$K = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{ für } c = \infty, \text{ wenn } l + \eta \lesseqgtr 0,$$

$$K = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{ für } c = -\infty, \text{ wenn } l - \eta \gtrless 0.$$

(B) Bei $r/N < 0$ und hyperbolischem Punkt ergeben sich die folgenden *geraden Stromlinien parallel der a-Achse:*

$$K = \infty \text{ für } \begin{cases} c = c_0 \text{ bei nichtzellularer Bewegung,} \\ c \doteq c_0 + k\pi \dfrac{H}{2} \text{ bei zellularer Bewegung,} \end{cases}$$

$$K = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{ für } c = \infty, \text{ wenn } l + \eta \gtrless 0,$$

$$K = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases} \text{ für } c = -\infty, \text{ wenn } l - \eta \lesseqgtr 0.$$

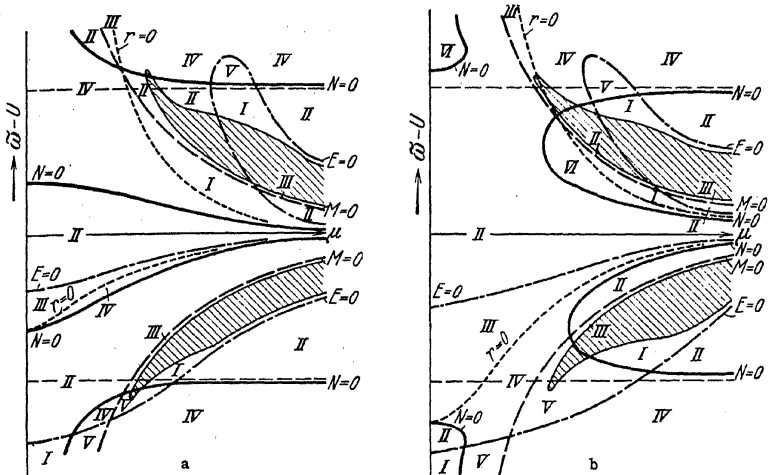



Abb. 93. Diagramm der Stromlinientypen.

Es können folglich sechs verschiedene Stromlinientypen vorkommen:

I. elliptisch oberhalb, konvex-parabolisch unterhalb $c = c_0$,
II. konkav-parabolisch oberhalb, konvex-parabolisch unterhalb $c = c_0$,
III. konkav-parabolisch oberhalb, elliptisch unterhalb $c = c_0$,
IV. hyperbolisch oberhalb, konkav-parabolisch unterhalb $c = c_0$,
V. konvex-parabolisch oberhalb, konkav-parabolisch unterhalb $c = c_0$,
VI. konvex-parabolisch oberhalb, hyperbolisch unterhalb $c = c_0$.

Will man sehen, unter welchen Verhältnissen die verschiedenen Stromlinientypen auftreten, so muß zunächst der Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ gegeben sein. Für den betreffenden Wert dieses Parameters (in Abb. 93 a klein, in Abb. 93 b groß) zeichnet man in der $\mu, \bar{\omega} - U$-Ebene die in **156** diskutierten Nullkurven der Hilfsgrößen M, N, r, E und η. Man findet in den Abbildungen $M = 0$ gestrichelt und $N = 0$ voll ausgezogen, $r = 0$ punktiert, $E = 0$ durch Punkt-Striche dargestellt, und $\eta = 0$ begrenzt das durch die Schraffur gekennzeichnete zellulare Gebiet. Diese Kurven zerlegen die $\mu, \bar{\omega} - U$-Ebene in Gebiete bestimmter

Vorzeichen der Größen r/N und NE/M. Je nachdem ob $r/N \gtrless 0$, liegen die Fälle (A) oder (B) vor. Die Größe NE/M bestimmt in Verbindung mit der ersten Gleichung **156** (1) in eindeutiger Weise das Vorzeichen von $l + \eta$ und $l - \eta$ und damit die geraden Stromlinien parallel der a-Achse. Dadurch kann man die Gebiete des Diagrammes nach dem obigen Schema mit den Nummern I bis VI belegen.

Die *Umlaufsrichtung der Teilchen* in der Projektion auf die ac-Ebene ist verschieden, je nachdem ob $\bar{\omega} - U \gtrless 0$ ist. Für $\bar{\omega} - U > 0$ ist z. B. die Umlaufsrichtung positiv für konkav-parabolische Stromlinien und negativ für konvex-parabolische, ferner negativ oberhalb und positiv unterhalb eines elliptischen Punktes und schließlich positiv oberhalb und negativ unterhalb eines hyperbolischen Punktes.

Für die von der Zeit unabhängigen, *solidifiierbaren, zylindrischen Stromflächen* mit Erzeugenden parallel der Fortpflanzungsrichtung findet man:

$$e^{-\frac{N}{s}b + mc} \sinh \eta (c - c_0) = K_1. \tag{3}$$

Diese Zylinderflächen haben die folgenden Asymptotenebenen:

$$c = c_0, \quad \text{wenn} \quad -\frac{N}{s} b = \infty, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{N}{s} b + (m + \eta) c &= \text{konst.,} \quad \text{wenn} \quad c > c_0, \\ -\frac{N}{s} b + (m - \eta) c &= \text{konst.,} \quad \text{wenn} \quad c < c_0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Für $m + \eta = 0$ bzw. $m - \eta = 0$ fällt c aus den Gleichungen (5) heraus; die Asymptotenebenen sind dann der ac-Ebene parallel. Für $m + \eta < 0$ bzw. $m - \eta > 0$ sind die Stromflächen oberhalb bzw. unterhalb $c = c_0$ gefaltet; in einem endlichen Niveau haben sie dann eine Tangentenebene $b =$ konst. *Dies kann auch bei nichtzellularer Bewegung eintreten,* im Gegensatz zu dem homogen-inkompressiblen Fall, **154**.

Für $N = 0$, $s \neq 0$ fällt b aus der Gleichung (3) heraus, und die Stromflächen werden der ab-Ebene parallel („Longitudinalwellen"). Sollte aber $m + \eta$ oder $m - \eta$ gleichzeitig verschwinden, so folgt aus der zweiten Gleichung **156** (1) als Grenzwert des unbestimmten Ausdruckes:

$$\frac{m \pm \eta}{N} = \frac{m - m\left(1 + \frac{NF}{2m^2 s^2 M} + \cdots\right)}{N} = -\frac{F}{2 m s^2 M}.$$

Für $m = 0$ liegen die Stromflächen beiderseits $c = c_0$ zueinander symmetrisch. Für wachsendes m senken sich die Stromflächen oberhalb

$c = c_0$ gegen diese Ebene, während sich diejenigen unterhalb dagegen heben und größere Neigung annehmen. Für abnehmendes m findet die umgekehrte Bewegung statt.

Durch Diskussion der Asymptotengleichungen (4) und (5) findet man *sechs verschiedene Typen von Stromflächen, die wieder in zwei Hauptklassen von je drei Typen* zusammengefaßt werden können. In der ersten Hauptklasse ist $N/s > 0$, nach (4) verlaufen dann die Stromflächen asymptotisch zu der negativen Halbebene $c = c_0$. In der zweiten Hauptklasse ist $N/s < 0$, und die Stromflächen verlaufen asymptotisch zu der positiven Halbebene $c = c_0$. Die drei Untergruppen

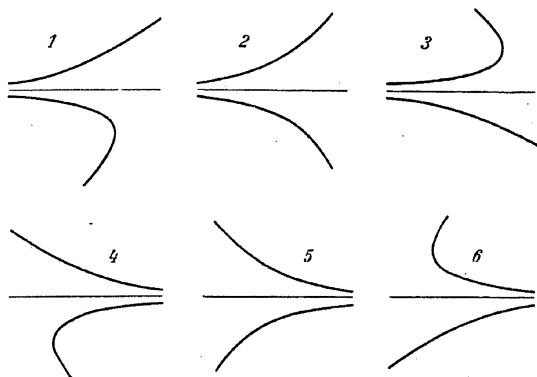



Abb. 94. Stromflächentypen.

jeder Hauptklasse unterscheiden sich nach den Gleichungen (5) durch verschiedene Orientierung der Asymptotenebenen, und zwar hat man:

$$
\begin{array}{lll}
(1,4) & m+\eta > 0, & m-\eta > 0, \\
(2,5) & m+\eta > 0, & m-\eta < 0, \\
(3,6) & m+\eta < 0, & m-\eta < 0.
\end{array}
$$

Die sechs verschiedenen Typen von Stromflächen sind aus Abb. 94 zu ersehen, wo die Typen 1—3 die erste Hauptklasse, die Typen 4—6 die zweite Hauptklasse darstellen.

Das Vorkommen der verschiedenen Typen ist in Abb. 95a für einen kleinen und in Abb. 95b für einen großen Wert des Parameters $g_b + 2\Omega_c U$ dargestellt. Die positive Halbebene $\mu, \varpi - U$ ist in Gebiete zerlegt durch die folgenden Kurven: $M = 0$ (gestrichelt), $N = 0$ (voll ausgezogen), $s = 0$ (dünn ausgezogen) und $F = 0$ (Punkt-Punkt-Strich-Kurve). Der Unterschied gegenüber den Stromliniendiagrammen Abb. 93a und 93b ist, daß s an Stelle von r und F an Stelle von E getreten ist. Die Gebiete werden genau wie vorher mit den Nummern 1—6 der

verschiedenen Stromflächentypen belegt, diesmal unter Zuhilfenahme der *zweiten* Gleichung **156** (1).

Aus der Umlaufsrichtung eines Teilchens in der Projektion auf die ac-Ebene und aus der Neigung der Stromflächen kann man ohne Mühe die Umlaufsrichtung in der räumlichen Orbitalbahn bestimmen, und dadurch auch die Umlaufsrichtung in der Projektion dieser Bahn auf eine beliebige Ebene durch die Fortpflanzungsrichtung. Wir wollen diese Untersuchung in ihren Einzelheiten nicht durchführen, bemerken

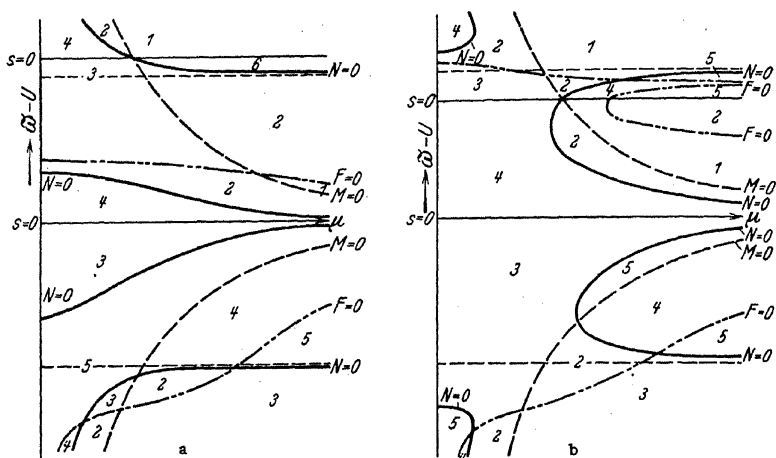



Abb. 95. Diagramm der Stromflächentypen.

aber, daß, wenn die Stromflächen gefaltet sind, wir einen verschiedenen Orbitalumlauf in der Projektion auf die ab-Ebene erhalten, je nachdem ob sich das Teilchen oberhalb oder unterhalb der Geraden befindet, wo die Stromflächen eine zu der ac-Ebene parallele Tangentenebene besitzen.

Durch Elimination von c aus (1) und (3) könnten wir auch, wie früher, die Gleichung für die Projektion der Stromlinien auf die ab-Ebene bestimmen, die aber diesmal so verwickelt ist, daß wir sie nicht aufschreiben. Die Projektionen auf die ac- und die bc-Ebenen bestimmen ja auch die Stromlinien vollständig, sowohl im Raume wie in jeder beliebigen Projektion. Wenn wir im folgenden die Stromlinientypen diskutieren, können wir sie durch zwei Ziffern charakterisieren: *eine römische Ziffer* I—VI *gibt den Typus der Stromlinien in Projektion auf eine Ebene in der Fortpflanzungsrichtung und senkrecht zu der Diskontinuitätsfläche (die ac-Ebene), und eine arabische Ziffer* 1—6 *gibt den*

Typus der Stromlinien in einer Ebene senkrecht zu der Fortpflanzungsrichtung (die bc-Ebene) und kennzeichnet dadurch den Typus der solidifiierbaren Stromflächen.

158. Die Wellen in zwei zonal bewegten isothermen Schichten. Für den Fall zweier Schichten wählt man, wie bei Inkompressibilität, die ab-Ebene parallel der Diskontinuitätsfläche, die dann die Gleichung $c = c_1$ erhält; die starren Grenzflächen sind wieder $c = c_0$ und $c = c_2$. Für die untere Schicht hat man dann die Amplituden **155** (1) und (7) und für die obere die entsprechenden Ausdrücke mit gestrichenen Buchstaben. Die wichtigen Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ und $g_b + 2\Omega_c U'$ sind durch die Formeln **151** (11) und (11') als Funktionen der Temperatur- und Windsprünge an der inneren Grenzfläche gegeben.

Durch Einführung der Normalamplitude C_1 an der Diskontinuitätsfläche als neue willkürliche Konstante folgt aus dem Integrale **155** (7):

$$C = C_1 e^{\lambda(c-c_1)} \frac{\sinh\eta\,(c-c_0)}{\sinh\eta\,(c_1-c_0)}. \tag{1}$$

Die entsprechende vollständige Lösung für beide Schichten ist dann:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{C}{\mu N}\{[(\nu - U\mu)^2 - (\Gamma-\gamma)(g_b+2\Omega_c U)(g_b+2\Omega_c\varpi)]\,[\eta\,\mathrm{ctgh}\,\eta\,(c-c_0)+\lambda] \\
&\quad - (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,\gamma\,(\nu - U\mu)^2\}, \\
B &= \frac{C}{N}\{[2\Omega_c - (\Gamma-\gamma)(g_b+2\Omega_c U)(\varpi - U)](\varpi - U)\,[\eta\,\mathrm{ctgh}\,\eta\,(c-c_0)+\lambda] \\
&\quad + (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,[\Gamma(g_b+2\Omega_c U) - \gamma(g_b+2\Omega_c\varpi)]\}, \\
C &= C_1 e^{\lambda(c-c_1)} \frac{\sinh\eta\,(c-c_0)}{\sinh\eta\,(c_1-c_0)}, \\
D + (g_b+2\Omega_c U)B &= \frac{C}{N}\{M(\varpi - U)^2\,[\eta\,\mathrm{ctgh}\,\eta\,(c-c_0)+\lambda] \\
&\quad - (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,[(\nu - U\mu)^2 - (g_b+2\Omega_c U)\{\Gamma(g_b+2\Omega_c U) - \gamma(g_b+2\Omega_c\varpi)\}]\},
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{C'}{\mu N'}\{[(\nu - U'\mu)^2 - (\Gamma'-\gamma')(g_b+2\Omega_c U')(g_b+2\Omega_c\varpi)]\,[\eta'\,\mathrm{ctgh}\,\eta'(c-c_2)+\lambda'] \\
&\quad - (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,\gamma'(\nu - U'\mu)^2\}, \\
B' &= \frac{C'}{N'}\{[2\Omega_c - (\Gamma'-\gamma')(g_b+2\Omega_c U')(\varpi - U')](\varpi - U')\,[\eta'\,\mathrm{ctgh}\,\eta'(c-c_2)+\lambda'] \\
&\quad + (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,[\Gamma'(g_b+2\Omega_c U') - \gamma'(g_b+2\Omega_c\varpi)]\}, \\
C' &= C_1 e^{\lambda'(c-c_1)} \frac{\sinh\eta'(c-c_2)}{\sinh\eta'(c_1-c_2)}, \\
D' + (g_b+2\Omega_c U')B' &= \frac{C'}{N'}\{M'(\varpi - U')^2\,[\eta'\,\mathrm{ctgh}\,\eta'(c-c_2)+\lambda'] \\
&\quad - (g_c - 2\Omega_b\varpi)\,[(\nu - U'\mu)^2 - (g_b+2\Omega_c U')\{\Gamma'(g_b+2\Omega_c U') - \gamma'(g_b+2\Omega_c\varpi)\}]\}.
\end{aligned} \tag{2'}$$

Diese Formeln gelten für die nichtzellulare Lösung mit $\eta^2 > 0$ und $\eta'^2 > 0$. Für $\eta^2 = 0$ oder $\eta'^2 = 0$ ersetzt man sinh durch das Argument und cosh durch 1 und findet die entsprechenden Amplituden aus (2) oder (2′) durch Grenzübergang. Für $\eta^2 < 0$ oder $\eta'^2 < 0$ schreibt man schließlich $\eta = i\zeta$ oder $\eta' = i\zeta'$ und findet aus (2) oder (2′) die zellulare Lösung, die wir nicht aufschreiben wollen.

Durch die getroffene Wahl der Integrationskonstanten ist die Kontinuität der Normalamplitude an der inneren Grenzfläche $c = c_1$ erfüllt. Für spezielle Werte der Parameter wird es aber vorkommen können, daß C_1 durch eine andere Konstante ersetzt werden muß, um ein Anwachsen der Amplituden über alle Grenzen zu vermeiden. Dies ist z. B. für $M = 0$ bzw. $M' = 0$ der Fall, da dann η und λ bzw. η' und λ' unendlich werden. Ebenfalls trifft es für $N = 0$ bzw. $N' = 0$ zu, wenn die Wellenbewegung eine „longitudinale" ist, mit $C = 0$ bzw. $C' = 0$. Wir behalten aber aus Bequemlichkeit die obige Form der Amplituden bei, müssen jedoch daran erinnern, daß $M = 0$, $M' = 0$ und unter Umständen auch $N = 0$, $N' = 0$ zu den Lösungen der im nächsten Abschnitt diskutierten Frequenzengleichung hinzuzuzählen sind.

Für die räumliche Konfiguration der *Stromlinien* sei auf die ausführliche Diskussion und die Abb. 93 und 95 des vorigen Abschnittes hingewiesen. Dabei sind die Stromlinien und die Stromflächen in der unteren Schicht durch diejenigen oberhalb der Ebene $c = c_0$ gegeben, und die Stromlinien und Stromflächen der oberen Schicht durch diejenigen unterhalb dieser Ebene, wenn man in den Formeln c_2 an Stelle von c_0 schreibt und sonst gestrichene Buchstaben verwendet.

Wie schon früher **105** angegeben, ist die *Umlaufsrichtung* in der Orbitalbahn verschieden, je nachdem ob die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwischen den beiden Grundgeschwindigkeiten oder außerhalb derselben liegt. Die S. 598 gegebene Regel für die Umlaufsrichtung in der *ac*-Ebene gilt deshalb nur für $\varpi > U' > U$. Für $U' > \varpi > U$ kehren sich die Umlaufsrichtungen in der oberen Schicht um, und für $\varpi < U$ ist dies auch in der unteren Schicht der Fall.

159. Diskussion der Frequenzengleichung für unendliche Schichtmächtigkeiten. Aus der dynamischen Grenzflächenbedingung **151** (16) ergibt sich durch Einführung der Hilfsgröße n, **156** (5), die folgende Frequenzengleichung:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\Gamma}{N}\left[M(\varpi - U)^2 \eta \operatorname{ctgh} \eta\, (c_1 - c_0) + n\right] \\ &= \frac{\Gamma'}{N'}\left[-M'(\varpi - U')^2 \eta' \operatorname{ctgh} \eta' (c_2 - c_1) + n'\right]. \end{aligned}$$

Wir beschränken uns auf den einfachsten, aber immer noch sehr wichtigen Spezialfall unendlicher Mächtigkeit der Schichten. Die beiden hyperbolischen Kotangenten reduzieren sich dann auf 1, und die Gleichung (1) schreibt sich:

$$\frac{\Gamma}{N}[M(\varpi - U)^2\eta + n] = \frac{\Gamma'}{N'}[-M'(\varpi - U')^2\eta' + n'] . \tag{1a}$$

Außer den Lösungen dieser Gleichung stellen auch, wie in **109** bei verschwindender Erddrehung, $\eta = 0$ und $\eta' = 0$ stückweise oder in ihrem ganzen Verlauf Lösungen der Gleichung (1) für unendliche Schichtmächtigkeiten dar. Nach den Bemerkungen auf der vorigen Seite ist dasselbe auch für $M = 0$ und $M' = 0$ der Fall.

Durch das Vorkommen von η und η' stellt die Gleichung (1a) eine irrationale Relation zwischen μ^2 und ϖ dar, die aber durch zweimaliges Quadrieren auf eine rationale Form gebracht werden kann. Nach dem ersten Quadrieren scheiden

$$N = 0 \tag{2a}$$

und

$$N' = 0 , \tag{2b}$$

die je eine Gleichung vierten Grades in ϖ darstellen, als selbständige Lösungen aus, und die übrigbleibende Gleichung gibt nach dem zweiten Quadrieren die folgende rationale Relation zwischen den Parametern:

$$(\Gamma^2 G N' - \Gamma'^2 G' N)^2 - 4\Gamma\Gamma'(n\Gamma N' - n'\Gamma' N)(n\Gamma' G' - n'\Gamma G) = 0 . \tag{2c}$$

Wenn man nur die Glieder höchster Ordnung in μ und ϖ beibehält, so hat man hier

$$N = -\gamma\mu^2\varpi^4 + \cdot \qquad n = \tfrac{1}{2}\Gamma g_c \mu^2 \varpi^4 + \cdot \qquad G = \mu^4\varpi^6 + \cdot$$

einzusetzen, wodurch das Glied höchster Ordnung vom sechsten Grade in μ^2 und vom zwanzigsten Grade in ϖ wird. Wir haben uns mit den 28 Wurzeln der Gleichungen in ϖ (2a), (2b), (2c) zu befassen.

Es werden jedoch nicht sämtliche Wurzeln dieser rationalen Gleichungen die ursprüngliche, irrationale Frequenzengleichung (1a) befriedigen. Denn durch das Quadrieren sind neue Wurzeln hereingekommen. Nur die sowohl nach oben wie nach unten abklingenden Störungen, d. h. solche, für welche man $\eta^2 > 0$, $\eta'^2 > 0$ hat, sind von physikalischem Interesse. Wenn man deshalb für jede einzelne Wurzel ϖ die Werte von η und η' berechnet, so zeigt es sich, daß nur zwei der vier Wurzeln von (2a), nur zwei der vier Wurzeln von (2b) und nur fünf der zwanzig Wurzeln von (2c) diese Bedingung erfüllen. Insgesamt sind also für jeden beliebigen Wert von μ *neun* reelle oder komplexe Wurzeln weiter zu diskutieren.

Diese neun Wurzeln werden wir nun in zwei Klassen teilen: diejenigen, die schon bekannte, nur unter den neuen Verhältnissen modifizierte Wellenbewegungen darstellen, und diejenigen, die neue, noch nicht diskutierte Wellenbewegungen ergeben. Zu diesem Zweck sehen wir für einen Augenblick von der Erddrehung ab, d. h. wir setzen in den Gleichungen (2) außer Ω auch g_b gleich Null. Dadurch scheidet der Faktor $(\nu - U\mu)^2$ aus den Hilfsgrößen N und G, und der Faktor $(\nu - U'\mu)^2$ aus den Hilfsgrößen N' und G' aus. Hieraus folgt dann weiter, daß aus dem Polynom zwanzigsten Grades (2c) die beiden Faktoren $(\nu - U\mu)^4$ und $(\nu - U'\mu)^4$ ausscheiden. Da $\nu - U\mu = \mu(\varpi - U)$ und $\nu - U'\mu = \mu(\varpi - U')$ ist, so zerfällt die entartete Gleichung (2a) in:

$$(3\text{a}) \qquad (\varpi - U)^2 = 0, \qquad 1 - \gamma(\varpi - U)^2 = 0,$$

die entartete Gleichung (2b) in:

$$(3\text{b}) \qquad (\varpi - U')^2 = 0, \qquad 1 - \gamma'(\varpi - U')^2 = 0$$

und die entartete Gleichung zwanzigsten Grades (2c) in:

$$(3\text{c}) \qquad (\varpi - U)^4 = 0, \qquad (\varpi - U')^4 = 0, \qquad \vartheta = 0,$$

wo $\vartheta = 0$ die Gleichung zwölften Grades in ϖ **109** (3) ist.

Hier sind uns die zweite Gleichung (3a) und die zweite Gleichung (3b) bekannt: sie geben die LAPLACEschen Schallwellen bzw. in der unteren oder in der oberen bewegten Schicht, und zusammen zwei LAPLACEsche Wellen für das Gesamtsystem von zwei Schichten (vgl. S. 358). Weiter ist uns die Gleichung zwölften Grades $\vartheta = 0$ bekannt; sie gab drei brauchbare Wurzeln für die innere Welle. Wir haben somit fünf Wurzeln gefunden, die auf früher diskutierte Wellenbewegungen zurückführen. Da alle diese Wellenbewegungen von kurzer Periode sind und somit wenig von der Erddrehung modifiziert werden, können wir sie außer Betracht lassen.

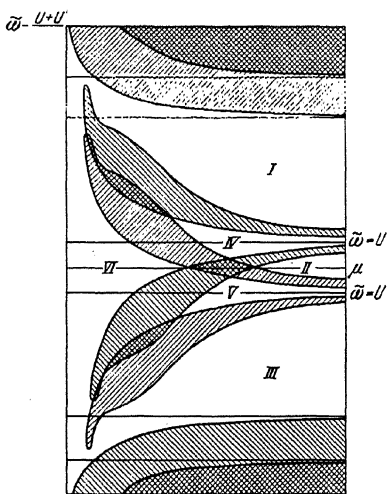
Es bleiben dann übrig die erste Gleichung (3a), die erste (3b) und die beiden ersten (3c), die singuläre Wurzeln der entarteten Gleichungen ergeben. Alle sagen dasselbe aus, daß sich entweder die untere oder die obere Schicht wie ein starrer Körper mit der Geschwindigkeit der Grundströmung fortbewegt. Die Wurzeln, die im Spezialfall verschwindender Erddrehung diese Bewegungen geben, sind bei vorhandener Erddrehung von μ abhängig. Das nicht entartete Gleichungssystem (2a), (2b), (2c) wird folglich neue Wurzeln enthalten, die für $\Omega = 0$ in $\varpi = U$ oder $\varpi = U'$ übergehen. Wir haben mit vier solchen Wurzeln zu rechnen, weil fünf der neun brauchbaren Wurzeln auf altbekannte Lösungen zurückführten. Eine von diesen vier Wurzeln geht aus (2a), eine aus (2b) und zwei gehen aus (2c) hervor. Von den beiden letzten reduziert sich die eine für $\Omega = 0$ auf $\varpi = U$ und die andere auf $\varpi = U'$.

Diese vier Wurzeln entsprechen neuen von der Erddrehung bedingten Wellenbewegungen.

160 (I). Theorie der Zyklonen: (I) Die vier neuen Wellen. Wie gewöhnlich verwenden wir eine graphische Darstellung der Lösungen von **159** (1a). In Abb. 96 sind die Kurven $\eta = 0$ und $\eta' = 0$ in eine $\mu, \varpi - \frac{U+U'}{2}$-Ebene eingezeichnet worden, wo zum besseren Überblick die Gebiete $\eta^2 < 0$, $\eta'^2 < 0$ schraffiert sind.

Die Lösungskurven von **159** (1a) müssen nun in den unschraffierten Gebieten verlaufen, und zwar höchstens unter Berührung der Randkurven der Gebiete. Von den sechs nicht schraffierten Gebieten sind uns die drei ersten — I, II, III — in ziemlich unveränderter Form aus der Abb. 50 bekannt. Die Lösungskurven dieser Gebiete, die den beiden LAPLACEschen Wellen und der inneren Welle **109** (3) entsprechen, bieten, wie schon gezeigt, nichts wesentlich Neues.

Abb. 96. Die Gebiete $\eta^2 > 0$, $\eta'^2 > 0$.

Die vier neuen Lösungskurven müssen in den Gebieten IV, V, VI verlaufen. Sie sollen sich ja für $\Omega = 0$ auf die Grundgeschwindigkeiten reduzieren, und aus den drei ersten Gebieten würden sie nicht in diese Grenzlage gelangen können, ohne ein schraffiertes Gebiet $\eta^2 < 0$ oder $\eta'^2 < 0$ zu durchqueren, was aber nicht gestattet ist.

Weil die Lösungskurven in den Gebieten IV, V, VI liegen müssen, folgt, daß die *Orbitalperiode groß ist* in der oberen Schicht bei Wellenfortpflanzung nach Osten (IV), in der unteren Schicht bei Wellenfortpflanzung nach Westen (V) oder auch in den beiden Schichten (VI) Es wird sich übrigens zeigen, daß diese Orbitalperiode immer größer als die Entartungsperiode $M = 0$ ist.

Wir werden jetzt die den vier Wellen entsprechenden Lösungskurven in das Diagramm einzeichnen.

Aus der Diskussion der N-Kurven S. 589 wissen wir, daß $N = 0$ zwei Kurvenäste im Unterschallgebiet besitzt, den einen mit $\varpi - U > 0$, den anderen mit $\varpi - U < 0$, die sich beide für einen verschwindenden Wert des Parameters $g_b + 2\Omega_c U$ auf $\varpi - U = 0$ reduzieren. Einer dieser Kurvenäste muß nach dem obigen eine Lösungskurve der ur-

sprünglichen Frequenzengleichung **159** (1a) sein, und zwar wird es für denjenigen Ast zutreffen, bei dem die linke Seite der Frequenzengleichung für $N \to 0$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt. D. h. $M(\bar\omega - U)^2\eta + n$ muß gleichzeitig mit N gegen Null gehen, was nur für $Mn < 0$ zutreffen kann ($\eta > 0$ angenommen). Diese Bedingung zeigt sich für den unteren Ast erfüllt, der in den Gebieten V und VI verläuft und folglich unsere Lösungskurve darstellt. Die entsprechende Welle pflanzt sich also mit einer *Geschwindigkeit fort, die algebraisch kleiner als die der kalten Strömung ist.* Der Verlauf der beiden Kurven $N = 0$ ist für einen kleinen Parameterwert aus der Abb. 97 zu ersehen, wo die Lösungskurve im Gebiet VI dick eingezeichnet ist.

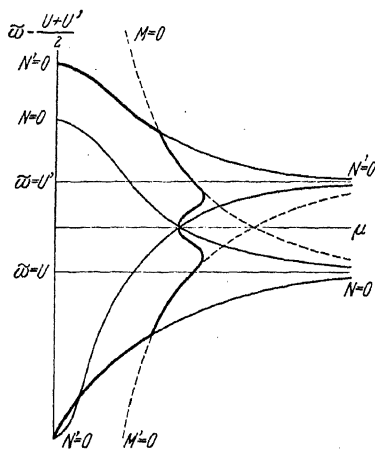



Abb. 97. Frequenzenkurve der vier neuen Wellen im Gebiet VI.

Entsprechend findet man, daß von den beiden Kurvenästen $N' = 0$ nur derjenige mit $M'n' > 0$ eine Lösung darstellt, und zwar ist dies die oberhalb $\bar\omega = U'$ in den Gebieten IV und VI verlaufende Kurve (in der Abbildung dick ausgezogen). Die entsprechende Welle pflanzt sich also mit einer *Geschwindigkeit fort, die algebraisch größer als die der warmen Strömung ist.*

Die beiden aus der Gleichung zwanzigsten Grades (2c) stammenden Wurzeln entsprechen schließlich Wellen mit *Fortpflanzungsgeschwindigkeiten zwischen den Grundgeschwindigkeiten.* In den Gebieten IV und V befindet sich je ein Ast, der sich der Geraden $\bar\omega = U'$ von unten und der Geraden $\bar\omega = U$ von oben asymptotisch nähert. Im Gebiet VI findet man einen Ast, der mit einem $\bar\omega$ kleiner als U' an der kritischen Hyperbel $M = 0$ anfängt und mit einem $\bar\omega$ größer als U an der anderen kritischen Hyperbel $M' = 0$ endet, nachdem er durch den nahe der Abszissenachse gelegenen Schnittpunkt der Kurven $N = 0$ und $N' = 0$ hindurchgegangen ist (Abb. 97).

Die vier neuen Wellen lassen sich somit, je nach der Beziehung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu den Grundgeschwindigkeiten, in drei Hauptklassen zusammenfassen.

Wir betrachten besonders die Verhältnisse im Gebiet VI, das für uns das größte Interesse darbietet.

Die drei getrennten Lösungskurven dieses Gebietes: $N = 0$, die Gleichung zwanzigsten Grades (2c) und $N' = 0$ müssen an den kritischen

Hyperbeln $M = 0$ und $M' = 0$ endigen, da $M\eta$ und $M'\eta'$ hier unstetig sind. Hieraus folgt, daß die Orbitalperioden in beiden Schichten immer größer als die Entartungsperiode sind, wie schon oben angegeben.

Die Fortsetzung der Lösungskurven an ihren Schnittpunkten mit den kritischen Hyperbeln ist durch diese Hyperbeln selbst gegeben. Man erhält in dieser Weise eine ununterbrochene Kurve zwischen den Schnittpunkten der Ordinatenachse mit $N' = 0$ und $N = 0$ (Abb. 97). Diese Kurve hat nun drei vertikale Tangenten: bei den entsprechenden Wellenlängen erfolgt der Übergang von Stabilität zu Instabilität. In einem Zwischengebiet hat man Stabilität, sonst aber Instabilität sowohl für lange wie für kurze Wellenlängen. Für lange Wellen hat man einen dynamischen Instabilitätspunkt in der Nähe der Abszissenachse, und für kurze Wellen hat man zwei Instabilitätspunkte in der Nähe der Berührungspunkte der aus der Gleichung zwanzigsten Grades (2c) stammenden Kurve mit $M = 0$ und $M' = 0$. Es sei in diesem Zusammenhang an die Instabilität der inneren Welle des Gebietes II (Abb. 52) erinnert, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwischen den Grundgeschwindigkeiten gelegen ist. Nur ist die Lösungskurve dort ein Spiegelbild von der jetzigen, wodurch die Bedingungen der Stabilität in bezug auf die Wellenlänge umgekehrt werden.

Wenn man für $N \to 0$ den Grenzwert der linken Seite von **159** (1a) bildet, so ergibt sich mit Hilfe der dritten Gleichung **156** (1):

$$\Gamma \frac{M(\tilde{\omega} - U)^2 \eta + n}{N} = -\frac{\Gamma G}{2n}.$$

Es zeigt sich dann überraschenderweise, daß die Frequenzengleichung für diesen Grenzwert nicht erfüllt wird. Wählt man dagegen eine beliebig große, aber immer noch endliche Mächtigkeit der unteren Schicht, wodurch im Gliede links $\eta \operatorname{ctgh} \eta (c_1 - c_0)$ an Stelle von η auftritt, so findet man Lösungskurven oberhalb der betreffenden N-Kurve, der sie sich für wachsende Werte von $c_1 - c_0$ allmählich nähern, um zuletzt für den Grenzfall unendlicher Schichtmächtigkeit mit ihr zusammenzufallen. Es ist folglich nicht gestattet, *zuerst* $\operatorname{ctgh} \eta (c_1 - c_0) = 1$ zu setzen, und dann *nachträglich* den Grenzübergang $N \to 0$ auszuführen; man hat vielmehr die Grenzübergänge in umgekehrter Reihenfolge auszuführen. Die in dieser Weise erhaltenen Integrale sind allerdings nicht mehr von der einfachen Form **158** (2), sondern lineare Kombinationen der zwei partikulären Lösungen der Störungsgleichungen. Integrale dieser Form haben wir schon früher bei einfacheren Problemen behandelt, vgl. die Abschnitte **98** und **101**, für eine Gleichgewichtsstörung mit Schallgeschwindigkeit in einer oder zwei unendlichen Schichten. Der wesentliche Unterschied gegenüber der einfachen Lösung **158** (2) besteht darin, daß die Stromflächen nicht mehr eben sind, sondern

sich nach unten biegen, um sich der unteren starren Grenzfläche asymptotisch zu nähern. Es ist dann unmittelbar klar, daß dieser Fall als Grenzfall einer endlichen Schichtmächtigkeit erscheint. Für die Verhältnisse in der nächsten Umgebung der Diskontinuitätsfläche, die uns besonders interessieren, macht sich aber dieser Unterschied wenig bemerkbar in dem unteren Teil der Schicht.

Für unsere Zwecke kommt es gar nicht darauf an, ob die Mächtigkeit der unteren Schicht gerade unendlich ist; es genügt, wenn sie nur groß bleibt. Die Abstraktion zu unendlicher Mächtigkeit ist nur deswegen ausgeführt worden, weil sie eine rationale Frequenzengleichung ergibt. Auch ist die unten gegebene kinematische Diskussion der zu $N = 0$ (oder $N' = 0$) gehörigen Welle eigentlich für eine endliche untere (oder obere) Schicht ausgeführt worden, um die in **157** gefundenen Resultate anläßlich der Stromlinienkonfiguration direkt verwenden zu können.

Es sollen jetzt die Stromlinientypen in den *drei Hauptwellenklassen* in ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge untersucht werden.

Wir lesen die Stromlinientypen I—VI in der *ac*-Projektion aus den Diagrammen *a* und *b* der Abb. 93 ab, und die Stromlinientypen 1—6 in der *bc*-Projektion (die solidifiierbaren Stromflächen) aus den Diagrammen *a* und *b* der Abb. 95. Dabei entsprechen die Diagramme *a* einem kleinen und *b* einem großen Wert des Parameters $g_b + 2\Omega_c U$.

Die Diskussion soll nur in den Fällen im einzelnen durchgeführt werden, wo nähere Verwandtschaft mit den Zyklonenwellen zu erwarten ist. Mit Rücksicht auf evtl. später mögliche Solidifikationen kommen nur die Teile in Betracht, wo die Stromflächen beider Schichten an der Diskontinuitätsfläche einen im zweiten Quadranten gelegenen Winkel θ_1 bzw. θ_1' mit derselben bilden.

1. *Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist algebraisch kleiner als die Geschwindigkeit der kalten Strömung.* Die in Frage kommende Welle entspricht demjenigen Ast der Kurve $N = 0$, der in den Gebieten V und VI verläuft.

Im Gebiet V findet man in der unteren kalten Masse den Typus IV, 3, und in der oberen warmen Masse den Typus II, 5, der für kleinere μ (nahe der Grenze des zellularen Gebietes) in I, 4 übergeht. Da dabei aber erstens der Winkel θ_1' gewöhnlich im ersten Quadranten liegt (und nur in der Nähe des zellularen Gebietes in den zweiten Quadranten kommt), und da zweitens die Wellenlängen zu klein sind, gehen wir auf diesen Fall nicht näher ein.

Um die Stromlinien im Gebiet VI zu bestimmen, merken wir uns zuerst, daß die Kurven $N = 0$ und $N' = 0$ die Ordinatenachse in dem-

selben Punkte schneiden (s. Abb. 97). Für kleine μ liegt $N = 0$ oberhalb $N' = 0$; die Kurven schneiden sich aber bald nochmals, und von jetzt ab ist $N = 0$ die untere. Da sämtliche Lösungskurven für endliche Schichtmächtigkeiten durch die Schnittpunkte von $N = 0$ und $N' = 0$ hindurchgehen müssen, so verlaufen sie im spitzwinkligen Gebiet zwischen $N = 0$ und $N' = 0$. Dies wird aber dann auch für die Grenzkurve unendlicher Schichtmächtigkeit der Fall sein, d. h. für große μ nähert sie sich $N = 0$ von oben, für μ-Werte zwischen den beiden Schnittpunkten mit $N' = 0$ dagegen von unten.

Im ersteren Fall findet man den Stromlinientypus IV, 3 in der kalten Schicht und II, 5 in der warmen, d. h. genau dieselben Stromlinien wie im Gebiet V für große μ, mit denen wir uns nicht weiter beschäftigten.

Im letzteren Fall findet man den Stromlinientypus II, 5 in der kalten Schicht, IV, 3 in der warmen; für μ-Werte sehr nahe an Null geht der letztere allmählich in III, 3 über. Man hat also konkav-parabolische Stromlinien in beiden Schichten; nur für ganz kleine μ gehen die Stromlinien der warmen Schicht allmählich in elliptische über. Die Winkel θ_1 und θ_1' der Stromflächen liegen im zweiten Quadranten; die Projektionen der Stromlinien auf die Diskontinuitätsfläche, die man wegen des kleinen Neigungswinkels mit den Stromlinien in der Horizontalprojektion der meteorologischen Karten vergleichen kann, sind folglich in beiden Schichten konvexparabolisch, und die Bahnprojektionen sind von antizyklonischem Umlauf. Bei abnehmendem μ rückt ein elliptischer Punkt von Süden ins Feld der warmen Schicht hinauf, entsprechend erhält man elliptische Stromlinien mit zyklonischem Orbitalumlauf südlich und mit antizyklonischem Umlauf nördlich des elliptischen Punktes.

Die Welle hat weiter die wichtige Eigenschaft, instabil zu sein, wenn der Parameter $g_b + 2\Omega_c U$ den kritischen Wert **156** (10) überschreitet: diese Welle kann sich also spontan bilden.

In mehreren Punkten versagt aber die Ähnlichkeit mit den Zyklonen: die Stromlinien südlich der Diskontinuitätslinie haben eine *Ausbuchtung nach Norden* (was mit den meteorologischen Karten nicht übereinstimmt) und die Fortpflanzung geht nach Westen. *Wir müssen deshalb die eben untersuchte Welle als Lösung des Zyklonenproblems verwerfen.*

2. und 3. *Fortpflanzungsgeschwindigkeit zwischen den Grundströmungsgeschwindigkeiten.* Wir haben die zwei Wurzeln der Gleichung zwanzigsten Grades zu betrachten, die in den Gebieten IV, V und VI je eine Lösungskurve ergaben.

Im Gebiet V findet man in der kalten Schicht den Stromlinientypus II, 4 und in der warmen Schicht denselben Typus wie bei $N = 0$, nämlich II, 5 mit allmählichem Übergang in I, 4, wenn man sich bei

abnehmendem μ dem zellularen Gebiet nähert. Der Winkel θ_1' liegt also gewöhnlich im ersten Quadranten; aus denselben Gründen wie für $N = 0$ brauchen wir auf diesen Fall nicht näher einzugehen.

Im Gebiet IV findet man in der kalten Schicht den Typus II, 2 mit allmählichem Übergang in I, 1 für kleine μ nahe dem zellularen Gebiete. θ_1 liegt also hier immer im ersten Quadranten, und der Fall ist deshalb zu verwerfen.

Im Gebiet VI betrachten wir zunächst die Stromlinien, die der Lösungskurve für Ordinaten *unterhalb des Schnittpunktes* zwischen $N = 0$ und $N' = 0$ entsprechen, vgl. Abb. 97. Man findet wieder den Typus II, 4 in der kalten Schicht und II, 5 in der warmen, also genau dieselben Stromlinien wie oben im Gebiet V. Dieser Fall braucht nicht berücksichtigt zu werden.

Zu der Lösungskurve für Ordinaten *oberhalb des Schnittpunktes* zwischen $N = 0$ und $N' = 0$ gehören schließlich für abnehmende μ der Reihe nach die Stromlinientypen II, I, VI in der kalten Schicht. Dabei geht der Stromflächentypus 3 allmählich in 2 über. In der warmen Schicht findet man nacheinander die Stromlinien II, III, IV, alle vom Stromflächentypus 3. Für große μ, d. h. in der Nähe des Instabilitätspunktes der Lösungskurve, liegen also θ_1 und θ_1' beide im zweiten Quadranten. Man hat dann konkav-parabolische Stromlinien in der ac-Projektion für die kalte Schicht und konvex-parabolische für die warme mit positivem Orbitalumlauf in beiden Schichten.

In der Projektion auf die Diskontinuitätsfläche gibt dies konvex-parabolische Stromlinien in der kalten und konkav-parabolische Stromlinien in der warmen Schicht, mit zyklonischen Orbitalumläufen in beiden Schichten. Der Bewegungssinn längs der Stromlinien ist deshalb der gleiche wie in der Abb. 47 rechts; da das entsprechende Stromliniensystem nicht auf den meteorologischen Karten gefunden wird, *so muß man die Lösung als Zyklonenwelle verwerfen.*

4. *Fortpflanzungsgeschwindigkeit algebraisch größer als die Geschwindigkeit der warmen Strömung: zyklonenähnliche Welle im unbegrenzten Medium.* Es handelt sich um die Stromlinientypen derjenigen Welle, deren Lösungskurve sich aus $N' = 0$ ergibt, und die in den Gebieten IV und VI verläuft.

Im Gebiet IV findet man in der kalten Schicht den Typus II, 2, der für kleine μ nahe dem zellularen Gebiet allmählich in I, 1 übergeht, also ganz wie im Gebiet IV des vorigen Falles. θ_1 liegt somit im ersten Quadranten: dieser Fall kommt nicht in Frage.

Im Gebiet VI findet man in der warmen Schicht den Typus II, 4, d. h. konvex-parabolische Stromlinien mit negativem Umlauf der Teilchen und θ_1' im zweiten Quadranten. Da $N' = 0$ oberhalb $N = 0$ ver-

läuft, findet man in der kalten Schicht für abnehmende Werte von μ der Reihe nach die Stromlinientypen II, I, VI. Die ac-Projektion dieser Stromlinien ist also konkav-parabolisch für kurze Wellen; bei zunehmender Wellenlänge rückt aber ein elliptischer Punkt von oben her ins Feld herein und verschwindet schließlich im negativen Unendlichen. Man erhält dann zuerst elliptische Stromlinien, die ihrerseits in konvex-parabolische übergehen. Die Umlaufsrichtung der Teilchen ist im ersten der drei Fälle positiv, im zweiten negativ oberhalb und positiv unterhalb des elliptischen Punktes und im dritten Fall negativ.

Je nachdem ob $N' = 0$ unterhalb oder oberhalb $F = 0$ verläuft, liegt der Stromflächentypus 2 oder 3 vor. Der erstere Fall tritt für sehr kleine Werte des Parameters $g_b + 2\Omega_c U$ ein; er gibt ein θ_1 im ersten Quadranten und kommt deshalb nicht in Frage. Für wachsende Werte des Parameters wächst aber θ_1, gelangt in den zweiten Quadranten, wenn der Stromflächentypus 3 auftritt und nähert sich π, wenn der Parameter einen den atmosphärischen Verhältnissen entsprechenden Wert erreicht hat. Es zeigt sich dann, *daß die Orbitalbahnen in beiden Schichten ein Gefälle gegen Süden haben*, und zwar ist dieses Gefälle *in der warmen Schicht am größten*, d. h. $\theta_1 > \theta_1'$. Da in der Diskontinuitätsfläche $z' = z$ ist, folgt hieraus, daß in der Fläche $y' > y$ ist, also: *Die meridionale Gleitgeschwindigkeit längs der Diskontinuitätsfläche ist in der warmen Schicht größer als in der kalten* (vgl. **140** und Abb. 78).

Für die Projektion der Stromlinien auf die Diskontinuitätsfläche, die man mit den Stromlinien der meteorologischen Karten vergleicht, findet man:

In der warmen Schicht sind die Stromlinien konkav-parabolisch, und der Orbitalumlauf ist antizyklonisch; in der kalten Schicht sind die Stromlinien bei den „kürzeren" Wellenlängen konvex-parabolisch, und der Orbitalumlauf ist zyklonisch.

Geht man zu größeren Wellenlängen über, so werden die Stromlinien in der kalten Schicht elliptisch, wobei der Orbitalumlauf nördlich des elliptischen Punktes zyklonisch bleibt, während er südlich antizyklonisch wird. Schließlich werden die Stromlinien für sehr lange Wellen konkav-parabolisch und die Orbitalumläufe antizyklonisch.

160 (II). Theorie der Zyklonen: (II) Zyklonenähnliche Welle in zwei isothermen Schichten unendlicher Mächtigkeit.

Im Falle der als „kürzer" bezeichneten Wellenlängen begegneten wir, im Fall 4 des Abschnittes **160 (I)**, zum ersten Male *dem normalen Stromlinienbild der jungen Zyklone, und gleichzeitig haben wir die normale Fortpflanzung dieser Zyklone, nämlich nach Osten, und zwar mit größerer Geschwindigkeit als die der warmen Strömung; schließlich ent-*

spricht die oben gefundene Vertikalbewegung den atmosphärischen Verhältnissen.

Daß wir diese Resultate schon im Falle eines unbegrenzten Mediums erhalten haben, ist in gewisser Hinsicht eine Überraschung. In unseren elementaren Überlegungen (**139**) haben wir nämlich dieselben Resultate erzielt vermittels der starren Grenzfläche, die zusammen mit der schrägen Diskontinuitätsfläche einen keilförmigen Raum begrenzte. Jetzt wird dasselbe im unbegrenzten Medium ohne die Hilfe irgendeiner Grenzfläche erzielt. Offenbar ist das eine Folge der inneren Stabilität des isothermen Mediums: die äquisubstantiellen Flächen sind Flächen, die im Grundzustand eine Gleichgewichtsneigung haben, die sie auch während der Störung möglichst zu behaupten suchen. Dadurch üben sie eine ähnliche Wirkung wie die unbeweglich liegende horizontale Bodenfläche aus. In der kalten Schicht bilden diese äquisubstantiellen Flächen zusammen mit der Diskontinuitätsfläche ähnliche keilförmige Räume, wie der starre Boden mit der Diskontinuitätsfläche.

Dank dieser inneren Stabilität können wir also in einem unbegrenzten Medium Wellenbewegungen von ausgeprägt zyklonenähnlichem Charakter erhalten.

Diese Ähnlichkeit mit den Zyklonen tritt aber nur bei den Wellen auf, die wir die „kürzeren" nannten. Nehmen wir nun einen Windsprung von 10 m/sec und einen Temperatursprung von 10°, so ergibt sich bei einer Wellenlänge von 2000 km eine Periode von 22,4 Stunden, die ungefähr der Zyklonenperiode entspricht. Die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist 25 m/sec, was vielleicht ziemlich viel ist. Das enthält aber nichts Überraschendes, da das isotherme Medium eine bedeutend größere innere Stabilität als die atmosphärischen Schichten hat.

Wir haben dann die wichtige Frage nach der Stabilität oder Instabilität dieser Welle zu untersuchen. Aus der Diskussion der Kurven $N = 0$ (S. 589) wissen wir schon, daß $N' = 0$ eine vertikale Tangente erhält, sobald $g_b + 2\Omega_c U'$ den kritischen Wert **156** (12) überschreitet. *Gegenüber Wellenlängen größer als diejenige, die dieser Tangente entspricht, hat man dann Instabilität des Grundzustandes.* Damit Instabilität eintreten kann, muß also

$$(1) \qquad + 2\Omega_c U' = 2\Omega_c \Gamma \frac{U' - U}{\Gamma - \Gamma'} > 2\Omega_c \frac{\sqrt{\gamma'}}{\Gamma' - \gamma'}$$

sein. Oder nach Einführung der Temperatur:

$$(1') \qquad U' - U > \frac{\Theta' - \Theta}{\varkappa - 1} \sqrt{\frac{\varkappa R}{\Theta'}} .$$

Führt man hier die numerischen Werte $\varkappa = 1{,}403$, $R = 287$ und $\Theta = 273$ ein, so findet man das einfache Resultat, daß der *Grundzustand hinlänglich langen Wellen gegenüber instabil wird, wenn*

$$\Delta U > 3\Delta\Theta, \tag{2}$$

d. h. wenn der Geschwindigkeitssprung, ausgedrückt in Metern pro Sekunde, den dreifachen Temperatursprung, gemessen in Celsiusgraden, numerisch übersteigt. Dies besagt, daß in der isothermen Atmosphäre eine Diskontinuitätsfläche mit einer Neigung größer als 1 : 95 instabil ist. Bei der kleineren inneren Stabilität der wirklichen Atmosphäre hat man die Stabilitätsgrenze bei noch kleineren Neigungswinkeln der Diskontinuitätsfläche zu erwarten, und die Instabilität dieser Flächen sollte eine sehr häufige Erscheinung sein.

Was wir aber noch nicht wissen, ist, wie kurz die „hinlänglich langen" Wellen sein können, die sich spontan auf der instabilen Diskontinuitätsfläche bilden werden. Dies läßt sich aber aus der Gleichung **155** (3) für $N' = 0$ nach der S. 418 verwendeten Methode entnehmen, da diese Gleichung im Instabilitätspunkt, d. h. bei derjenigen Wellenlänge, wo der Übergang zur Instabilität stattfindet, eine Doppelwurzel hat. Dieser Instabilitätspunkt entspricht einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die immer unterhalb der des Schalles bleibt. Für wachsende Werte des Parameters $g_b + 2\Omega_c U'$ nimmt diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit immer ab, bleibt aber bei den gewöhnlich in der Atmosphäre vorkommenden Sprüngen von Wind und Temperatur ziemlich groß, was bei der großen inneren Stabilität des isothermen Mediums nicht anders zu erwarten ist.

Jedenfalls haben wir aber im unbegrenzten isothermen Medium eine Welle gefunden, die alle qualitativen Merkmale der Zyklone aufweist und quantitativ den Merkmalen der Zyklone so nahe kommt, wie man es bei der zu großen Stabilität des isothermen Mediums erwarten kann.

Noch haben wir aber nicht die Frage beantwortet, ob Wellenbewegungen dieser Art auch im begrenzten Medium bestehen können, mit einer Grenzfläche, die dem starren Erdboden entspricht. Für diese Untersuchung werden wir dieselbe Methode des Solidifiierens der Stromflächen verwenden, die bei dem inkompressiblen Medium scheiterte, wobei die Verhältnisse für das Gelingen hier besser zu liegen scheinen.

160 (III). Theorie der Zyklonen: (III) Das Solidifiieren einer Stromfläche. Aus dem Ausdruck **155** (1) und (7) der Amplituden B und C oder einfacher aus der Gleichung der Stromflächen **157** (3)

erhält man für die Winkel θ_1 und θ_1', unter denen die solidifiierbaren Stromflächen die Diskontinuitätsfläche $c = c_1$ schneiden:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{s}{N}\left[m + \eta \operatorname{ctgh}\eta\,(c_1 - c_0)\right],$$

$$\text{(1')} \qquad \operatorname{ctg}\theta_1' = \frac{s'}{N'}\left[m' - \eta' \operatorname{ctgh}\eta'(c_2 - c_1)\right].$$

Wir werden wie im homogen-inkompressiblen Fall untersuchen, inwieweit die Stromflächen beider Schichten an der Diskontinuitätsfläche eine gemeinschaftliche horizontale Tangentenebene haben können, die man später als den horizontalen Erdboden deuten kann. Die zu erfüllenden Bedingungen sind wie in **154**:

1° daß $\theta_1 = \theta_1' = \pi - \theta_d$, wo θ_d den Neigungswinkel der Diskontinuitätsfläche mit dem Erdboden darstellt;

2° daß θ_1 und θ_1' im zweiten Quadranten liegen.

Aus der Abb. 94 ersieht man, daß die Bedingung 2° nur in den folgenden Fällen erfüllt werden kann: in der unteren (kalten) Schicht für die Stromflächentypen 3, 4, 5 bei nichtzellularer, und für die Typen 1, 2, 3 bei zellularer Bewegung; in der oberen (warmen) Schicht für die Stromflächentypen 2, 3, 4 bei nichtzellularer, und 4, 5, 6 bei zellularer Bewegung.

Wir richten unsere Aufmerksamkeit ausschließlich auf den nichtzellularen Fall, aus Gründen, die wir schon bei der Behandlung des entsprechenden Problems für das homogen-inkompressible Medium dargelegt haben (S. 584).

Zur Erfüllung der obigen Bedingung 1° ersetzen wir die linke Seite der Gleichungen (1) und (1') durch $-\operatorname{ctg}\theta_d$ und eliminieren die Schichtdicken $c_1 - c_0$ und $c_2 - c_1$ aus diesen Gleichungen und der Frequenzengleichung **159** (1). Es ergibt sich dann:

$$\frac{\Gamma}{N}\left\{M(\varpi - U)^2\left(\frac{N}{s}\operatorname{ctg}\theta_d - m\right) + n\right\} = \frac{\Gamma'}{N'}\left\{M'(\varpi - U')^2\left(\frac{N'}{s'}\operatorname{ctg}\theta_d - m'\right) + n'\right\}.$$

Aus den Werten **156** (4) und (5) von m und n findet man andererseits:

$$-M(\varpi - U)^2 m + n = -\frac{N}{s}\,2\Omega_c(g_c - 2\Omega_b\,\varpi)\,(\varpi - U),$$

wo die Hilfsgrößen N und s nach **155** (3) und **156** (2) eingeführt worden sind. Führt man dies in die obige Gleichung ein, so kürzt sich ein Faktor N im Zähler und Nenner links und ein Faktor N' im Zähler und Nenner rechts. Wir erhalten somit $N = 0$ und $N' = 0$ als singuläre Wurzeln, ganz wie im Gleichgewichtsfall **150**, wo auch die LAPLACEsche Schallgeschwindigkeit als singuläre Wurzel ausschied. Die zu diesen Wurzeln gehörigen Wellen sind diejenigen, die wir im Abschnitt **160 (I)** für den Fall unendlicher Schichtmächtigkeiten behandelt haben.

Das Hauptinteresse knüpft sich deshalb jetzt an die übrigen Wurzeln, die sich aus der folgenden Gleichung ergeben:

$$\frac{\Gamma(\tilde\omega - U)}{s}\{2\Omega_c(g_c - 2\Omega_b\tilde\omega) + M(\tilde\omega - U)\operatorname{ctg}\theta_d\}$$
$$= \frac{\Gamma'(\tilde\omega - U')}{s'}\{2\Omega_c(g_c - 2\Omega_b\tilde\omega) + M'(\tilde\omega - U')\operatorname{ctg}\theta_d\}.$$

Durch Einführung der Werte **153** (1′) von $\operatorname{ctg}\theta_d$, **155** (2) von M und **156** (2) von s ergibt sich hieraus mit $\Gamma = 1/(R\Theta)$ und $\gamma = 1/(\varkappa R\Theta)$:

$$\mu^2[\Theta'(\tilde\omega-U)^3-\Theta(\tilde\omega-U')^3]-\mu^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa R}\frac{U'-U}{\Theta'-\Theta}(\tilde\omega-U)(\tilde\omega-U')[\Theta'(\tilde\omega-U)^2-\Theta(\tilde\omega-U')^2]$$
$$=\frac{4\Omega_c^2}{g_c}\tilde\omega[\Theta'(g_c-2\Omega_b U)-\Theta(g_c-2\Omega_b U')]\left[1-\frac{\varkappa-1}{\varkappa R}\frac{U'-U}{\Theta'-\Theta}\left(\tilde\omega-\frac{\Theta'U'-\Theta U}{\Theta'-\Theta}\right)\right].$$

Für $\varkappa = 1$, d. h. isotherme Zustandsänderung und folglich Autobarotropie, reduziert sich diese Gleichung auf die entsprechende dritten Grades für zwei inkompressible Schichten, **154** (3), die eine stabile, schnell nach Westen laufende Welle und zwei, bei kurzen Wellenlängen instabile, ostwärts gehende Wellen ergab. Für $\varkappa > 1$ ist die Gleichung (2) vom vierten Grad in $\tilde\omega$, durch die innere Stabilität kommt also eine neue Wurzel hinzu.

Wenn wir in (2) die kleinen Glieder mit Ω_b vernachlässigen und

$$(3)\qquad \begin{aligned} U' &= \bar U + \tfrac12\Delta U, & U &= \bar U - \tfrac12\Delta U,\\ \Theta' &= \bar\Theta + \tfrac12\Delta\Theta, & \Theta &= \bar\Theta - \tfrac12\Delta\Theta \end{aligned}$$

einführen, so erhalten wir:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\mu^2\Delta U[3(\tilde\omega-\bar U)^2+\tfrac14(\Delta U)^2]+\mu^2\frac{\Delta\Theta}{\bar\Theta}(\tilde\omega-\bar U)[(\tilde\omega-\bar U)^2+\tfrac34(\Delta U)^2]\\ &-\mu^2\frac{\varkappa-1}{\varkappa R}\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}[(\tilde\omega-\bar U)^2-\tfrac14(\Delta U)^2]\left\{2\Delta U(\tilde\omega-\bar U)+\frac{\Delta\Theta}{\bar\Theta}[(\tilde\omega-\bar U)^2+\tfrac14(\Delta U)^2]\right\}\\ &=4\Omega_c^2\frac{\Delta\Theta}{\bar\Theta}\tilde\omega\left\{1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa R}\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\left[\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\bar\Theta-(\tilde\omega-\bar U)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Nach Analogie mit dem Fall der Homogenität und Inkompressibilität (vgl. **154** (5)) schließt man, daß diese Gleichung mindestens eine große Wurzel besitzen muß, und zwar zeigt sich durch einen Vergleich der Größenordnungen der Koeffizienten, daß sie von der Größenordnung $\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\bar\Theta$ sein muß. Wir führen also:

$$(5)\qquad \tilde\omega - \bar U = \frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\bar\Theta x,$$

wo x von der Größenordnung 1 ist, in die Gleichung (4) ein und erhalten in erster Annäherung:

$$(6)\quad 3x^2+x^3-\frac{\varkappa-1}{\varkappa R}\left(\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\right)^2\bar\Theta(x^4+2x^3)=\frac{4\Omega_c^2}{\mu^2}\left(\frac{\Delta\Theta}{\Delta U}\right)^2\frac{x}{\bar\Theta^2}\left[1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa R}\left(\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\right)^2\bar\Theta(1-x)\right].$$

Wir betrachten gesondert die Fälle eines großen und eines kleinen μ.

(I) *μ groß und die Wellenlängen entsprechend klein.* Die rechte Seite von (6) ist dann von geringerer Größenordnung als die Glieder links und kann in erster Annäherung fortgelassen werden, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen ist angenähert von der Wellenlänge unabhängig; außerdem hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht vor der Erddrehung ab, — eine Erscheinung, die uns schon mehrmals bei den kurzen Wellen begegnet ist.

Durch Nullsetzen der linken Seite von (6) ergibt sich nun, wenn wir nach (5) zu den ursprünglichen Variablen zurückkehren:

$$(7)\qquad (\bar{\omega} - \bar{U})^2 + \left|2\frac{\Delta U}{\Delta \Theta}\bar{\Theta} - \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\,\frac{\Delta \Theta}{\Delta U}\right|(\bar{\omega} - U) - 3\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\bar{\Theta} = 0\,,$$

und durch Auflösung folgt hieraus:

$$(7')\quad \bar{\omega} = \bar{U} - \frac{\Delta U}{\Delta \Theta}\bar{\Theta} + \frac{1}{2}\,\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\,\frac{\Delta \Theta}{\Delta U} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{\Delta \Theta}\bar{\Theta}\right)^2 + 2\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\bar{\Theta} + \left(\frac{1}{2}\,\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\,\frac{\Delta \Theta}{\Delta U}\right)^2}\,.$$

Da der Radikand immer positiv ist, ergibt dies zwei stabile Wellen. Die eine läuft nach *Westen* mit sehr großer Geschwindigkeit — von der Größenordnung 1000 m/sec; wie aus der Gleichung (6) zu ersehen ist, geht sie für $\varkappa = 1$ in die bei Homogenität und Inkompressibilität studierte Welle **154** (7) über. Die andere läuft nach *Osten* mit kleinerer Geschwindigkeit, jedenfalls solange das Verhältnis von Windsprung zu Temperatursprung größer als 10 ist. Wenn aber dieses Verhältnis abnimmt, wächst auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle. Für $\frac{\Delta U}{\Delta \Theta} \approx 1$ ist sie z. B. von der Größenordnung 1000 m/sec geworden. Diese Welle hat kein Analogon im homogen-inkompressiblen Medium, sie ist wegen der inneren Stabilität des isothermen Mediums hinzugekommen, und ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit wächst bei verschwindender Stabilität ($\varkappa \to 1$) über alle Grenzen.

Außer diesen beiden besitzt aber die Gleichung vierten Grades (4) noch zwei weitere Wurzeln. Aus den Koeffizienten der Gleichung ersieht man, daß diese Wurzeln von der Größenordnung ΔU sind, also klein gegenüber den eben betrachteten. Sie ergeben sich angenähert aus der Gleichung, die durch Division von (4) mit der linken Seite von (7) entsteht, wenn diese beiden Ausdrücke mit dem konstanten Gliede beginnend nach steigenden Potenzen von $\bar{\omega}$ geordnet sind.

Wenn wir der Einfachheit halber $U = 0$ setzen, so lautet die entstehende Gleichung:

$$(8)\quad \begin{aligned} &\left\{1 + \frac{4\Omega_c^2}{9\mu^2}\left(\frac{\Delta \Theta}{\bar{\Theta}\Delta U}\right)^2 + 2\frac{\varkappa - 1}{\varkappa R\bar{\Theta}} - 2\left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa R}\right)^2\left(\frac{\Delta U}{\Delta \Theta}\right)^2\right\}\bar{\omega}^2 \\ &\qquad \left[\Delta \Theta \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa R}\left(\frac{\Delta U}{\Delta \Theta}\right)^2\right]\left[\frac{2}{3} - \frac{4\Omega_c^2}{\mu^2(\Delta U)^2}\right]\frac{\Delta U}{3}\bar{\omega} + \frac{1}{12}(\Delta U)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Für großes μ, d. h. für kurze Wellen, sind die Wurzeln komplex, und es liegt Instabilität vor. Erst bei Wellenlängen genügender Größe erhält man stabile Wellen.

Die instabilen Wellen pflanzen sich für $L < \sqrt{\frac{2}{3}}\, \frac{\pi}{\Omega_c}\, \Delta U$ nach Westen und für größere Wellenlängen nach Osten fort. Die stabilen Wellen laufen immer nach Osten. Da die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sehr klein sind, werden die Perioden entsprechend groß, ganz wie bei den entsprechenden Wurzeln im homogen-inkompressiblen Fall (**154**).

(II) *μ klein und die Wellenlängen entsprechend groß.* Für lange Wellen ($L > 10^6$ m) werden auch die beiden Wurzeln (7′) von der Wellenlänge abhängig, und die oben ausgeführte Zerlegung der Gleichung (4) ist nicht mehr gestattet. Nun ist aber (4) für $\mu = 0$ und $\bar{\omega} = 0$ befriedigt, woraus man bei großen Wellenlängen auf das Vorhandensein einer sehr kleinen Wurzel $\bar{\omega}$ schließen kann. Angenähert ergibt sich diese, wenn man in (4) die Glieder höherer Größenordnung in $\bar{\omega}$ vernachlässigt; man erhält dann für $\bar{U} = 0$, für einen kleinen Temperatursprung und für ein so kleines μ, daß ΔU im Vergleich zu $2\Omega_c/\mu$ vernachlässigt werden kann:

$$\bar{\omega} - \frac{1}{4}\,\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\,\frac{\mu^2}{4\,\Omega_c^2}\,\Delta U\,\Delta\Theta = 0\,. \tag{9}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional. Bei abnehmender Wellenlänge wächst also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wenn auch nicht unbegrenzt, wie es nach der angenäherten Gleichung (9) aussieht. Vielmehr geht die Wurzel stetig in die kleinere Wurzel von (8) über, die ja, wie gezeigt, bei größeren Wellenlängen stabile Wellen ergibt.

Um die drei anderen Wurzeln von (4) zu bestimmen, dividieren wir diese Gleichung mit der linken Seite von (9), wodurch sich für $\ddot{U} = 0$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^3 &+ \left[2\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\bar{\Theta} - \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\,\frac{\Delta\Theta}{\Delta U}\right. \\ &- \left[\frac{4\,\Omega_c^2}{\mu^2} + 3\,\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\,\bar{\Theta}\right]\bar{\omega} + \frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\,\bar{\Theta}\left[\frac{4\,\Omega_c^2}{\mu^2} - \frac{3\,\mu^2}{4\,\Omega_c^2}\left(\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\right)^2\frac{(\Delta\Theta)^2}{4}\right. = 0\end{aligned} \tag{10}$$

ergibt. Diese Gleichung dritten Grades hat nun eine große negative Wurzel, die bei abnehmenden Wellenlängen in die algebraisch kleinere der Wurzeln (7′) stetig übergeht. Diese Wurzel ist angenähert:

$$\bar{\omega} + 2\,\frac{\Delta U}{\Delta\Theta}\,\bar{\Theta} - \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\,\frac{\Delta\Theta}{\Delta U} = 0\,. \tag{11}$$

Sie ist also immer reell und die entsprechende Welle stabil.

Durch Division von (10) mit der linken Seite von (11) erhält man, wenn beide Ausdrücke nach steigenden Potenzen von $\tilde{\varpi}$ geordnet sind, schließlich die Gleichung zweiten Grades:

$$a\tilde{\varpi}^2 + 2b\tilde{\varpi} + c = 0, \tag{12}$$

wo

$$a = 1 + \frac{3}{4}\left(2\frac{\Omega_c^2}{\mu^2} + \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\,\Theta\right)\left(\frac{\Delta\Theta}{\bar{\Theta}\Delta U}\right)^2,$$

$$b = -\left[2\frac{\Omega_c^2}{\mu^2} + \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\bar{\Theta}\right]\left[\frac{3}{2} + \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\frac{1}{\bar{\Theta}}\left(\frac{\Delta\Theta}{\Delta U}\right)^2\right]\frac{\Delta\Theta}{2\bar{\Theta}\Delta U} + \frac{1}{8}\left(\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\right)^2\frac{1}{\Theta}\left(\frac{\Delta\Theta}{\Delta U}\right)^3,$$

$$c = \frac{\Omega_c^2}{\mu^2}\left[2 + \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\frac{1}{\bar{\Theta}}\left(\frac{\Delta\Theta}{\Delta U}\right)^2\right] \quad \frac{3\mu^2}{4\Omega_c^2}\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}\frac{1}{\bar{\Theta}}\frac{\Delta\Theta}{\Delta U}.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung stellen zwei sich nach Osten fortpflanzende Wellen dar, die bei großen Wellenlängen instabil, bei kleineren aber stabil sind. Für sehr kleine Wellenlängen gehen die Wurzeln in die große positive Wurzel (7′) und in die größere der Wurzeln von (8) über.

160 (IV). Theorie der Zyklonen: (IV) Zyklonenähnliche Welle mit horizontaler starrer Grenzfläche.

Das Verhalten der vier Wurzeln von **160 (III)** (4) bei jeder beliebigen Wellenlänge ist damit klargelegt, und die Resultate für die vier entsprechenden Wellen sind die folgenden.

Erstens hat man eine *bei allen Wellenlängen stabile Welle,* die sich mit großer Geschwindigkeit nach Westen fortpflanzt. Als stabil kann sie sich nicht spontan bilden, und sie ist ohne Interesse für die Zyklonentheorie.

Zweitens hat man eine Welle, die eine sehr kleine Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat, und die *bei kleinen Wellenlängen instabil, bei größeren stabil* wird. Von dem Fall ganz kleiner Wellenlängen abgesehen, pflanzt sie sich nach Osten fort, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die immer kleiner als die der warmen Strömung bleibt und mit wachsender Wellenlänge abnimmt, so daß die Perioden von der Größenordnung mehrerer Tage werden. Wenn sich deshalb eine Störung dieser Art auch spontan bilden kann, so wird sie nicht als eine zyklonenähnliche Störung angesehen werden können, sowohl wegen des Bewegungssinnes längs der Stromlinien (vgl. Abb. 47 rechts), wie wegen der langsamen Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Drittens hat man eine Welle, die *in einem Zwischengebiet stabil ist, dagegen instabil sowohl für größere wie auch für kleinere Wellenlängen.* Im letzteren Instabilitätsgebiet hat sie dieselbe rein konvektive Fortpflanzungsgeschwindigkeit wie die eben behandelte zweite Welle, und dabei nehmen die Amplituden der einen Welle exponentiell ab, während die der anderen exponentiell zunehmen. Von dem Fall ganz kleiner

Wellenlängen abgesehen, pflanzt sich diese dritte Welle nach Osten fort, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die mit der Wellenlänge zunimmt.

Viertens hat man eine mit größerer Geschwindigkeit nach Osten laufende Welle, die *bei kleinen Wellenlängen stabil, bei größeren instabil* ist. Im Instabilitätspunkt fällt sie mit der eben behandelten Welle zusammen, wonach beide im Instabilitätsgebiet die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben, nämlich eine rein konvektive, während die eine exponentiell zunehmende, die andere exponentiell abnehmende Amplituden hat.

Uns interessiert das gemeinschaftliche Instabilitätsgebiet der beiden letzten Wellen. Um ein Urteil über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Schwingungsdauer zu erhalten, wählen wir als Beispiel $\Delta U = 20$ m/sec, $\Delta \Theta = 1°$, und $\Omega_c = 0{,}6313 \cdot 10^{-4}$ entsprechend der Breite von 60°. Die dritte Welle ist dann stabil für Wellenlängen zwischen 2000 und 2700 km. Der unteren Grenze entspricht eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 5 m/sec und eine Periode von 111 Stunden, der oberen Grenze entspricht eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 35 m/sec und eine Periode von 21 Stunden. Es ist deshalb das Gebiet oberhalb dieser Grenze, das in Frage kommt. Bei größeren Temperatursprüngen wird die Instabilitätsgrenze in die Richtung noch größerer Wellenlängen verschoben. Man findet also eine Instabilitätsgrenze bei größeren Wellenlängen als bei den wirklichen Zyklonen, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind entsprechend größer, beides eine offenbare Folge davon, daß das isotherme Medium größere innere Stabilität als die Atmosphäre hat, wobei der quantitative Unterschied gar nicht größer ist, als zu erwarten wäre.

Schließlich ist der Typus der Stromlinien zu bestimmen, was jetzt aus den Abb. 93 und 95 mit den obigen Werten der Wellenlänge und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit geschehen kann. Betrachtet man nur die zyklonenähnlichen Wellen wo $\bar{\omega} > U'$ ist, so hat man in der kalten Schicht den Typus II, 4, in der warmen II, 3. Aus der Projektion der Stromlinien auf die ac-Ebene, die zu der Diskontinuitätsfläche senkrecht steht, aber zu dem Erdboden geneigt ist, haben wir jetzt die Stromlinien in Projektion auf die horizontale Tangentenebene der solidifiierten Stromfläche zu bestimmen: sie sind *konvex-parabolisch nördlich und konkav-parabolisch südlich der Diskontinuitätsfläche, mit zyklonischem Orbitalumlauf in der kalten und antizyklonischem Umlauf in der warmen Schicht, — alles wie in den jungen Zyklonen.*

Über die gefundene Lösung ist noch folgendes zu bemerken, indem wir zu den auf S. 584 gegebenen Betrachtungen zurückkehren: die Geschwindigkeit nimmt exponentiell mit dem Abstande von der Dis-

kontinuitätsfläche ab, und die Dichte nimmt exponentiell mit dem Abstande vom horizontalen Erdboden ab. Als kombinierte Wirkung davon besteht ein Feld von dynamischer Bedeutung nur in der Nähe des Erdbodens, und zwar nur in unmittelbarer Nähe der Schnittlinie des Erdbodens mit der Diskontinuitätsfläche. Oder in meteorologischer Sprache: eine dynamisch bedeutungsvolle Bewegung besteht nur in den unteren troposphärischen Schichten der Atmosphäre, und zwar nur in genügender Nähe der hin und her wogenden „Polarfront".

161. Schlußbemerkung. Die Integration der Störungsgleichungen für zwei isotherme Schichten in zonaler Bewegung auf der rotierenden Erde hat uns also zu einer ganzen Reihe von Wellentypen geführt, unter denen wir die in **160 (II)** und **160 (IV)** hervorgehobenen als Zyklonenwellen erkannt haben. Beide sind instabil und können sich folglich wie die Zyklonen spontan bilden. Die erste Welle **160 (II)**, wo die Schichtmächtigkeiten unendlich sind, zeigt alle empirisch bekannten Merkmale der jungen Zyklone: Fortpflanzung nach Osten mit einer plausiblen Fortpflanzungsgeschwindigkeit und das für die freie Atmosphäre richtige Bewegungsfeld, einschließlich der kleinen, aber wichtigen Vertikalkomponenten der Bewegung. Sie hat aber keine solidifiierbare Stromfläche mit stetiger Tangentenebene, die horizontal gelegt und als Erdoberfläche gedeutet werden kann. Die zweite Welle **160 (IV)**, wo eine solidifiierte Stromfläche den horizontalen Erdboden vertreten kann, hat ebenfalls eine einseitige Fortpflanzung nach Osten, ebenfalls eine plausible Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber ein spezielleres Bewegungsfeld, wo die Vertikalkomponenten der Geschwindigkeit in der Nähe der Diskontinuitätsfläche Null sind. Gerade vermöge dieser Eigenschaft war es möglich, einen horizontalen Erdboden einzulegen. *Eine Lösung, welche die ganze Erscheinung der Wellenzyklone wiedergeben soll, muß also in der freien Atmosphäre vom Typus* **160 (II)** *und nahe am Erdboden vom Typus* **160 (IV)** *sein.* Es wird eine wichtige Aufgabe sein, eine allgemeine Lösung zu finden, wo diese zwei Typen in einer einzigen verschmolzen sind.

Der in **160** dargestellte erste Versuch, eine mathematische Theorie der Zyklonenbildung und der jungen Zyklonen zustande zu bringen, muß also mit der Zeit durch weitere Untersuchungen ergänzt werden. Unter den in großer Fülle sich darbietenden Problemen seien nur die folgenden erwähnt:

Das Störungsproblem muß für Schichten mit linearem Temperaturgradienten gelöst werden und mit Grundgeschwindigkeiten, die von der Höhe abhängen. Erst dadurch wird man einen vollen Überblick über die Bedeutung der inneren Stabilität des Mediums für die Mechanik der Zyklonenbildung erhalten und bessere quantitative Übereinstimmung erzielen können.

Ferner ist es wünschenswert, die Methode des Solidifiierens der Stromflächen durch die allgemeinere Lösung des Problems als Randwertaufgabe zu ersetzen und die auf diesem Wege erzielten formalen Lösungen auch durchzudiskutieren (S. 541). In dieser Weise würde man wahrscheinlich Lösungen finden, deren Orbitalbewegung an der Erdoberfläche horizontal, in der Höhe aber geneigt ist.

Endlich sei folgendes hervorgehoben. Es ist ganz offenbar nicht befriedigend, Wellen von tausenden Kilometern Länge auf der Erde zu behandeln, ohne auf die Krümmung der Erde Rücksicht zu nehmen. Die Probleme müssen deshalb früher oder später als ein Kugel- oder Ellipsoidproblem gelöst werden. In gewisser Hinsicht wird das ohne Zweifel ein viel schwierigeres Problem als diejenigen, die man in cartesischen Koordinaten lösen kann. Es werden aber sicher auch gleichzeitig viele Schwierigkeiten spezieller Art fortfallen, besonders bei Grenzübergängen, weil man auf der Kugel nichts mehr mit dem Unendlichfernen zu tun hat.

Zweiter Teil.

Anwendungen auf die Meteorologie.

162. Einleitende Bemerkungen. Für das allgemeine Verständnis des folgenden empirisch-meteorologischen Teiles ist es nicht notwendig, den theoretisch-hydrodynamischen Teil vollständig durchgearbeitet zu haben. Die in Anwendung kommenden Gebrauchsformeln sowie die grundlegenden dynamisch-physikalischen Überlegungen wird man in dem Kapitel IV, im Abschnitt **110** des Kapitels IX und im Kapitel XII entwickelt finden, überall mit den für das Verständnis nötigen Hinweisen auf einzelne Abschnitte der einleitenden Kapitel I, II, III.

Für diejenigen, die die mathematische Theorie der dynamisch-meteorologischen Erscheinungen weiter entwickeln möchten, wird es die Hauptsache sein, die im empirischen Teil dargestellten Ergebnisse mit den theoretischen Entwicklungen der Kapitel VIII, IX, X, XI, XIII und XIV parallel zu studieren.

Fünfzehntes Kapitel.

Der mittlere Zustand der Atmosphäre.

163. Das mittlere Temperaturfeld. Das Temperaturfeld der Atmosphäre nahe der Erdoberfläche unterliegt sowohl den periodischen täglichen und jahreszeitlichen Schwankungen, als auch den aperiodischen Veränderungen. Wenn man diese Schwankungen durch Mittelbildung für Zeiträume von mehreren Jahren eliminiert, bekommt man ein ziemlich einfaches Bild des mittleren Temperaturfeldes der Luft im Meeresniveau[1] (Abb. 98 und 99). Die Isothermen umschließen beide Pole, in deren Nähe die kältesten bodennahen Luftschichten sich befinden. Am wärmsten sind die bodennahen Luftschichten in dem

---

[1] Wegen der systematischen Temperaturabnahme mit der Höhe müssen die Temperaturen der in verschiedenen Höhen gelegenen Beobachtungsstationen auf ein Standardniveau — hier das Meeresniveau — reduziert werden. Gewöhnlich reduziert man mittels der Formel $\theta_0 = \theta_h + 0{,}005\,h$, wo h die Höhe der betreffenden Beobachtungsstation ist. Die Berechtigung dieses Reduktionsverfahrens ist aus der Tabelle S. 638 (Stufe 0—2 km) ersichtlich.

Äquatorialgürtel, und zwar lagern die allerwärmsten Teile derselben über den äquatorialen Landflächen.

Überhaupt darf man annehmen, daß alle Abweichungen der Jahresisothermen vom „zonalen“ Verlauf letzten Endes auf die thermische Einwirkung der See- und Landverteilung zurückzuführen sind, denn auf einem Planeten gleichmäßiger Oberfläche müßten aus Symmetrie-

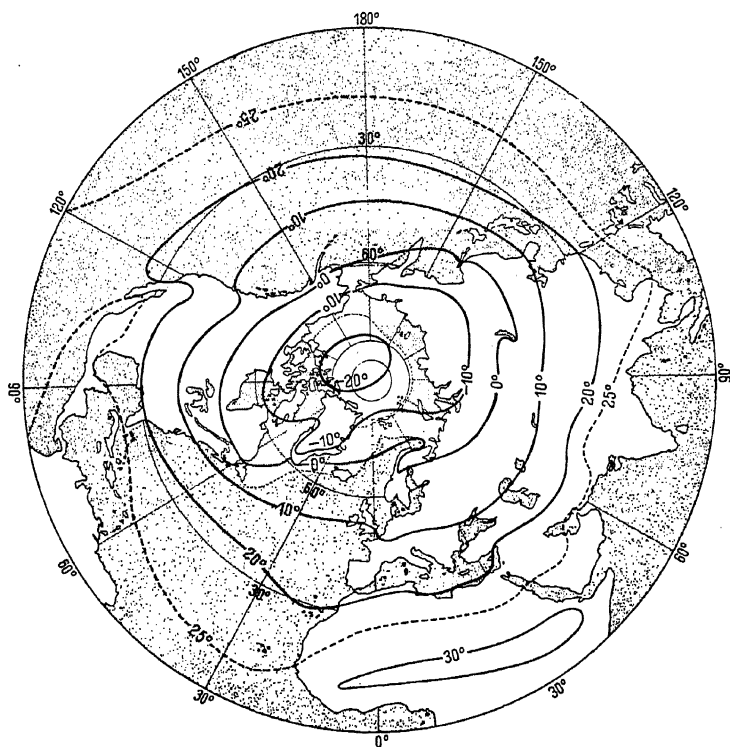



Abb. 98. Jahresisothermen der Atmosphäre der Nordhalbkugel im Meeresniveau.

gründen alle Punkte eines gegebenen Breitenkreises dieselbe Jahresmitteltemperatur haben.

Die beste Annäherung an diese *zonale Temperaturverteilung* hat man auf der südlichen Halbkugel, die größtenteils mit Wasser bedeckt ist. Auf der nördlichen Halbkugel mit ihren mächtigen Kontinenten weichen die Isothermen bedeutend mehr vom zonalen Verlauf ab.

Noch ausgeprägter wird der Einfluß der See- und Landverteilung in einer extremen Jahreszeit, wie dies aus den Mitteltemperaturkarten

der Nordhalbkugel für die Monate Februar bzw. August hervorgeht (Abb. 100 bzw. 101). Im Sommer sind alle eisfreien Kontinente warm im Verhältnis zu den Ozeanen auf gleicher geographischer Breite. Im Winter dagegen sind die Kontinente nur in den Tropen wärmer als die Ozeane, und polwärts davon durchwegs kälter als die Ozeane auf gleicher geographischer Breite.

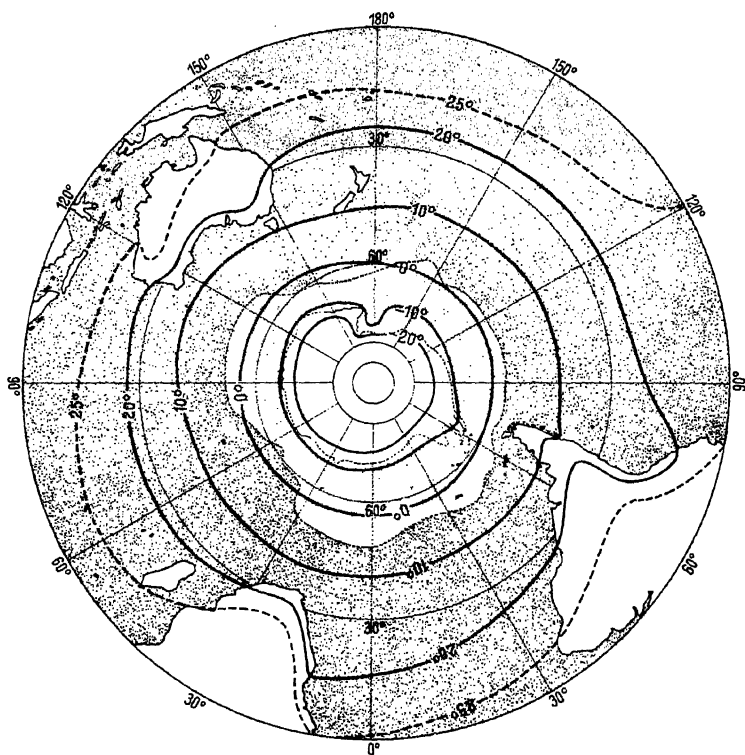



Abb. 99. Jahresisothermen der Atmosphäre der Südhalbkugel im Meeresniveau.

Der Verlauf der Isothermen in den verschiedenen Höhenlagen der freien Atmosphäre ist ungenügend bekannt, denn die aerologischen Aufstiege werden bloß an wenigen Punkten der Erde ausgeführt, und zwar meistens auch nur an wenigen Tagen des Jahres. Jedoch darf man annehmen, daß sich die mittleren Isothermen der freien Atmosphäre den Breitenkreisen, ähnlich wie am Boden, anschmiegen. Vielleicht werden sogar die Temperaturverhältnisse mit zunehmender Höhe mehr und mehr unabhängig von dem störenden Einfluß der See- und

Landverteilung, so daß sich die Isothermen in der Höhe besser an die Breitenkreise anschmiegen als die Bodenisothermen; sichere Beweise hierfür hat man aber noch nicht.

Aus der Abb. 102 geht hervor, wie die Temperatur der freien Atmosphäre von der geographischen Breite des Aufstiegsortes abhängt. Es sind der Einfachheit halber nur fünf Aufstiegsorte ausgewählt worden[1],

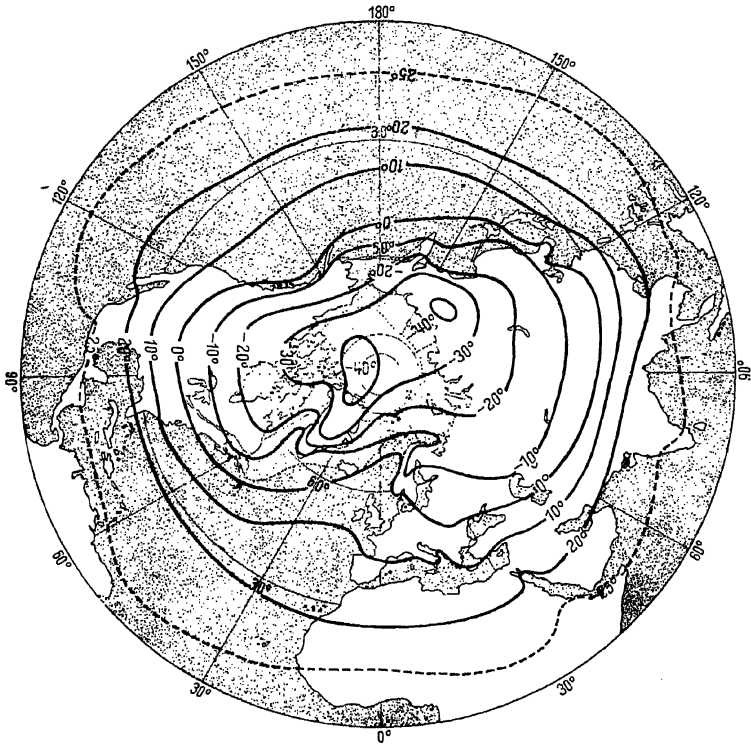



Abb. 100. Februarisothermen der Atmosphäre der Nordhalbkugel im Meeresniveau.

nämlich: 1. Das Polarmeer nördlich von Ostsibirien auf etwa 74° N, 2. Pawlowsk 60° N, 30° E; das nördlichste europäische aerologische

'en: 1. Sverdrup: The Norwegian North Polar Expedition with the „Maud" 1918–25, Scientific Results, Vol. III, Meteorology, Part II, Tables. Bergen 1930 — 2. Meteorol. Z., Januar 1911 — 3. Wiedergegeben in Sir Napier Shaw: Manual of Meteorology, Vol. II, S. 128 — 4. Memoirs of the Indian Meteorological Department, Vol. XXV, Part V. Calcutta 1930 — 5. Koninklijk Magnetisch en Meteorologisch Observatorium te Batavia. Verhandelingen No. 4. Batavia 1916.

Observatorium mit ständigem Betrieb, 3. Pavia 45° N, 9° E, das südlichste europäische aerologische Observatorium, 4. Agra 27° N, 78° E in Nordindien und 5. Batavia 6° S, 107° E auf Java. Die Kurven links geben die Mitteltemperaturen über den betreffenden Orten im Februar, dem kältesten Monat der freien Atmosphäre der Nordhalbkugel, während die Kurven rechts die Verhältnisse im wärmsten Mo-

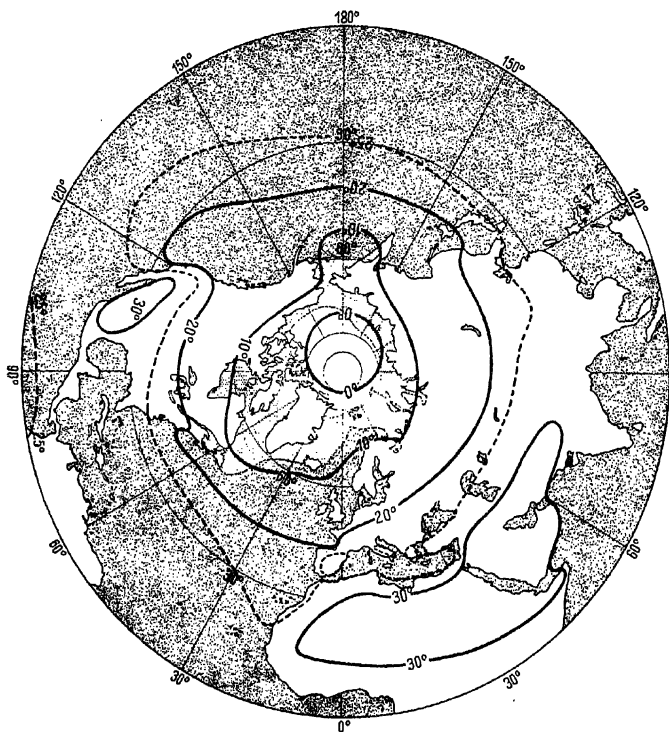



Abb. 101. Augustisothermen der Atmosphäre der Nordhalbkugel im Meeresniveau.

nat, dem August, darstellen. (Für das Polarmeer wurden wegen der kleinen Anzahl der Aufstiege Juli und August zusammengelegt.) Indem man auf diese Weise Einzelmonate herausgreift, reduziert sich die Anzahl der für die Mittelbildung zugrunde liegenden Aufstiege beträchtlich, und die Kurven weisen deshalb gewisse Unebenheiten auf, die nur auf Zufälligkeiten im geringen Beobachtungsmaterial beruhen. Die großen Züge der Temperaturverteilung sind jedoch als sicher anzusehen.

Abgesehen von den bodennahen Schichten auf hoher Breite findet man über der ganzen Erde eine systematische Abnahme der Temperatur mit der Höhe von etwa 0,6° C pro 100 dyn. m. In einer gewissen

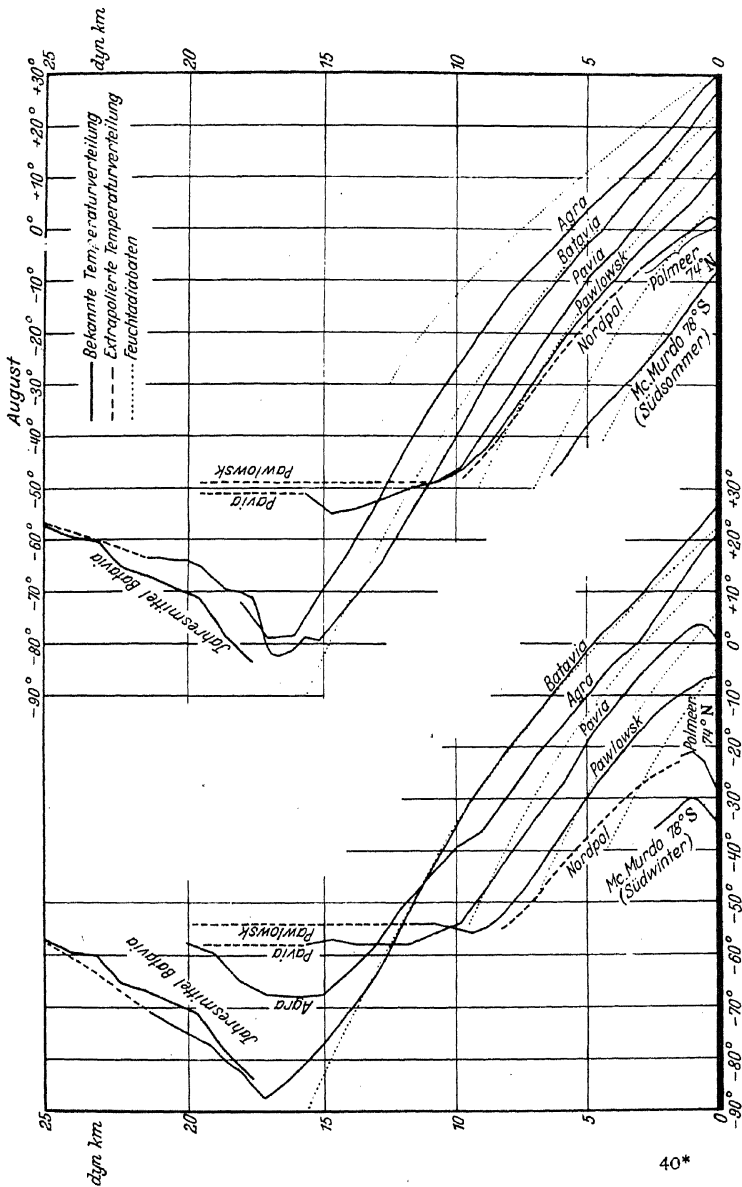



Abb. 102. Beispiele der vertikalen Temperaturverteilung unter verschiedenen geographischen Breiten.

Höhe hört diese Temperaturabnahme plötzlich auf, und darüber liegt eine Schicht, die, so hoch hinauf wie die Registrierballonaufstiege gereicht haben, über Europa nur noch kleine Temperaturänderungen, über den Tropen sogar systematische Temperaturzunahme mit der Höhe aufweist. In den einzelnen Aufstiegen zeigt die Kurve der Temperatur als Funktion der Höhe an dieser Stelle oft einen recht scharfen Knick. Einige der Mittelwertkurven bringen den Knick weniger gut zum Vorschein, da er von Fall zu Fall in etwas verschiedener Höhe gelegen ist und deshalb bei der Mittelbildung zu unscharf erscheinen muß. Jedoch darf man auf Grund der Einzelaufstiege die obere Grenze der systematischen Temperaturabnahme als eine meistens gut ausgeprägte Grenzfläche ansehen[1]. Wir werden sie nach Sir NAPIER SHAW mit dem Namen *Tropopause* bezeichnen. Die Atmosphäre unterhalb der Tropopause, die durch die systematische Temperaturabnahme mit der Höhe gekennzeichnet ist, wird die *Troposphäre* genannt. Oberhalb der Tropopause beginnt die *Stratosphäre*.

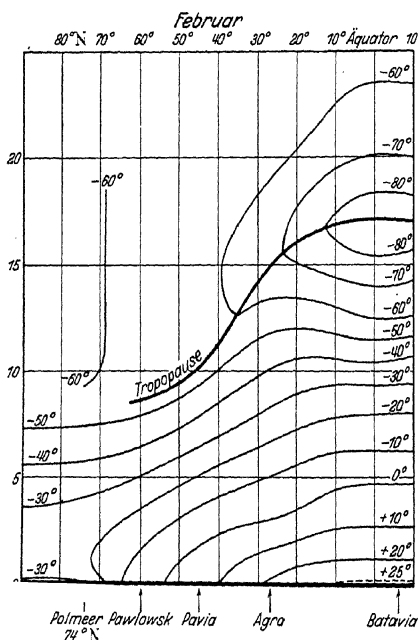



Abb. 103. Meridionalschnitt des atmosphärischen Temperaturfeldes. Februar.

Die Statistik zeigt, daß die Tropopause über der gemäßigten Zone im Sommer etwas höher liegt als im Winter, und zwar fallen im Mittel die höchsten Lagen etwa in den August und die niedrigsten in den Februar. Für Pawlowsk und Pavia liegen keine besonderen Untersuchungen über die jährliche Schwankung der Tropopausenhöhe vor; wenn man aber mit derselben Jahresamplitude wie der in Mitteleuropa gefundenen

[1] Gewöhnlich ist die Tropopause eine typische Diskontinuitätsfläche „erster Ordnung", d. h. ohne Temperatur- und Windsprung, aber mit sprunghafter Änderung des Temperatur- und Geschwindigkeitsgradienten von der einen Seite der Fläche zur anderen. Die Gleichungen solcher Diskontinuitätsflächen sind im Abschnitt **128** abgeleitet.

rechnet, bekommt man als wahrscheinlichste Tropopausenhöhen für Pawlowsk und Pavia[1]:

	Februar	Jahresmittel	August
Pawlowsk . . .	8,6 dyn. km	9,4 dyn. km	10,2 dyn. km
Pavia	10,0 ,,	10,8 ,,	11,6 ,,

Für Agra gibt RAMANATHAN[2] und für Batavia VAN BEMMELEN[3] folgende Werte der Tropopausenhöhen:

	Februar	August
Agra	15,0 dyn. km	16,5 dyn. km
Batavia	17,1 ,,	16,2 ,,

Wegen des begrenzten Materials aus den größten Höhen über Agra und Batavia sind die angegebenen mittleren Tropopausenhöhen keineswegs als definitiv anzusehen, aber sie sind wohl jedenfalls kaum mehr als 0,5 dyn. km vom wahren Wert entfernt.

Nach diesen Angaben ist die Lage der Tropopause auf den Meridionalschnitten[4] der Abb. 103 und 104 eingezeichnet,

Abb. 104. Meridionalschnitt des atmosphärischen Temperaturfeldes. August.

[1] Die Jahresmittel sind der Arbeit GOLDS: „The International Kite and Balloon Ascents", Met. Off. Geophysical Memoirs No. 5. London 1913, entnommen; ebenso die für Mitteleuropa berechnete Jahresamplitude der Tropopausenhöhe, die nach GOLDS Berechnung $\pm 0,78$ km beträgt.

[2] Memoirs of the Indian Meteorological Department, Vol. XXV, Part V. Calcutta 1930.

[3] Koninklijk Magnetisch en Meteorologisch Observatorium te Batavia. Verhandelingen No. 4. Batavia 1916.

[4] Die benutzten Beobachtungsorte liegen allerdings auf sehr verschiedenen Längengraden, so daß die Bezeichnung Meridionalschnitt nicht ganz berechtigt ist. Beim jetzigen Stande der aerologischen Forschung, mit den wenigen Observatorien in ständigem Betrieb, sind aber die Abb. 103 und 104 der beste Ersatz für die wahren Meridionalschnitte. Derselbe Einwand und dieselbe Rechtfertigung gelten auch für die in den folgenden Abschnitten gebrachten „Meridionalschnitte" des Druckfeldes, Solenoidfeldes, Windfeldes usw.

und die Isothermen sind so gezogen, daß die Diskontinuität des Temperaturfeldes genau mit der Tropopause zusammenfällt.

Wir betrachten zuerst das Temperaturfeld der *Troposphäre* und fangen mit dem *Winter* an. Über der eisbedeckten Polargegend und auch zum Teil über der gemäßigten Zone ist die bodennahe Luftschicht kälter als die darüberliegende Luft. Solche „Temperaturinversionen" erklären sich durch den Wärmeverlust des Bodens und der nächsten Luftschicht infolge der Ausstrahlung während der Polarnacht oder auch während der langen Winternächte der gemäßigten Zone. Die polare Bodenschicht mit Temperaturabnahme nach unten, die sog. „Bodeninversion", hat eine mittlere Mächtigkeit von 1 km. In der gemäßigten Zone kommen bisweilen Bodeninversionen von ähnlicher Mächtigkeit vor, jedoch nicht so oft, daß sie sich in den Mittelwerten durchsetzen. Kleinere Temperaturinversionen findet man auch höher oben in der Troposphäre, und zwar über allen Erdteilen und zu allen Jahreszeiten, sie sind aber nicht so häufig und treten nicht in so festen Höhenlagen auf, daß sie in den Mittelwerten unserer aerologischen Stationen zum Vorschein kommen. Auf diese Temperaturinversionen kommen wir später bei der Behandlung der atmosphärischen Störungen zu sprechen.

Die höchsten Temperaturen der Troposphäre befinden sich, wie zu erwarten ist, am Erdboden am Äquator, wo die größte Wärmezufuhr durch Einstrahlung vor sich geht. Auch in den höheren Niveaus bis zu etwa 10 dyn. km ist der Äquator die wärmste Stelle. Höher oben wird aber der Äquator schließlich die kälteste Stelle, da die Temperaturabnahme dort ungefähr bis zum 17 km-Niveau fortsetzt, während auf anderen Breiten die Temperaturabnahme schon niedriger aufhört.

Im *Sommer* beschränkt sich die Mächtigkeit der polaren Bodeninversion im Mittel auf einige hundert Meter. Ihre Ursache ist jetzt während des ständigen Tages nicht mehr der Strahlungsverlust des Bodens, sondern vielmehr der im Sommer stattfindende Temperaturanstieg der freien Atmosphäre, ein Temperaturanstieg, den die Bodenluft nur ungefähr bis zur Temperatur 0° C mitmachen kann. Die weitere Erwärmung der Bodenluft ist nämlich ausgeschlossen, da sie im Kontakt mit Schnee und Eis ist. Ähnliche Temperaturinversionen kommen im Sommer über den Wasserflächen kalter Meeresströme vor.

Die höchste Bodentemperatur unseres Sommermeridionalschnittes findet sich über Indien, und zwar ist diese Temperatur etwa 3° höher als im tropischen Batavia. Dies ist teilweise eine Wirkung der kontinentalen Lage von Agra, die im Sommer höhere Temperaturen zuläßt als die Küstenlage von Batavia. Es zeigt sich aber, daß Agra auch in allen höheren Niveaus der Troposphäre wärmer ist als Batavia, und die gegenseitige Temperaturdifferenz steigt sogar deutlich mit der Höhe

und erreicht etwa bei 11 dyn. km mit 14° C ihr Maximum. Dies kann nicht als Wirkung der mehr oder weniger kontinentalen Lage der Aufstiegsorte erklärt werden, und man wird zu der Anschauung geführt, daß im Sommer die freie Atmosphäre am nördlichen Rand der Tropen wärmer ist als über dem Äquator. Zu demselben Resultate gelangten schon früher TEISSERENC DE BORT und HERGESELL mit ihren Registrierballonaufstiegen über den verschiedenen Teilen des nordatlantischen Passatgebietes.

Die Temperaturverteilung der *Stratosphäre* ist zu allen Jahreszeiten durch niedrigere Temperaturen über den Tropen als über Europa gekennzeichnet. Da aber die tropische Stratosphäre eine deutliche Temperaturzunahme mit der Höhe aufweist, gleichen sich die nordsüdlichen Temperaturgegensätze mit zunehmender Höhe aus. Die benutzten Februar- und Augustaufstiege über Batavia reichen allerdings nicht ganz bis zum Niveau des eventuellen Temperaturausgleiches hinauf. Die obersten Isothermflächen über dem Äquator sind aber auf Grund von Mitteltemperaturen aus den Höchstaufstiegen aller Monate eingezeichnet (in der Abb. 102 angegeben). Bis 18 km Höhe sind das 10 Aufstiege und bis 23 km sind es noch 3 Aufstiege, während die Temperatur der letzten drei Kilometerstufen nur durch einen einzigen Aufstieg gestützt ist. Wenn man diesen einzigen Aufstieg als repräsentativ für die mittleren Verhältnisse ansieht, hat man in etwa 26 km Höhe die Temperatur —57°, die sehr nahe mit der mittleren Temperatur der Stratosphäre über Europa zusammenfällt. Mit anderen Worten, ungefähr im Niveau 25 bis 26 dyn. km besteht wahrscheinlich annähernder Temperaturausgleich vom Äquator bis gegen 60° N, und zwar mit einer Temperatur zwischen —50 und —60°.

Die polare Stratosphäre war bisher so gut wie unerforscht[1], aber auf Grund der eben erschienenen vorläufigen Mitteilung[2] über die Resultate der Registrierballonaufstiege in Abisko (68° 21′ N, 18° 49′ E) können wir schließen, daß im Sommer die Stratosphärentemperatur auch polwärts von 60° N weiter zunimmt, während sie im Winter

[1] HERGESELL hat unter 77° N bzw. 69° N je einen Registrierballonaufstieg bis in die Stratosphäre durchführen können (Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. VI, S. 224). TEISSERENC DE BORT hat von Kiruna aus (67° 51′ N, 20° 14′ E) mehrmals die Stratosphäre mit Registrierballonen erreicht (Nova Acta Soc. Reg. Scient. Ups. Serie IV, Tome III, No. 7. 1913), aber die nachstehend zitierten schwedischen Aufstiege sind zahlreicher und dazu über das ganze Jahr verteilt. Über die neueste (1931) Errungenschaft der polaren Aerologie — Radio-Sonde-Aufstiege von einem Luftschiff aus — siehe WEICKMANN und MOLTCHANOFF: Kurzer Bericht über die meteorologisch-aerologischen Beobachtungen auf der Polarfahrt des „Graf Zeppelin". Meteorol. Z. 1931, H. 11.

[2] Procès-Verbaux de la Commission Internationale pour l'Exploration de la Haute Atmosphère, Mars 1931, S. 41. Leider ging diese Publikation zu spät ein, um hier voll berücksichtigt werden zu können.

polwärts von 60° N wieder abnimmt. Die mittlere Jahrestemperatur der Stratosphäre über Abisko ist fast dieselbe wie über Mitteleuropa.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft der gemäßigten und, allem Anschein nach, auch der polaren Stratosphäre ist das fast vollständige Zusammenfallen des Winterminimums und des Sommermaximums der Temperatur mit den Zeitpunkten der Sonnenwenden, während der Erdboden und die Troposphäre verzögerte jahreszeitliche Temperaturextreme haben. Die Abb. 103 und 104, die für den kältesten bzw. wärmsten Monat der Troposphäre gelten, bringen also die Jahresamplitude der Stratosphärentemperatur nicht voll zum Vorschein. Die Jahresamplitude der Stratosphärentemperatur ist in Abisko viel größer als in Mitteleuropa (bis zu 30° C in 18 dyn. km), und man darf wohl annehmen, daß diese Jahresamplitude am Pol selbst noch größer ist.

Es wäre sehr zu wünschen, daß man den Meridionalschnitt des Temperaturfeldes auch auf die *Südhalbkugel* ausdehnen könnte, aber südlich von Batavia ist das aerologische Material allzu spärlich. In erster qualitativer Annäherung kann man die Atmosphäre der Südhalbkugel als ein Spiegelbild der Atmosphäre der Nordhalbkugel ansehen, aber die beiden Halbkugeln weisen doch bedeutende quantitative Unterschiede auf. Die Temperaturkontraste in meridionaler Richtung sind auf der Südhalbkugel bedeutend schroffer als auf der Nordhalbkugel, wie z. B. aus einem Vergleich der nordpolaren und der südpolaren Temperatur in der unteren Troposphäre hervorgeht (Abb. 102). Im Südwinter fand SIMPSON[1] auf 78° S Temperaturen, die fast um 10° C tiefer sind als die von SVERDRUP auf 74° N gefundenen Nordwintertemperaturen. Noch größer ist der Unterschied zwischen arktischem und antarktischem Sommer. Der antarktische Sommer scheint (gemäß dem allerdings recht spärlichen Material) in der freien Atmosphäre um 15 bis 20° kälter als der arktische Sommer zu sein. Wir kommen im Abschnitt **171** auf die von SIMPSON gegebene Erklärung dieser auffälligen Temperaturunterschiede zurück.

Der höchste Aufstieg SIMPSONS (25. Dez. 1911) zeigte in der Gipfelhöhe 6743 m eine Temperatur von −46,2°, die nicht sehr weit von der Sommertemperatur der antarktischen Stratosphäre entfernt sein dürfte. In dem betreffenden Fall war wohl deshalb die Tropopause nicht viel höher als 7 km gelegen. Der Aufstieg geschah bei schönem schwachwindigem Wetter und relativ hohem Bodendruck, d. h. in einer Wetterlage, die erfahrungsgemäß eher übernormale als unternormale Tropopausenhöhen liefert (s. Abschnitt **182**). Eine mittlere Tropopausenhöhe von 6 bis 7 km über dem Antarktis scheint deshalb die

[1] British Antarctic Expedition, 1910–1913. Meteorology, Vol. I. Discussion.

plausibelste Annahme zu sein. Die antarktische Tropopausenvertiefung ist also um mindestens 2 km tiefer als diejenige über dem Nordpol.

164. Das mittlere Luftdruckfeld. Ganz wie bei den Mitteltemperaturkarten, findet man auch in den mittleren Luftdruckkarten (Abb. 105 bis 108) eine Tendenz zur Symmetrie in bezug auf die Erdachse. Am deutlichsten erscheint diese Symmetrie wiederum auf der Südhalb-

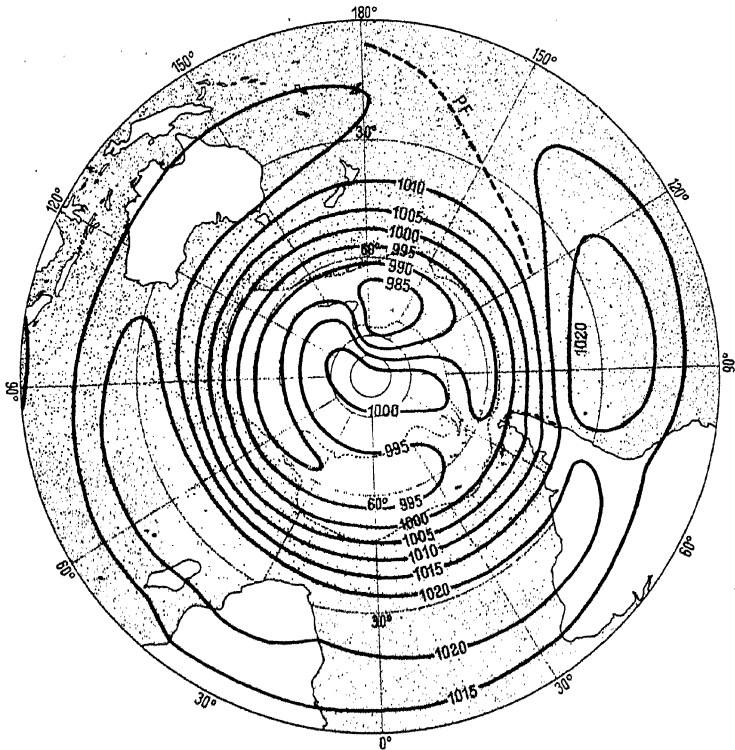



Abb. 105. Juniisobaren der Südhalbkugel im Meeresniveau.

kugel, wo die Luftdruckkarten aller Jahreszeiten für das Meeresniveau die folgenden Merkmale zeigen: Ein Ring mäßig tiefen Luftdruckes umgibt die Erde nahe dem Äquator, ein Ring hohen Druckes, der „subtropische“[1] Hochdruckgürtel, lagert unter etwa 20 bis 30° S, ein zirkumpolarer Ring tiefen Druckes befindet sich unter etwa 60 bis 70° S,

[1] Wenn später die Worte „subtropisch“, „Subtropen“ usw. benutzt werden, beziehen sie sich immer auf den Breitengürtel des obenerwähnten Hochdrucks.

und polwärts von diesem wird der Druck wieder etwas höher[1]. Die Abb. 105 bringt als Beispiel die Karte des mittleren Luftdruckes in der kalten Jahreszeit (Juni), wo die zonale Verteilung am reinsten hervortritt. Die auch zu dieser Jahreszeit bestehenden Abweichungen von der *rein zonalen Verteilung* sind: die große Lücke des Hochdruckgürtels im Südpazifik und die kleinere Lücke bei den Anden, fernerhin die Vertiefung des Tiefdruckgürtels beim Roßmeer; die auf „thermisch

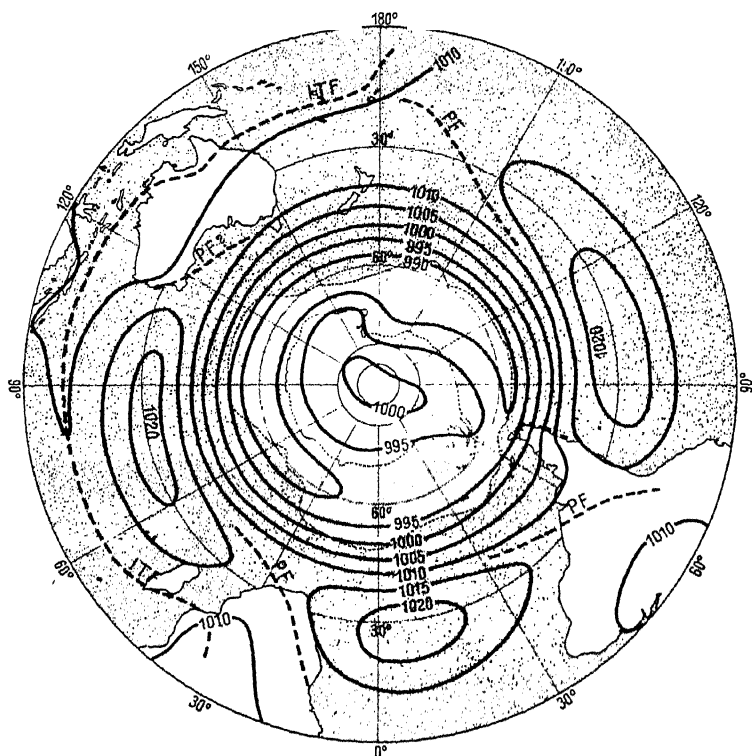



Abb. 106. Dezemberisobaren der Südhalbkugel im Meeresniveau.

bedingte Zirkulation“ (s. Abschnitt **174**) zurückzuführen ist. In der warmen Jahreszeit (Dezember, Abb. 106) verursacht ein jeder der drei warmen Kontinente Südamerika, Südafrika und Australien, ebenfalls durch thermisch bedingte Zirkulation, eine Abschwächung des subtropischen Hochdruckgürtels, während die thermische Verstärkung des Roßmeerabschnittes des Tiefdruckgürtels mehr zurücktritt.

[1] Wegen des Fehlens eines Beobachtungsnetzes ist der antarktische Teil der Druckkarte natürlich etwas hypothetisch.

Auf der Nordhalbkugel ist dasselbe zonale Luftdrucksystem auch vorhanden, aber die dortigen mächtigen Kontinente bringen viel größere thermisch bedingte Störungen hinein als die kleinen Kontinente der Südhalbkugel. Die Luftdruckkarten der Nordhalbkugel für den Februar bzw. den August (Abb. 107 und 108) zeigen, wie der kalte asiatische Kontinent im *Winter* der Sitz eines großen Hochdrucks ist, während dieselbe Landfläche im *Sommer*, vermöge ihrer relativ hohen

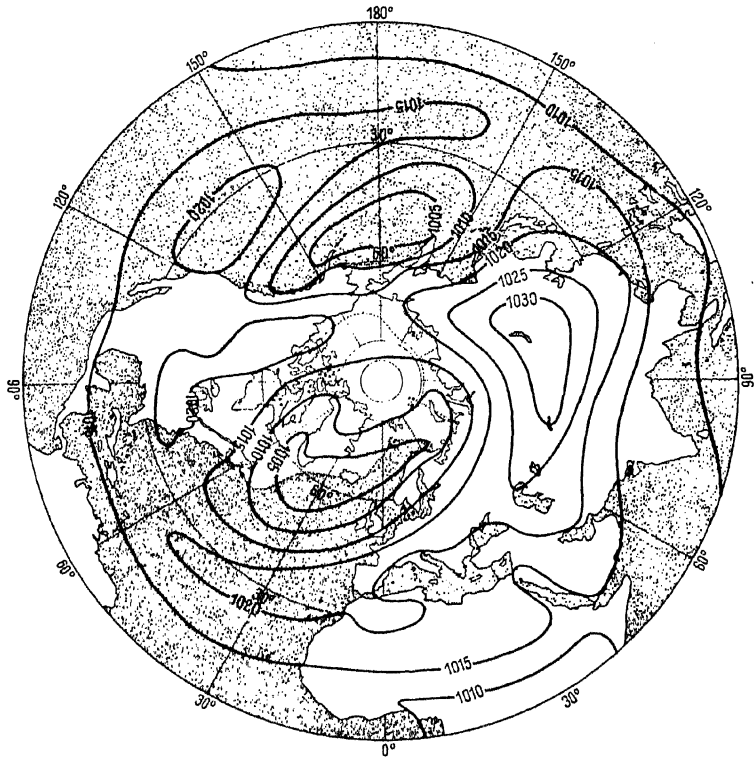



Abb. 107. Februarisobaren der Nordhalbkugel im Meeresniveau.

Temperatur, der Sitz eines großen Tiefdrucks wird. Der etwas kleinere nordamerikanische Kontinent hat eine ähnliche Wirkung. Der Ring tiefen Druckes auf etwa 60°, der auf der Südhalbkugel immer gut ausgebildet ist, beschränkt sich folglich im *Winter* der Nordhalbkugel auf die ozeanischen Teile der temperierten Zone, wodurch die zwei quasipermanenten Tiefdruckzentren bei Island und bei den Aleuten zustande kommen. Der subtropische Ring hohen Druckes, der normalerweise auf etwa 30° N lagern sollte, erscheint nicht mehr als selbständiges Ge-

bilde neben den großen kontinentalen Hochdruckgebieten in etwas höherer Breite. Im *Sommer* tritt der Ring tiefen Druckes unter 60° N im asiatischen Sektor neben dem großen kontinentalen Wärmetiefdruckgebiet weiter südlich an Bedeutung zurück. Auch der subtropische

Abb. 108. Augustisobaren der Nordhalbkugel im Meeresniveau.

Ring hohen Druckes wird durch die beiden kontinentalen Wärmetiefdruckgebiete unterbrochen.

Den mittleren Luftdruck in gegebener Höhe der freien Atmosphäre findet man mittels der Gleichung **36** (7B) oder **127** (7B). Die nötigen Berechnungsgrundlagen sind: mittlerer Luftdruck unten, den man fast überall auf der Erdoberfläche kennt, und mittlere Temperaturverteilung[1] nach der Höhe, die allerdings nur bei den aerologischen Observatorien, die lange Serien von Aufstiegen bei allerlei Wetterlagen gemacht haben, bekannt ist. Wie schon früher bemerkt, liegen die aerologischen Obser-

[1] Oder genauer die Verteilung der „virtuellen Temperatur".

vatorien nicht derartig verteilt, daß man aus ihren Beobachtungen große Teile der oberen Erdatmosphäre kartenmäßig darstellen kann. Jedoch zeigt die statistische Behandlung der vorhandenen Aufstiegsdaten, daß die Temperaturabnahme mit der Höhe innerhalb der Troposphäre überall, außer in den Polargegenden und über den winterlich abgekühlten Kontinenten, ungefähr demselben Gesetz gehorcht, so daß man mit einiger Genauigkeit von der bekannten Bodentemperatur auf

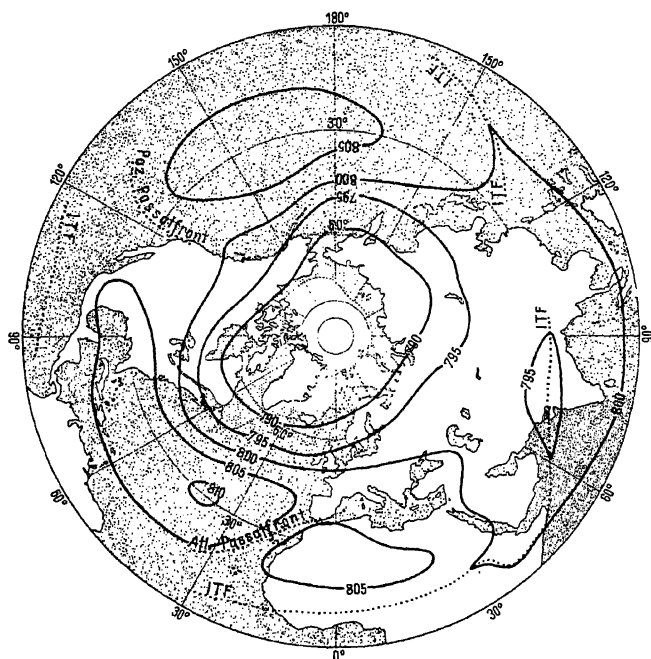



Abb. 109 A. Juliisobaren der Nordhalbkugel in 2000 m Höhe (nach Shaw). Fronten hinzugefügt durch die Verfasser (vgl. S. 713—716).

die Temperatur in den verschiedenen Höhen der Troposphäre schließen kann.

Diese Betrachtungen führten erst Teisserenc de Bort, später u. a. Shaw dazu, Karten der mittleren Druckverteilung der freien Atmosphäre in verschiedenen Höhen zu konstruieren.

Ernstliche methodische Schwierigkeiten trifft man dabei nur in den Gegenden, wo quasipermanente Bodeninversionen vorkommen, die eine zuverlässige Schätzung der Temperatur der freien Atmosphäre unmöglich machen. Diese quasipermanenten Bodeninversionen sind hauptsächlich auf den Winter beschränkt, und deshalb hat Shaw[1] das Hauptgewicht

[1] "Manual of Meteorology", Vol. II, Cambridge University Press MCMXXVIII.

auf die Konstruktion der sommerlichen (Juli) Luftdruckverteilung der freien Atmosphäre gelegt, die er mittels Karten für die Höhenlagen 2000, 4000, 6000 und 8000 m darstellt. Die folgenden statistisch begründeten Werte der Temperaturabnahme mit der Höhe wurden dabei benutzt:

Schicht	0—2	2—4	4—6	6—8 km
Temperaturabnahme pro km	5,0	5,5	6,0	7,0

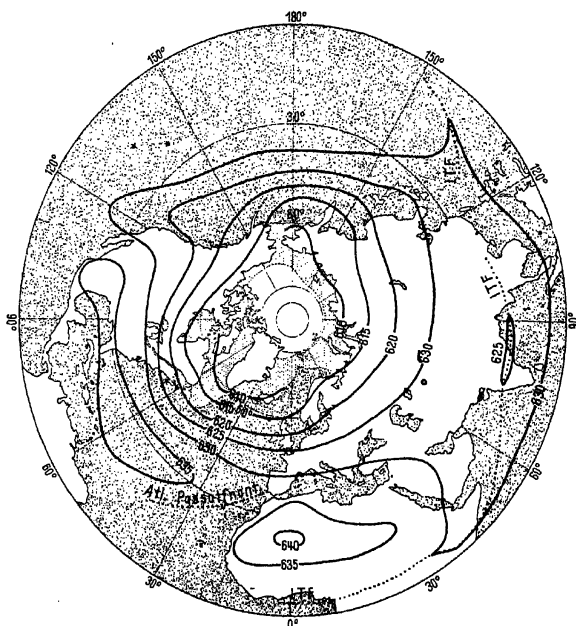



Abb. 109 B. Juliisobaren der Nordhalbkugel in 4000 m Höhe (nach SHAW). Fronten hinzugefügt durch die Verfasser (vgl. S. 713—716).

Die resultierenden Karten sind mit Erlaubnis von SHAW in den Abb. 109 A—D kopiert worden. Einige geringfügige Änderungen der Isobaren über Asien sind dabei noch vorgenommen, um den neuesten Resultaten der indischen aerologischen Forschung gerecht zu werden[1].

Die Karten bringen ein großes polares Tief zum Vorschein, das um so deutlicher hervortritt, je höher in der Troposphäre die betreffende Karte gültig ist. Die Tiefdruckzone am Boden auf etwa 60° N, die allerdings im Sommer wenig ausgeprägt ist, behauptet sich in der Höhe

[1] „Upper Air Circulation over India and its Neighbourhood up to the Cirrus Level..." by H. C. BANERJEE and K. R. RAMANATHAN, India Meteorological Department, Scientific Notes, Vol. III, No. 21.

nicht als selbständiges Gebilde, sondern verschwindet im großen polaren Tief. Die ausgeprägten Tiefdruckgebiete über den warmen Kontinenten (Zentren über Nordindien und Südkalifornien), welche die Bodenluftdruckkarte charakterisieren, verschwinden ebenfalls mit zunehmender Höhe. Der subtropische Ring hohen Druckes, der auf der Nordhalbkugel gerade durch die erwähnten Tiefdruckgebiete unterbrochen war, erscheint wieder in der Höhe mit der gleichen Deutlichkeit wie am Boden

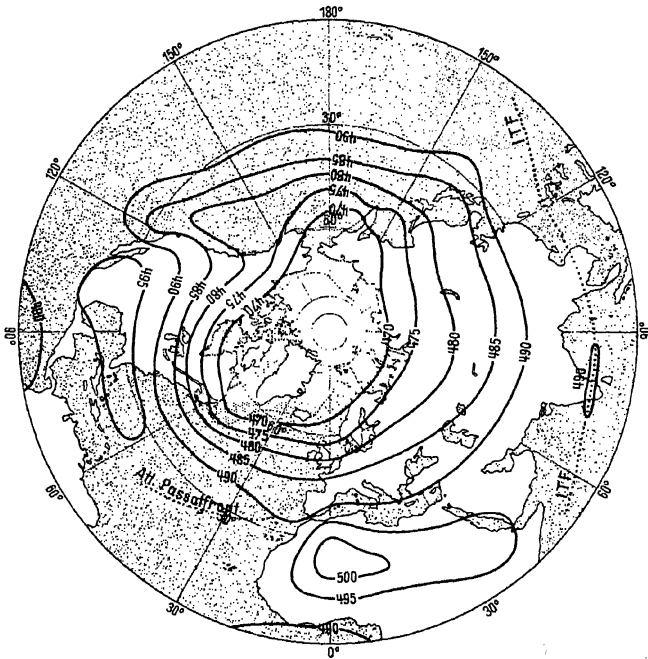



Abb. 109 Ç. Juliisobaren der Nordhalbkugel in 6000 m Höhe (nach SHAW). Fronten hinzugefügt durch die Verfasser (vgl. S. 713—716).

auf der Südhalbkugel. Mit zunehmender Höhe bekommt der Hochdruckring sogar seine ausgeprägtesten Maxima über den heißen Kontinenten, wo am Boden Tiefdruck herrschte[1].

Die entsprechenden Luftdruckkarten der freien Atmosphäre im Winter kann man nicht konstruieren, ohne hypothetische Annahmen

[1] Die Tiefdruckausbuchtungen westlich von Amerika und westlich von Nordafrika sind durch die Ungenauigkeit der Methode sicher etwas übertrieben worden. Die dortigen kalten Meeresströme kühlen wohl nur den unteren Teil der Atmosphäre ab, so daß die Temperaturen im Meeresniveau tatsächlich eine zu kalte Atmosphäre vortäuschen. Wenn dies nicht berücksichtigt wird, kommt man bei der Konstruktion des Luftdruckes in der Höhe auf zu niedrige Werte.

über die Temperaturverteilung oberhalb der großen, kalten Kontinente zu machen. In Sibirien z. B. hat man im Winter wahrscheinlich die ausgeprägtesten Bodeninversionen der ganzen Erde, und alle Schätzungen der Temperatur oberhalb derselben sind ziemlich unsicher. Der qualitative Schluß, daß die Luftdruckabnahme mit der Höhe über dem kalten asiatischen und nordamerikanischen Kontinente so stark ist, daß die dortigen Hochdruckgebiete mit der Höhe abgeschwächt werden

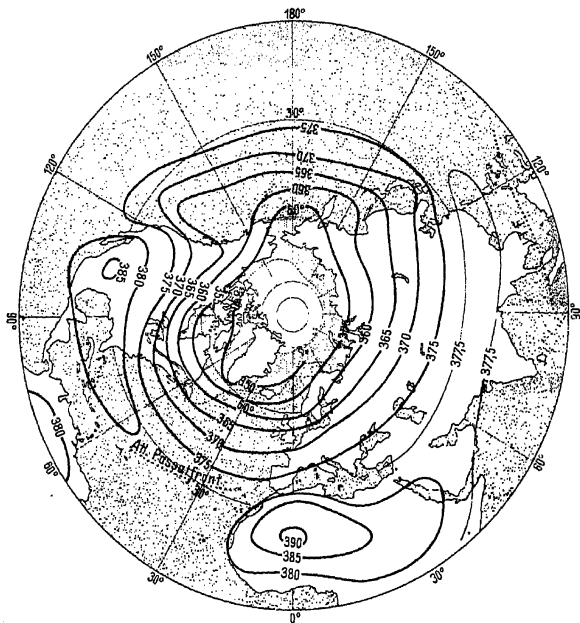



Abb. 109 D. Juliisobaren der Nordhalbkugel in 8000 m Höhe (nach SHAW). Fronten hinzugefügt durch die Verfasser (vgl. S. 713—716).

und schließlich verschwinden, ist aber sicher berechtigt. In der oberen Troposphäre hat man dann auch im Winter eine um die Erdachse ziemlich symmetrische Luftdruckverteilung mit dem TEISSERENC DE BORTschen polaren Tief in der Mitte umgeben von einem Ring subtropischer Hochdruckgebiete, jenseits deren der Ring äquatorialer Tiefs sich erstreckt.

In der Tabelle S. 641 oben sind mittlere Luftdruckwerte für die verschiedenen Niveaus oberhalb der schon früher benutzten aerologischen Observatorien Batavia, Agra, Pavia und Pawlowsk aufgeführt, und zwar für dieselben Monate Februar und August, die bei der Darstellung des atmosphärischen Temperaturfeldes (Abb. 103, 104) gewählt wurden.

Mittlerer Luftdruck in cbar.

	Februar.					August.					
Dyn. km	Nordpol	Pawlowsk	Pavia	Agra	Batavia	Nordpol	Pawlowsk	Pavia	Agra	Batavia	Dyn. km
20		(4,9)	(5,0)	5,1	5,0		(5,4)	(5,5)	(5,4)	5,2	20
19		(5,7)	(5,9)	6,1	6,0		(6,4)	(6,4)	(6,4)	6,2	19
18		(6,7)	(6,9)	7,2	7,3		(7,4)	(7,6)	7,6	7,3	18
17		(7,8)	(8,2)	8,6	8,8		(8,7)	(8,8)	9,1	8,7	17
16		(9,2)	9,6	10,1	10,5		(10,2)	10,3	10,8	10,3	16
15		(10,8)	11,3	12,0	12,6		(11,8)	12,1	12,9	12,3	15
14		(12,6)	13,3	14,2	15,0		(13,8)	14,2	15,2	14,5	14
13		(14,8)	15,6	16,7	17,7		(16,2)	16,6	18,0	17,3	13
12		17,4	18,3	19,6	20,8		(18,9)	19,5	21,1	20,5	12
11		20,4	21,6	22,9	24,1		22,0	22,7	24,4	23,9	11
10		24,0	25,3	26,5	27,8		25,7	26,5	28,2	27,8	10
9		28,1	29,6	31,0	32,4	(29,7)	30,0	30,9	32,5	32,2	9
8	(31,5)	32,9	34,5	35,7	37,1	(34,5)	34,8	35,8	37,2	37,1	8
7	(36,8)	38,4	40,0	41,2	42,5	(39,9)	40,3	41,2	42,4	42,4	7
6	(42,9)	44,6	46,2	47,1	48,5	(46,0)	46,3	47,4	48,3	48,3	6
5	(49,8)	51,6	53,1	54,0	55,2	(52,8)	53,1	54,1	54,9	55,1	5
4	(57,6)	59,4	60,8	61,4	62,6	(60,4)	60,7	61,7	62,1	62,5	4
3	(66,4)	68,2	69,4	70,0	70,8	(69,0)	69,2	70,2	70,2	70,8	3
2	(76,5)	78,1	79,0	79,1	79,7	(78,5)	78,7	79,5	79,2	79,8	2
1	(87,9)	89,1	89,7	89,6	90,0	(89,3)	89,3	89,9	89,1	90,0	1
0	(101,2)	101,6	101,8	101,0	101,2	(101,4)	101,1	101,4	100,0	101,2	0

Die Werte in Klammern sind mit Hilfe der extrapolierten Temperaturen derselben Abbildungen gewonnen worden und haben deshalb keinen Anspruch auf Genauigkeit. Insbesondere gilt dies natürlich für die hinzugefügten Werte am Nordpol, wo sowohl der Luftdruck am Erdboden wie auch die ganze Temperaturverteilung mit der Höhe extrapoliert sind. Wir haben nicht gewagt, die Drucke am Pol bis oberhalb

Dynamische Höhe der Hauptisobarflächen in dyn. m.

	Februar.					August.					
cbar	Nordpol	Pawlowsk	Pavia	Agra	Batavia	Nordpol	Pawlowsk	Pavia	Agra	Batavia	cbar
10		(15483)	15748	16053	16271		(16128)	16189	16432	16165	10
20		11125	11478	11870	12247		11633	11839	12353	12155	20
30	(8306)	8588	8913	9222	9470	(8934)	9000	9199	9556	9481	30
40	(6461)	6730	7000	7213	7449	(6982)	7053	7213	7445	7430	40
50	(4973)	5215	5436	5556	5766	(5398)	5453	5604	5729	5736	50
60	(3716)	3928	4099	4178	4336	(4050)	4088	4215	4278	4322	60
70	(2626)	2807	2934	3000	3092	(2890)	2911	3022	3023	3092	70
80	(1680)	1820	1901	1908	1969	(1854)	1872	1950	1915	1979	80
90	(829)	923	974	963	1000	(939)	938	991	914	1000	90
100	(83)	121	141	84	102	(110)	89	117	0	102	100

der Tropopause zu extrapolieren, denn die Schätzungen der Stratosphärentemperatur über dem Pol wären zu unsicher gewesen.

Um die Druckverteilung anschaulich darzustellen, haben wir auch die dynamische Höhe der Hauptisobarflächen 100 cbar, 90 cbar usw.

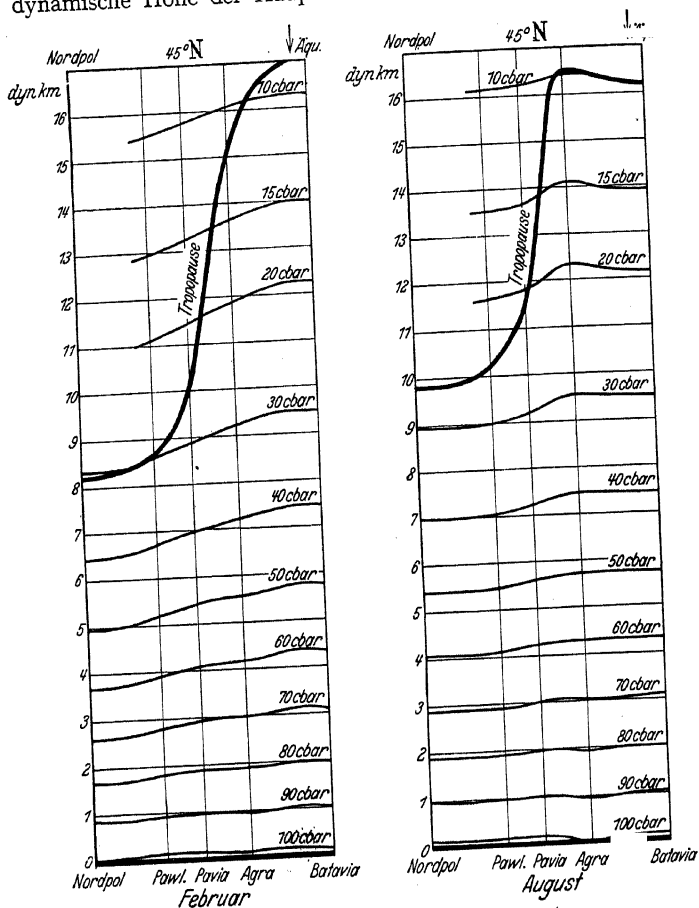



Abb. 110 und 111. Meridionalschnitte des Druckfeldes.

bis 10 cbar in der Tabelle S. 641 unten berechnet und den Verlauf dieser Flächen im Meridionalschnitt (Abb. 110, 111) eingezeichnet. Um überhaupt eine sichtbare Neigung der Isobarflächen hervorzubringen, ist das Überhöhungsverhältnis auf 2000 vergrößert worden. Die Schnittlinie der Tropopausenfläche mit dem Meridionalschnitt ist als dicke Linie angedeutet.

Die polare Vertiefung der Isobarflächen kommt in beiden Jahreszeiten deutlich zum Vorschein, jedoch im Winter viel ausgeprägter als im Sommer. Die größte Neigung der Isobarflächen findet man etwa im Niveau der 20 cbar-Fläche.

Die relative Erhöhung der Isobarflächen beim subtropischen Hochdruckgürtel kommt in den Schnitten eigentlich nur im Sommer und auch dann nur in den höheren Schichten zum Vorschein, weil Agra im Bereich des sommerlichen indischen Monsuntiefdrucks liegt. Das Fehlen des subtropischen Hochdruckgürtels im Wintermeridionalschnitt beruht wahrscheinlich auf der Unzulänglichkeit der benutzten Beobachtungsdaten. Die im Abschnitt **166** folgende Untersuchung der Höhenwinde zeigt, daß der subtropische Hochdruckgürtel auch im Winter in allen troposphärischen Höhen vorhanden ist, allerdings aber in geschwächter Form und stark gegen den Äquator hin verschoben.

Die Tabelle S. 641 oben gewährt auch einen Einblick in die Druckverteilung der Stratosphäre oberhalb der 10 cbar-Fläche. Es besteht dort immer noch das polare Tief, es wird aber mit der Höhe flacher und scheint im Sommer ungefähr beim Niveau 20 dyn. km zu verschwinden. Im Winter ist es bei 20 dyn. km noch nicht verschwunden und wird wahrscheinlich bis zu sehr großen Höhen reichen. Wie im vorigen Abschnitt berichtet, ist nämlich die winterliche Stratosphäre am Pol bedeutend kälter als in 60° Breite. Das ist gleichbedeutend mit einer Vertiefung des zentralen Teiles des Polartiefdrucks, je höher man hinaufkommt.

165. Das mittlere Solenoidfeld. Wenn die Felder der mittleren Temperatur und des mittleren Druckes bekannt sind, läßt sich das Feld des mittleren spezifischen Volumens $s = R\theta/p$ berechnen. Die entsprechenden Isosteren in Meridionalschnitt sind in den Abb. 112 und 113 als gestrichelte Kurven eingetragen, und zwar im unteren Teil für alle hundert m³/Tonne, im oberen Teil für alle fünfhundert. Dieselbe Abbildung enthält auch als voll ausgezogene Kurven die schon in der Abb. 110 und 111 dargestellten Isobaren von 10 zu 10 cbar. Denkt man sich die Zahl der isobaren Kurven auf das Zehnfache und die Zahl der isosteren Kurven im unteren Teil der Abbildung auf das Hundertfache und im oberen Teil der Abbildung auf das Fünfhundertfache vergrößert, so hat man die Darstellung der *M. T. S.-Einheitssolenoide*. Die Kurven teilen dann die Meridionalebene in sehr spitzwinklige parallelogrammatische Flächenstücke auf, wovon jedes den Querschnitt einer zonal um die Erde laufenden Einheitsröhre darstellt. Von dem somit für den mittleren Zustand der Atmosphäre gegebenen Solenoidfeld können wir nun gemäß

dem Fundamentalsatz **40** (7a)

$$\frac{dC}{dt} = N(s, -p) \tag{1}$$

auf die entsprechenden meridionalen Zirkulationsbeschleunigungen schließen, die auf einer nichtrotierenden Erde auftreten würden. Bei

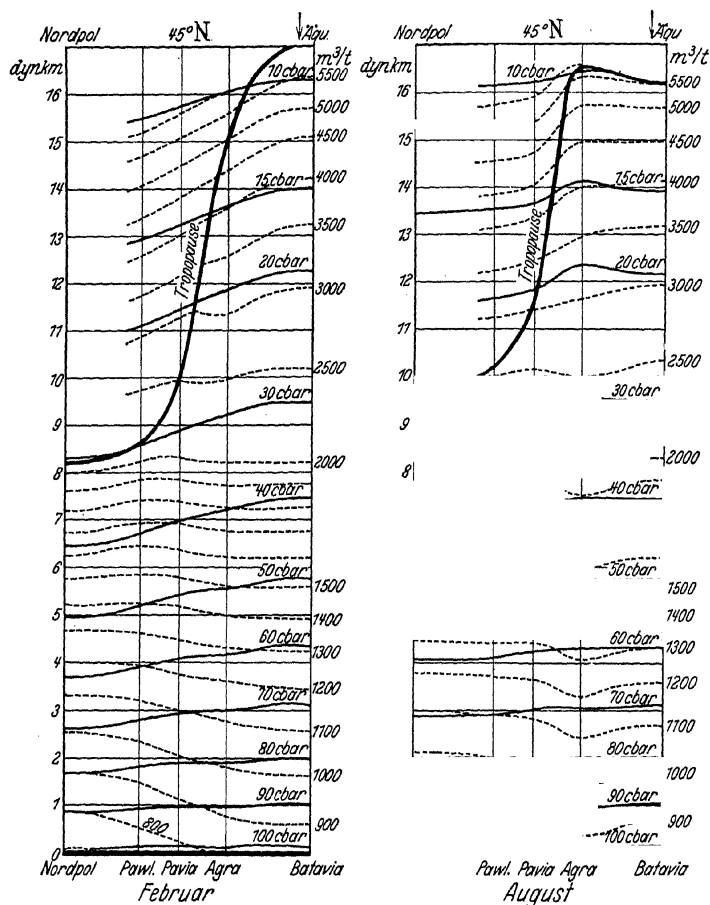



Abb. 112 und 113. Meridionalschnitte des Solenoidfeldes.

dem Drehsinn von dem Volumenaszendenten zum Druckgradienten folgt dann ein Absinken am Pol, ein Ausfluß dem Boden entlang nach niedrigen Breiten und ein Rückfluß aufgestiegener Luft nach dem Pol in der Höhe. In der Stratosphäre, wo die Luft über dem Äquator am

kältesten ist, findet man den entgegengesetzten Drehsinn der Zirkulationsbeschleunigung.

Wenn man den Zirkulationssatz für eine vorgegebene geschlossene materielle Kurve quantitativ verwerten will, geht der praktisch gangbare Weg, wie schon früher hervorgehoben (**41**), nicht über ein wirkliches Aufzeichnen des Schnittes und Abzählen der umschlossenen parallelogrammatischen Flächenelemente, sondern über eine Linienintegration längs der geschlossenen Kurve. Für reine Überschlagsrechnungen bedient man sich am einfachsten der Tabelle II am Ende des Buches, welche die Zahl von M.T.S.-Einheitssolenoiden innerhalb einer geschlossenen viereckigen Kurve gibt, die aus zwei vertikalen und zwei isobaren Kurvenstücken besteht, von denen die untere isobare Kurve immer in der nahe am Erdboden gelegenen 100 cbar-Fläche verläuft. Die Tabelle gibt die Solenoidzahl innerhalb der Kurve als Funktion des Druckes am oberen isobaren Kurvenstück und der mittleren Temperaturdifferenz der beiden Vertikalen. Die Unsicherheit, die in die Überschlagsrechnung hineinkommt, rührt von der Bestimmung dieser mittleren Temperaturdifferenz her. Diese Unsicherheit wird um so kleiner, je kürzer die vertikalen Kurvenstücke sind, kann aber andererseits bis ins Unendliche steigen, wenn der Druck am oberen isobaren Kurvenstück gegen Null konvergiert. Benutzt man die Tabelle nur bis 30 cbar, so wird der Fehler kaum jemals 10% überschreiten, selbst wenn man die zu verwendende Mitteltemperatur in der Vertikalen als den einfachen linearen Mittelwert wählt, wobei es gleichgültig ist, ob mit Höhe oder mit Druck als der unabhängigen Variablen. Will man für Kurven großer Höhenerstreckung genau rechnen, so kann man die Solenoidzahlen schichtweise berechnen und dann addieren. Zu diesem Zwecke bedient man sich eines Systems von Tabellen gleicher Art wie die Tabelle II, jedoch mit der Reihe nach abnehmenden Ausgangsdrucken (z. B. 90, 80, . . ., 10 cbar).

Wir können jetzt eine Kurve betrachten, die unten am Boden in der 100 cbar-Fläche und oben in der 30 cbar-Fläche, d. h. etwa im Cirrusniveau (im Mittel etwa 9000 m) verläuft. Die eine Vertikale soll sich am Pol, die andere am Äquator befinden. Da wir von den Längen der vertikalen Kurventeile absehen können, wird die gesamte Länge der Kurve zwei Erdquadranten ausmachen oder $2 \cdot 10^7$ m. Nach dem Temperaturschnitt (Abb. 103) kann man den mittleren Temperaturunterschied zwischen den beiden Vertikalen im Winter auf etwa 40° schätzen. Die Tabelle gibt dann innerhalb der Kurve $1{,}38 \cdot 10^4$ M.T.S.-Solenoide, also eine Zirkulationsbeschleunigung von $1{,}38 \cdot 10^4\ \mathrm{m^2 sec^{-2}}$. Die beigefügte Tabelle zeigt die Zirkulation *C*, die man hieraus nach 1 Sekunde, nach 3 Stunden, nach 6 Stunden und nach 24 Stunden erhält, alles unter der Voraussetzung, daß das Solenoidfeld durch die Bewegung

		3 Stdn. $\approx 10^4$ sec	6 Stdn.	24 Stdn.
Zirkulation C	$1,38 . 10^4$ m²/sec	$1,38 . 10^8$ m²/sec	$2,76 . 10^8$ m²/sec	$1,1 . 10^9$ m²/sec
Mittlere Meridionalgeschwindigkeit v_y .	$6,9 . 10^{-4}$ m/sec	6,9 m/sec	13,8 m/sec	55,3 m/sec
Mittlere meridionale Weglänge l_y	$3,45 . 10^{-4}$ m	34,5 km	138 km	2211 km
Mittlere Zonalgeschwindigkeit v_x unter 30° Breite	$2,52 . 10^{-8}$ m/sec	2,52 m/sec	10,7 m/sec	161 m/sec
Mittlere meridionale Gegenbeschleunigung unter 30° Breite . .	$1,84 . 10^{-12}$ m/sec²	$1,84 . 10^{-4}$ m/sec²	$7,35 \cdot 10^{-4}$ m/sec²	$1,18 . 10^{-2}$ m/sec²
Entsprechende Zirkulationsgegenbeschleunigung	$3,68 . 10^{-5}$ m²/sec²	$3,68 . 10^3$ m²/sec²	$1,47 . 10^4$ m²/sec²	$2,26 . 10^5$ m²/sec²

nicht verändert wird, und daß auch keine andere Einflüsse eingreifen[1]. Diese Zirkulation durch die Länge der Kurve dividiert ergibt die nach Ablauf der betrachteten Zeiträume entstandenen mittleren Meridionalgeschwindigkeiten v_y (zweite Zeile), welchen, wie ersichtlich, eine Bewegung mit der konstanten Beschleunigung von $6,9 . 10^{-4}$ m/sec² entspricht. Man würde also schon nach 3 Stunden eine Brise von etwa 7 m/sec, nach 6 Stunden einen stürmischen Wind von 14 m/sec und nach 24 Stunden einen mehr als orkanartigen Wind von 55 m/sec haben. Die nächstfolgende Zeile der Tabelle gibt die in den gegebenen Zeiträumen zurückgelegten Weglängen l_y in meridionaler Richtung. Wie man sieht, sollte schon nach 24 Stunden mehr als ein Zehntel des vollen Meridionalumlaufes innerhalb des Quadranten Äquator—Pol vollzogen sein. Solche gewaltige Bewegungen würden unter der Einwirkung eines unveränderlichen Solenoidsystems auf einer nichtrotierenden Erde entstehen. (Im Sommer, mit einer mittleren Temperaturdifferenz Äquator—Pol von 25 bis 30°, wären alle Zahlen der Tabelle etwa im Verhältnisse 2:3 zu verkleinern).

Wir betrachten weiterhin die regulierende Wirkung der Erddrehung. Sobald eine Bewegung aufgekommen ist, verläuft die weitere Zirkulationsbeschleunigung nach der Gleichung **42** (1) oder **129** (6):

$$\frac{dC}{dt} = N(s, -p) - 2\Omega \frac{d\Sigma}{dt}. \tag{2}$$

[1] Diese Voraussetzung des unveränderlichen Solenoidfeldes wird hier benutzt, um in reiner Form den Einfluß der dynamischen Stabilität der Atmosphäre als zirkularer Wirbel (**46**) zu studieren. Der Einfluß der Zirkulationsbewegung thermisch stabiler Luft auf das Solenoidfeld ist schon in Abschnitt **53** behandelt worden, aber die meteorologischen Folgerungen dieser thermischen Stabilität werden erst in Abschnitt **171** gebracht.

Hier wird das letzte Glied einer von der Erddrehung herrührenden Gegenbeschleunigung entsprechen, die wir jetzt berechnen werden. Aus den eben gefundenen Verschiebungen in meridionaler Richtung l_y folgen nach Tabelle III (am Schlusse des Buches) zonal gerichtete Transversalgeschwindigkeiten v_x, deren, unter 30° geographischer Breite gültigen, Werte in der obigen Tabelle aufgeführt sind. Man sieht, daß die sekundär durch die Erddrehung erzeugten Geschwindigkeiten schon nach 6 Stunden von gleicher Größenordnung wie die primär durch die Solenoide erzeugten sind. Am unteren Kurventeil, wo die primäre Meridionalbewegung südwärts gerichtet war, wird die hinzutretende Zonalkomponente westwärts gerichtet sein, am oberen Kurventeil dagegen, wo die Meridionalbewegung nordwärts gerichtet war, wird die Zonalkomponente ostwärts gerichtet sein. Benutzen wir nun noch einmal die Tabelle III, diesmal mit der Zonalgeschwindigkeit als Argument, so bekommen wir am unteren Kurventeil eine Beschleunigung nordwärts, am oberen Kurventeil südwärts, d. h. „Gegenbeschleunigungen", welche die primär erzeugte Meridionalbewegung abzuschwächen suchen. Die Größe dieser meridionalen Gegenbeschleunigungen ist in der vorletzten Zeile der Tabelle auf S. 646 angegeben. Wenn wir diese meridionale Gegenbeschleunigung mit der Länge der geschlossenen Kurve multiplizieren, bekommen wir (letzte Zeile der Tabelle) die auf der Erddrehung beruhende meridionale Zirkulationsbeschleunigung, d. h. das letzte Glied der Gleichung (2). Diese auf der Erddrehung beruhenden Beschleunigungen der meridionalen Zirkulation sind denen der isobar-isosteren Solenoide entgegengesetzt und sind schon nach 6 Stunden von gleicher Größenordnung wie diese und nach 24 Stunden um das Sechzehnfache größer. Die Meridionalbewegung muß also nach mehr als 6, aber nach weniger als 24 Stunden umkehren. Man erhält in dieser Weise Schwingungen, die von der dynamischen Stabilität des zirkularen Wirbels herrühren (vgl. **46** und **118**).

In der Erddrehung begegnen wir somit einem regulierenden Faktor, der schon für sich allein dem unbegrenzten Anwachsen der Meridionalzirkulation eine Grenze setzt. Man kann eine stationär verlaufende zonale Zirkulation berechnen, bei der sich die Solenoide und die Erddrehungswirkung überall das Gleichgewicht halten (vgl. hierzu die Berechnung von der Temperaturdifferenz Äquator—Pol **45**, S. 161). Die Verteilung dieser zonalen Zirkulation im einzelnen könnten wir mittels der Solenoidverteilung in den Abb. 112 und 113 berechnen. Das Resultat würde um so genauer ausfallen, je kleiner wir die Elementarkurven wählen, für die wir die Berechnung durchführen. Die zonalen Winde, die man dabei findet, sind aber nichts anderes als die zonalen Gradientwinde, die wir im nächsten Abschnitt direkt aus der Druckverteilung ableiten werden.

166. Das mittlere Bewegungsfeld. Im Abschnitt **127** sind die Gleichungen abgeleitet, mittels deren man auf der rotierenden Erde unter stationären Verhältnissen vom Druckfelde auf das Bewegungsfeld schließt. Nach der Gleichung **127** (18) findet man den durch die Neigung der isobaren Flächen gegebenen Gradientwind:

$$v_x = -\frac{\sigma}{2\Omega \sin\varphi} \operatorname{tg}\theta_p \tag{1}$$

Die ebenfalls in Abschnitt **127** gegebene Regel für den Richtungssinn dieses Gradientwindes besagte, daß ein Beobachter, der der Windrichtung entlang blickt, auf der Nordhalbkugel den höheren Druck zur Rechten, auf der Südhalbkugel den höheren Druck zur Linken hat. Im Abschnitt **48** und vollständiger in **132** bis **135** wurde fernerhin gezeigt, daß die Reibung gegen den Erdboden eine kleine Abweichung der Bodenströmung von dem Gradientwind hervorruft, und zwar eine Abweichung nach links auf der nördlichen und nach rechts auf der südlichen Halbkugel. Auch nimmt die Stärke des Windes innerhalb der Bodenströmung nach unten ab, so daß der Bodenwind immer schwächer als der Gradientwind ist.

Die rein zonale Druckverteilung, wie man sie mit ziemlich guter Annäherung auf der Südhalbkugel beobachtet, würde die folgende zonale Windverteilung hervorrufen:

Passatzone vom Äquator bis etwa 30° S: Ostwind in der freien Atmosphäre[1] mit schwacher Zusatzkomponente äquatorwärts in der Bodenströmung.

Westwindzone von etwa 30 bis etwa 60° S: Westwind in der freien Atmosphäre mit schwacher Zusatzkomponente polwärts in der Bodenströmung.

Polare Ostwindzone von etwa 60° S bis zum Pol: Ostwind in der freien Atmosphäre mit schwacher Zusatzkomponente äquatorwärts in der Bodenströmung.

Für die Nordhalbkugel hätte man bei rein zonaler Druckverteilung genau dieselben Windzonen, aber die zonale Druckverteilung ist, wie schon bemerkt, auf der Nordhalbkugel in der unteren Troposphäre durch die Land- und Seeverteilung stark gestört. Statt der zonalen Luftströmungen bilden sich solche, die die geschlossenen Hoch- und Tiefdruckgebiete umkreisen, und zwar so, daß der hohe Druck ständig zur Rechten der Windrichtung liegt. Hierzu kommt, vermöge der Reibung, für die Bodenschicht eine systematische Zusatzkomponente gegen den tiefen Druck hin.

Die schon ausgearbeiteten Darstellungen des räumlichen Druckfeldes geben Aufschluß über die vorherrschenden Winde auf der Nordhalbkugel

[1] Unter „freie Atmosphäre“ verstehen wir hier eine Schicht direkt oberhalb der Reibungsschicht.

auch in größerer Höhe. Die Karten von SHAW zeigen als Haupterscheinung das große polare Tief, das gemäß der Gradientwindregel von West nach Ost von der Luft umkreist wird. Dieser „Polarwirbel" erstreckt sich bis zum subtropischen Hochdruckgürtel; jenseits desselben strömt die Luft von Ost nach West. Das Windsystem in genügender Höhe ist also annähernd zonal auch auf der Nordhalbkugel, obwohl der Wind am Boden geschlossene nichtzonale Teilzirkulationen bildet.

Auf Grund der Meridionalschnitte des räumlichen Druckfeldes können wir nach der Gradientwindformel (1) die Stärke des zonalen

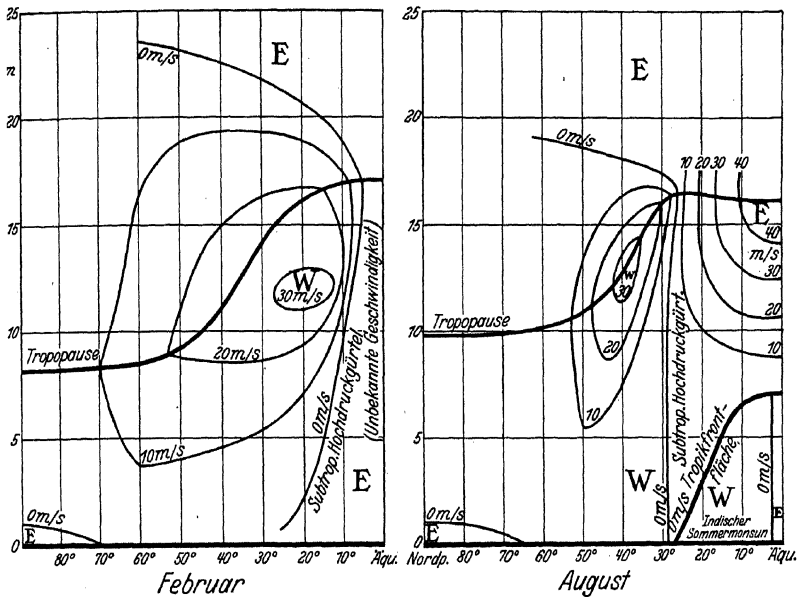



Abb. 114 und 115. Zonalkomponente des Gradientwindes.

Gradientwindes ausrechnen. Das Resultat der Berechnung ist in den Abb. 114 und 115 graphisch dargestellt.

In beiden Jahreszeiten nimmt der Westwind des Polarwirbels mit wachsender Höhe an Stärke zu und erreicht an der Tropopause sein Maximum[1]. Eine allerdings etwas fragliche Ausnahme hiervon findet man jedoch im Winter über den Subtropen, wo das Geschwindigkeitsmaximum schon innerhalb der Troposphäre und nicht an der Tropopause erreicht wird. Die Höchstwerte sind etwas über 30 m/sec sowohl im Sommer als im Winter. Im Winter findet man den stärksten Westwind

[1] DOBSON (Q. J. Roy. Meteor. Soc. Vol. XLVI, 1920) findet eine gute statistische Bestätigung dieser Regel.

in 12 dyn. km unter etwa 20° N, aber nach unten zu ist die Stelle des stärksten Westwindes immer mehr polwärts verschoben, und in 3 dyn. km dürfte das Maximum unter etwa 60° N liegen. Im Sommer ist das Maximum ebenfalls in etwa 12 dyn. km, aber nördlicher als im Winter, und zwar bei 40° N gelegen. Nach unten zu verschiebt sich die Stelle des stärksten Westwindes ebenfalls polwärts, aber viel weniger als im Winter, so daß sie nirgends wesentlich nördlicher als 50° N kommt.

Die polaren Ostwinde sind schwach und kommen in diesem Bild der mittleren Verhältnisse nur in dem untersten Kilometer zum Vorschein. Wäre der Meridianschnitt durch das Island- bzw. Aleutentief gelegt worden, so hätte man polare Ostwinde von etwas größerer Stärke und mit einer vertikalen Mächtigkeit von vielleicht 3 oder 4 km gefunden.

Gegen den Äquator zu wird die Berechnung der Gradientwindgeschwindigkeit immer unsicherer, denn $\mathrm{tg}\,\theta_p/\sin\varphi$ nimmt dort die unbestimmte Form 0/0 an. Das einzige einigermaßen sichere Resultat ist der starke Ostwind oberhalb etwa 8 dyn. km auf der Sommerseite des Äquators. Auf der Winterseite des Äquators ist in denselben Höhen nicht viel Platz für die Ostwinde übrig, und ihre Stärke ist dort sicherlich kleiner als auf der Sommerseite. Es ist nicht überraschend, daß bei der großen Ausbreitung des Polarwirbels auf der Winterhalbkugel Westwinde sogar bis zum Äquator selbst vorkommen können, wenn sich der Polarwirbel vorübergehend über seine natürlichen Außengrenzen ausdehnt.

Die Grenze zwischen West- und Ostwinden unterhalb 10 dyn. km im tropischen Gebiet ist gemäß den Resultaten der indischen Pilotballonaufstiege und Cirruszugbeobachtungen gezogen[1], es sind aber keine Windstärkekurven angegeben, da die Gradientwindberechnungen zu unsicher sind. Der subtropische Hochdruckgürtel, dessen Lage in der Höhe im Winter von unseren Meridionalschnitten des Druckfeldes nicht gut angezeigt wurde, liegt natürlich ständig an der Grenze zwischen den Westwinden des Polarwirbels und den äquatorialen Ostwinden. Das Vorhandensein des subtropischen Hochdruckgürtels in der Höhe auch im Winter ist also durch die Höhenwindbeobachtungen festgestellt. Im Sommer treten in unserem Schnitt unterhalb 6 dyn. km Westkomponenten an Stelle der gewöhnlichen äquatorialen Ostkomponenten auf. Es ist dies der bekannte indische Südwestmonsun, der von der Passatströmung der Südhalbkugel abzweigt und nach der Überquerung des Äquators eine Westkomponente bekommt (vgl. Abschnitt **177**).

Die hier gegebene Beschreibung des zonalen Windsystems in der Höhe auf der Nordhalbkugel muß in großen Zügen auch für die weniger

[1] BANERJEE and RAMANATHAN: „Upper Air Circulation over India...“ India Meteorological Department, Scientific Notes, Vol. III, No. 21.

gut erforschte *Südhalbkugel* richtig sein, natürlich mit Ausnahme der durch die spezielle Land- und Seeverteilung verursachten Winde. Die Grenze zwischen dem Westwind des Polarwirbels und dem äquatorialen Ostwind scheint jedoch zu allen Jahreszeiten ungefähr so zu verlaufen wie auf der Nordhalbkugel im Winter; mit anderen Worten, die Zone der äquatorialen Ostwinde wird mit der Höhe immer schmäler. Über Samoa[1] im Passatgebiet des Südpazifik auf etwa 14° S hat man mit zunehmender Höhe, und zwar zu allen Jahreszeiten, den Wechsel von der Ost- zur Westkomponente des Windes. Der Südpolarwirbel reicht mithin in größeren Höhen bis nördlich von 14° S und reicht also in allen Jahreszeiten mindestens ebenso nahe an den Äquator wie der winterliche Nordpolarwirbel. Dieses isolierte Resultat von der Südhalbkugel ist aber wahrscheinlich nicht ganz repräsentativ für alle Meridionalschnitte. Der subtropische Hochdruckgürtel zeigt ja im betreffenden Teil des Südpazifik eine „schwache Stelle", wodurch natürlich die Stärke und vertikale Mächtigkeit der äquatorialen Ostwinde dort kleiner wird als sonstwo.

Als *Absolutbewegung* betrachtet ist die zonale Luftbewegung der ganzen Atmosphäre eine Bewegung um die Erdachse im gleichen Sinn wie die Rotation der Erde selbst. In den Westwindzonen rotiert die Atmosphäre etwas schneller um die Erdachse als die Erde, in den Ostwindzonen etwas langsamer. Die Ursache dieser Relativbewegung zwischen rotierender Atmosphäre und rotierender Erde soll hier schrittweise abgeleitet werden.

Einleitend sei daran erinnert, daß, wenn man von allen Störungen thermischen Ursprunges absieht, die Reibung allein für die Bewegung der Atmosphäre relativ zur Erde maßgebend sein wird. Es müßte sich dann eine Bewegung ohne innere Relativgeschwindigkeiten einstellen, d. h. die Atmosphäre und die feste Erde müßten zusammen als ein einziger starrer Körper rotieren. Da die Atmosphäre dann relativ zu der Erde ruht, müssen die Isobarflächen mit den Niveauflächen der rotierenden Erde zusammenfallen.

Dieses relative Gleichgewicht wird aber durch die ungleichmäßige Wärmezufuhr in den verschiedenen Breitengürteln der Erde gestört, und ein Luftaustausch in meridionaler Richtung kommt zustande. Die genaueren Entstehungsbedingungen dieser meridionalen Luftbewegungen werden in den Kapiteln XVI und XVII diskutiert, hier sei nur die Wirkung des meridionalen Luftaustausches auf das Feld der Zonalbewegung vorweggenommen.

Nach dem *Flächensatz* müssen die von hohen nach niedrigeren Breiten geführten Luftmassen eine kleinere und die von niedrigen nach höheren

[1] ANDREW THOMSON: Report of Apia Observatory, Wellington, N. Z., 1925.

Breiten geführten Luftmassen eine größere Winkelgeschwindigkeit um die Erdachse bekommen als die Erde selbst. Es entstehen also als Folge des meridionalen Luftaustausches ein tropischer Ostwindgürtel, wo die Atmosphäre zurückbleibt relativ zur rotierenden Erde, und zwei außertropische, bis zu den Polen reichende Westwindgürtel, in denen die Atmosphäre schneller als die Erde rotiert. An der Grenze zwischen Ostwind und Westwind bestehen dann vermöge der Gradientwindbeziehung die beiden subtropischen Hochdruckgürtel, am Äquator werden entsprechend ein Tiefdruckgürtel und an beiden Polen Tiefdruckzentren vorhanden sein. Diese Luftdruckverteilung ist in qualitativer Hinsicht tatsächlich die in der Atmosphäre vorhandene, wenn man von den untersten Kilometern absieht.

Die Druckverteilung, die wir gerade aus dem Flächensatz abgeleitet haben, könnte in einer barotropen Atmosphäre in allen Niveaus gleichzeitig bestehen. In der tatsächlich vorhandenen *baroklinen Atmosphäre* ist dies aber nicht mehr möglich, denn da die Druckzunahme nach unten in den kalten Breiten schneller ist als in den warmen, entsteht eine systematische Änderung der meridionalen Druckverteilung vom einen Niveau zum anderen (vgl. Abb. 110 und 111). Geht man z. B. von der Isobarenkarte eines Niveaus der oberen Troposphäre aus, wo die Druckverteilung dem Flächensatze entspricht, so erhält man die Isobarenkarten der darunterliegenden Niveaus durch Hinzuzählung des Gewichtes der dazwischenliegenden Niveauschichten. Da alle diese troposphärischen Einheitsschichten am Pol schwerer sind als ringsherum, bekommt man nach unten zu Isobarenkarten, auf denen das Poltief mehr und mehr ausgefüllt ist. Mit Annäherung an den Erdboden geht das Poltief sogar in ein flaches Polhoch über, das von einem Gürtel tiefen Druckes bei etwa 60° Breite umgeben ist. Dies erklärt, warum die wirkliche Druckverteilung im Meeresniveau nicht mit der aus dem Flächensatze abgeleiteten übereinstimmt.

Das an der Erdoberfläche resultierende zonale Windsystem, mit polaren Ostwinden, Westwinden der gemäßigten Breiten und tropischen Ostwinden, muß sich schließlich so einstellen, *daß die auf die rotierende Erde wirkenden Reibungskräfte im Mittel für längere Zeiträume ein Drehmoment Null in bezug auf die Erdachse ausüben.* Wäre das nicht der Fall, so würde die Erde die Rotation der Atmosphäre stetig beschleunigen und die Atmosphäre die Rotation der Erde stetig verzögern oder umgekehrt. Die entgegengesetzt gerichteten Momente der Reibungskraft, die von den Ostwindzonen und den Westwindzonen herrühren, müssen deshalb gleich groß sein.

Durch die kombinierte Kontrolle des *Flächensatzes,* der *statischen Druckabnahme* mit der Höhe und des *Prinzips vom Drehmoment Null bezogen auf die Erdachse* ist die Stabilität der großen zonalen Grund-

strömungen und des entsprechenden zonalen Druckfeldes gesichert. Jahreszeitliche Störungen desselben Systems durch die nichtzonale Temperaturverteilung der teils land-, teils wasserbedeckten Erde sind uns schon aufgefallen. Andere Störungen des stabilen atmosphärischen Grundzustandes werden in Kapitel XVIII behandelt.

Sechzehntes Kapitel.

Der Wärmehaushalt der Atmosphäre.

167. Das Wärmegleichgewicht als Bedingung der reinen Zonalzirkulation. Eine ideale Atmosphäre, die in stationärer Weise als zirkularer Wirbel um die Erdachse rotiert, ist nur möglich, wenn ihr Temperaturfeld rein zonal und stationär ist. Es müßte also die Gleichung **50** (10) für $\partial\theta/\partial t$ in jedem Punkt der Atmosphäre den Wert Null ergeben:

$$\frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt} + \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\theta}{\vartheta}\left(v_x\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) = 0\,.$$

Da das Druckfeld ebenfalls stationär sein muß, verschwindet das zweite Glied links. Da fernerhin die Luftströmung im zirkularen Wirbel überall parallel zu den zonalen Flächen gleicher potentieller Temperatur verläuft, verschwindet auch das dritte Glied, und die Bedingungsgleichung für das Stationärbleiben des zonalen Temperaturfeldes, bei zonaler Zirkulation der Atmosphäre, reduziert sich auf:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{1}{c_v}\frac{dw}{dt} = 0\,.$$

Es muß also für jedes Luftteilchen $dw/dt = 0$ sein, d. h. es muß überall Gleichgewicht zwischen zugeführter und abgegebener Wärme bestehen. Diese Bedingung für die Existenz einer reinen Zonalzirkulation wird in den folgenden Abschnitten an Hand der empirischen Kenntnisse der Wärmeleitung, des turbulenten Wärmeaustausches und der Wärmestrahlung in der Erdatmosphäre geprüft werden. Das Resultat, das leicht vorwegzunehmen ist, läuft natürlich darauf hinaus, daß die Bedingung des Wärmegleichgewichts nicht überall in der Atmosphäre erfüllt sein kann.

168. Die molekulare Wärmeleitung. Die molekulare Wärmeleitung sucht alle Temperaturgegensätze auszugleichen, so daß unter ihrer alleinigen Wirkung die Atmosphäre schließlich isotherm werden würde. Dies tritt nicht ein, da andere, viel stärkere Faktoren eingreifen. Die molekulare Wärmeleitung ist nur bei der gegenseitigen Wärmeübertragung zwischen Atmosphäre und Erdboden von einiger Bedeutung, denn an deren gemeinsamer Berührungsfläche treten schroffe Temperatur-

diskontinuitäten auf. Aber auch die dort durch Wärmeleitung übertragenen Wärmemengen treten wahrscheinlich zurück neben den durch gegenseitige Strahlung zwischen der Erdoberfläche und der Bodenluftschicht transportierten Wärmemengen.

169. Der turbulente Wärmeaustausch. In der immer turbulent strömenden Atmosphäre tritt eine Scheinleitung der Wärme auf, die von W. SCHMIDT[1] als „Wärmeaustausch" bezeichnet worden ist.

Der turbulente Wärmeaustausch und die molekulare Wärmeleitung sind grundverschieden, wie aus den folgenden typischen Beispielen der isothermen und der adiabatischen Atmosphäre hervorgeht. Eine *isotherme Atmosphäre*, in welcher selbstverständlich keine molekulare Wärmeleitung stattfindet, würde dennoch bei ungeordneter Bewegung turbulenten Wärmeaustausch in vertikaler Richtung aufweisen. Ein beliebiges Turbulenzelement wird nämlich bei einem Vertikalausschlag Δz von seinem Ausgangsniveau seine Temperatur um $-\delta_a \Delta z$ ändern (vgl. **50**), und zwar wird es bei positivem Δz kälter und bei negativem Δz wärmer als die umgebende Luft. Die Turbulenzelemente müssen deshalb oberhalb ihres Gleichgewichtsniveaus etwas Wärme aufnehmen und unterhalb desselben Wärme abgeben; mit anderen Worten, durch den turbulenten Wärmeaustausch in der ursprünglich isothermen Atmosphäre entsteht ein abwärts gerichteter Wärmestrom. Andererseits hat eine *adiabatisch geschichtete Atmosphäre* keine Möglichkeit für turbulenten Wärmeaustausch, denn die Turbulenzelemente haben, wie große Ausschläge sie auch machen, ständig die Temperatur ihrer Umgebung. Nichtsdestoweniger wird natürlich die adiabatische Atmosphäre durch molekulare Wärmeleitung einen (allerdings sehr schwachen) nach oben gerichteten Wärmestrom unterhalten.

Es ist ohne weiteren Beweis leicht einzusehen, daß *der turbulente Wärmeaustausch eine adiabatische Temperaturverteilung $\delta = \delta_a$, bzw. eine feuchtadiabatische $\delta = \delta_{pa}$ für den Fall der gesättigten Atmosphäre, herzustellen strebt.* Nach welchem quantitativen Gesetz der durch die Turbulenz vermittelte, vertikale Wärmestrom in der Atmosphäre verläuft, ist aber zur Zeit nicht möglich zu sagen[2]. Wir wissen nur, daß

[1] Sitzgsber. Wien. Akad. Wiss., Abt. IIa, Bd. 126, S. 757 (1917) und Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie Okt.-Nov. 1917. Etwas früher hat G. I. TAYLOR dasselbe Problem in Phil. Trans. Roy. Soc. Bd. 215 (A) (1915) behandelt.

[2] Die Annahme, daß der Koeffizient der turbulenten Wärmeleitung mit dem Koeffizienten der turbulenten Reibung identisch sei, scheint unhaltbar, nachdem die Ozeanographen gezeigt haben, daß im Meer der erstere nur $^1/_{10}$ bis $^1/_{100}$ des zweiten ist (HELLAND HANSEN: Report on the Scientific Results of the „Michael Sars" North Atlantic Deep Sea Expedition 1910, Physical Oceanography and Meteorology, S. 58. Bergen 1930).

er im großen und ganzen abwärts gerichtet ist, weil im Mittel $\delta < \delta_a$ und sogar $\delta < \delta_{pa}$ ist. Die bedeutendste Ausnahme hiervon findet man an sonnigen Sommertagen nahe am Boden, wo die vertikale Temperaturverteilung oft stark überadiabatisch ($\delta > \delta_a$) wird, so daß durch die Turbulenz ein aufwärts gerichteter Wärmestrom entsteht. Auch kalte Luftströmungen über warmem Meer haben ähnliche Verhältnisse in den untersten Metern. Innerhalb von Wolken in feuchtlabiler Atmosphäre ($\delta_a > \delta > \delta_{pa}$) geht der Wärmestrom des turbulenten Austausches ebenfalls aufwärts (vgl. **175**).

170. Die Wärmestrahlung. Die folgende Zusammenstellung der bisherigen Resultate der meteorologischen Strahlungsforschung hat keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sie bringt nur in kürzester Form die Resultate und Theorien, die für unsere weitere Behandlung der Dynamik der Atmosphäre nützlich sind. Wie aus dieser Zusammenstellung hervorgeht, sind die Strahlungsvorgänge in der Atmosphäre sehr kompliziert und zum größten Teil noch ungenügend erforscht, so daß keine endgültigen quantitativen Resultate gebracht werden können. Wo quantitative Daten trotzdem gegeben sind, müssen sie nur als die „bisher besten" und wahrscheinlich bald als verbesserungsbedürftig angesehen werden. Dasselbe gilt natürlich auch für die im nächsten Abschnitt durchgeführte Berechnung der Meridionalzirkulation auf Grund der quantitativen Strahlungsdaten.

A. Allgemeiner Überblick. Wir bringen zuerst zur Orientierung einen Auszug nebst Abb. 116 aus dem Vortrag des Herrn Direktor E. ALT: „Der Stand des meteorologischen Strahlungsproblems" auf der Tagung der Deutschen Meteorologischen Gesellschaft im Jahre 1929[1], worin das Wesen des Wärmehaushaltes der Atmosphäre in gedrängter Form dargelegt ist:

„Im Verlaufe von 24 Stunden strahlt die Sonne jedem Quadrat-„zentimeter der Erdoberfläche rund 720 gcal zu[2], wenn wir vorerst von „der Existenz der Atmosphäre absehen und die Solarkonstante zu „2 gcal $\text{min}^{-1}\,\text{cm}^{-2}$ ansetzen[3]. Auf dem Wege durch die Atmosphäre „wird dieser primäre Strahlungsstrom durch die Vorgänge der Ab-„sorption, der diffusen und geordneten Reflexion, beeinflußt. Nehmen „wir 7,2 gcal als Maßeinheit an und drücken wir die Intensität aller „noch weiter auftretenden Ströme in diesem Maße aus, so beträgt die „solare Wärmezufuhr an der äußersten Grenze unserer Atmosphäre 100.

[1] Z. Geophysik 1929, H. 8, S. 385.
[2] In M.T.S. mechanischen Wärmeeinheiten etwa $3 \cdot 10^4$ Kilojoule m^{-2}.
[3] In M.T.S. mechanischen Wärmeeinheiten ausgedrückt ist die Solarkonstante 1,4 Kilojoule $\text{sec}^{-1}\,\text{m}^{-2}$.

„Durch Absorption gehen 14 Einheiten in die Atmosphäre ein, wo sie „zum geringen Teile in chemische, hauptsächlich aber in calorische „Energie verwandelt werden. 24 Einheiten gehen nach geordneter „Reflexion an Wolken und größeren Teilchen in den interplanetarischen „Raum zurück und 39 Einheiten werden durch diffuse Reflexion an „Gasmolekülen und kleinsten Teilchen von der direkten Strahlungs- „richtung abgelenkt und in der Atmosphäre zerstreut. Von dieser diffus „zerstreuten Strahlung gehen 19 Einheiten in den interplanetarischen „Raum zurück, 20 Einheiten gelangen zur Erdoberfläche.

„Durch geordnete und diffuse Reflexion werden also 24 + 19, das „sind 43 Einheiten der primären Zustrahlung, zurückgegeben, weshalb „man von einer Energiealbedo der Erde von 0,43 spricht.

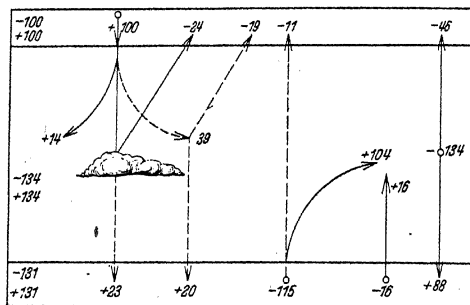



Abb. 116. Wärmehaushalt der Atmosphäre nach ALT.

„Derselbe Betrag von 43 Einheiten, und zwar 23 Einheiten direkter und „20 Einheiten diffus zerstreuter Strahlung gelangen zur Erdoberfläche.

„Von der Erdoberfläche, die wir in erster Annäherung als eine schwarz „strahlende Fläche von der mittleren Temperatur 288° abs. annehmen „dürfen, geht eine dunkle Wärmestrahlung in der Richtung nach dem „interplanetarischen Raum aus, dessen Temperatur zu 0° abs. angenom- „men werden soll. Nach dem STEFANschen Gesetze berechnet sich die „Intensität dieses Stromes zu 115 der angenommenen Einheiten.

„Da aber diese langwellige Wärmestrahlung, deren Intensitäts- „maximum etwa bei 9000 bis 10000 $\mu\mu$ liegt, von der Atmosphäre, und „zwar hauptsächlich von Wasserdampf und Kohlensäure, sehr kräftig „absorbiert wird, so gelangt nur ein verhältnismäßig geringer Teil der- „selben, etwa 11 Einheiten, in den interplanetarischen Raum, der „Hauptteil von 104 Einheiten wird von der Atmosphäre in calorische „Energie umgewandelt.

„Außer dieser Zufuhr calorischer Energie erhält die Atmosphäre durch „thermodynamische Vorgänge, welche mit Kondensationserscheinungen

„verbunden sind, noch Wärmeenergie im Betrag von 16 Einheiten „zugeführt. Dieser Betrag wird an der Erdoberfläche durch Ver- „dunstung von Wasser verbraucht und kommt bei der Kondensation „durch Freiwerden der latenten Verdampfungswärme der Atmosphäre „zugute.

„Die irdische Atmosphäre erhält also durch Absorption der direkten „Sonnenstrahlung 14, durch Absorption der dunklen Erdstrahlung 104, „durch die Zufuhr latenter Verdampfungswärme 16, das sind insgesamt „134 Einheiten. Derselbe Betrag muß von ihr unter der Bedingung „einer vollkommenen Energiebilanz wieder abgegeben werden, und zwar „durch Ströme dunkler Wärmestrahlung gegen die Erdoberfläche und „gegen den interplanetarischen Raum. Setzen wir die Intensität des „gegen die Erde gerichteten Stromes auf 88 Einheiten, des gegen den „freien Raum gerichteten Stromes auf 46 Einheiten fest, so ist die eben „gestellte Forderung einer vollkommenen Bilanz für das gesamte „System Erde—Atmosphäre erfüllt.

„Die primäre Zufuhr von 100 Einheiten an der äußersten Grenze „der Atmosphäre wird kompensiert durch kurz- und langwellige Strah- „lung gegen den interplanetarischen Raum von gleichem Betrag.

„Die Atmosphäre nimmt durch Absorption und Zufuhr latenter „Verdampfungswärme 134 Einheiten auf, die sie in Form langwelliger „Wärmestrahlung wieder abgibt.

„Die Erdoberfläche erhält 23 Einheiten durch direkte, 20 Einheiten „durch diffus zerstreute Sonnenstrahlung, 88 Einheiten durch dunkle „Gegenstrahlung der Atmosphäre, das sind insgesamt 131 Einheiten. „Sie gibt ab an dunkler Strahlung 115 Einheiten, an Energie zur Ver- „dunstung von Wasser 16 Einheiten, also wiederum 131 Einheiten.

„Diese schematische Darstellung des Energiehaushalts unserer Erde „und ihrer Atmosphäre, die natürlich nur auf die Erde als Ganzes be- „zogen im Durchschnitt langer Zeiträume gültig ist, gibt uns Auskunft „über die Existenz, die allgemeine Richtung und die ungefähre Größen- „ordnung der Strahlungsströme."

B. Hauptzüge des Strahlungsklimas der Erde. Wir werden an Hand des Wärmehaushaltschemas von ALT einige wohlbekannte Eigenschaften des atmosphärischen Temperaturfeldes, die auf die Strahlung zurückzuführen sind, kurz besprechen.

Die Ursache des normalen *Temperaturwechsels zwischen Tag und Nacht* bei klarem Himmel ist ohne weiteres einleuchtend. Die Einstrahlung von der Sonne überwiegt die langwellige Wärmeausstrahlung vom Sonnenaufgang bis etwa 2 Stunden nach dem höchsten Sonnenstand. Um die Zeit ist die Temperatur so stark gestiegen, daß die Ausstrahlung der schon abnehmenden Einstrahlung gleich geworden ist.

In diesem Moment des Gleichgewichts zwischen Ein- und Ausstrahlung wird das Temperaturmaximum erreicht. Abends, bei abnehmendem Sonnenstand, überwiegt die Ausstrahlung, und nachts, wenn die Sonne unter dem Horizont ist, wirkt die Ausstrahlung des Erdbodens fast allein, nur vermindert durch die Gegenstrahlung der Atmosphäre. Der Temperaturfall dauert deshalb bis zum Sonnenaufgang fort. Bei der niedrigen Temperatur, die frühmorgens herrscht, ist die Ausstrahlung gering geworden und wird von der beim Sonnenaufgang beginnenden Einstrahlung gleich überkompensiert, wodurch die Temperatur wieder steigt.

Wegen der geringen Absorptionsfähigkeit der Luft für die direkte Sonnenstrahlung erreicht die Amplitude der täglichen Temperaturperiode in der freien Atmosphäre nur 1 bis 2° C. Der große Tag- und Nachtwechsel der Temperatur, den wir unten beobachten, beschränkt sich also auf eine Bodenschicht der Atmosphäre, die tagsüber Wärme durch dunkle Strahlung, oder bei überadiabatischer Schichtung auch durch turbulenten Wärmeaustausch, vom erhitzten Erdboden bekommt, und die während der Nacht eine ähnliche Wärmemenge mittels Strahlung und turbulenten Wärmeaustausches an den abgekühlten Erdboden verliert.

Die *Temperaturunterschiede der Zonen verschiedener geographischer Breite* erklären sich hauptsächlich durch die verschiedene Einstrahlung, die bei verschiedener Sonnenhöhe stattfindet. Die Jahressummen der zugestrahlten Sonnenenergie pro horizontale Flächeneinheit (auf einer Erde ohne Atmosphäre) sind am Äquator etwa 22% größer und an den Polen etwa 49% kleiner als das Mittel für die ganze Erde. Anstatt der 100 Einheiten zugestrahlter Sonnenenergie, mit denen auf Abb. 116 für die ganze Erde im Mittel gerechnet wurde, bekommt also der Äquator 122 Einheiten zugestrahlt. Damit die Äquatorialzone auch die Stelle der maximalen Ausstrahlung sei, muß die Temperatur des Erdbodens am Äquator höhere Werte erreichen als anderswo. Die Polargegenden, die statt 100 nur 51 Energieeinheiten zugestrahlt bekommen, müssen niedrigere Jahrestemperatur als die anderen Erdzonen haben, und es muß also ein permanentes Temperaturgefälle von den Tropen nach den Polen hin bestehen.

Die Versuche zur quantitativen Berechnung der zonalen Temperaturverteilung der Erde aus der zonalen Verteilung der Sonnenstrahlung unter Voraussetzung des Strahlungsgleichgewichtes führen zu einem bedeutend größeren meridionalen Temperaturgefälle, als tatsächlich beobachtet wird. Die relativ ausgeglichene wirkliche Temperaturverteilung erklärt sich durch die temperaturausgleichende Wirkung der Luftbewegungen mit Meridionalkomponente (mit anderen Worten durch die meridionale *Advektion*, vgl. S. 180). Diese Wirkung der meridionalen

Advektion auf die Temperaturverteilung wird in Abschnitt **171** diskutiert.

Die *jährliche Periode der Temperatur* erklärt sich naturgemäß aus der jährlichen Periode der Sonnendeklination. Diese bewirkt für den äquatorialen Gürtel nur kleine Schwankungen der Einstrahlung, von etwa 15° N und S an besteht aber ein deutliches Sommermaximum und ein Winterminimum der täglichen Einstrahlungssumme, und mit wachsender geographischer Breite werden diese immer mehr ausgeprägt. Gegen die Pole zu bietet die lange sommerliche Tagesdauer mehr als vollkommenen Ersatz für die dortige geringe Sonnenhöhe, und so kommt es, daß um die Mitte des Sommers die Einstrahlung pro horizontale Flächeneinheit bei der oberen Atmosphärengrenze auf der ganzen Sommerhalbkugel größer ist als am Äquator. Am größten ist dann die Einstrahlung im Polargebiet selbst, wo die Sonne um diese Zeit nie untergeht. Auf der Winterhalbkugel nimmt die Einstrahlung polwärts bis Null ab, und zwar wird um die Mitte des Winters der Nullwert schon vom Polarkreis an erreicht.

Es ist eine natürliche Folge dieser Einstrahlungsverhältnisse, daß das polwärts gerichtete troposphärische Temperaturgefälle im Winter stärker sein muß als im Sommer, wie das auch aus den Abb. 103 und 104 hervorgeht.

Der Wärmehaushalt der Atmosphäre gestaltet sich verschieden über *Land und See*, wie wir schon aus der Abweichung der Isothermen am Erdboden vom zonalen Verlauf haben konstatieren können. Die Gründe hierfür sind wesentlich die folgenden.

Der *feste Erdboden*, der ein schlechter Wärmeleiter ist, behält die durch Einstrahlung empfangene Wärme in einer dünnen Oberflächenschicht, die sich folglich schnell erwärmen läßt. Andererseits läßt er sich auch durch Ausstrahlung schnell abkühlen, denn die Wärmeleitung von unten sorgt nur ungenügend für den Ersatz der Wärmeverluste an der Oberfläche[1]. Über den großen Landflächen der Erde bekommen deshalb die täglichen und jahreszeitlichen Temperaturschwankungen große Amplituden. *Das Meer* dagegen läßt sich nur langsam abkühlen, denn das an der Oberfläche abgekühlte Wasser sinkt sofort, vermöge seiner zunehmenden Dichte, und wird von unten her durch anderes Wasser ersetzt. In dieser Weise verteilt sich die Abkühlung allmählich auf große Wassermassen und wird deshalb nur von kleinem Temperaturbetrag. Ähnlich wirkt auch die Erwärmung an der Oberfläche, da sie zur Verdampfung und dadurch zur Hebung des Salzgehaltes in der Oberflächenschicht führt, wodurch wiederum das Oberflächenwasser vermöge seines Dichtezuwachses absinkt und von unten her ersetzt

[1] Die Jahresschwankung der Temperatur im festen Erdboden ist schon in 10 m Tiefe verschwindend.

wird. Die empfangene Wärme verteilt sich also ebenfalls auf beträchtliche Wassermassen[1], und die Temperaturerhöhung bleibt gering. Die Amplituden der täglichen und jahreszeitlichen Temperaturschwankungen werden also auf See viel kleiner als im Inlande.

Die Verspätung der jahreszeitlichen Extreme der Temperatur gegenüber den Zeitpunkten der Sonnenwenden ist hauptsächlich eine Folge der Wärmekapazität der Erdoberfläche, und die Verspätung wird deshalb auf See und an den Küsten besonders groß. Fernerhin wird im Frühling ein gewisser Teil der eingestrahlten Wärme beim Schmelzen von Schnee und Eis gebunden und trägt nicht zur direkten Temperaturerhöhung der Erde und der Atmosphäre bei. In den polaren Gegenden, wo außerdem die Sonne erst gegen das Frühlingsäquinoktium zu scheinen anfängt, verspätet sich deshalb das Winterminimum der Temperatur sogar bis zum Monat März (bzw. September am Südpol).

C. Verteilung von Wärmezufuhr und Wärmeentziehung in der Vertikalen. Die allgemeine Frage nach der Verteilung von Wärmezufuhr und Wärmeentziehung in der Vertikalen kann wohl noch nicht als gelöst gelten, insbesondere weil bisher die Möglichkeiten für Strahlungsbeobachtungen in der Höhe zum größten Teil versagten. Da diese Frage aber von großer Bedeutung für die Dynamik der Atmosphäre ist, wollen wir etwas von den neuesten Theorien über den Wärmehaushalt der Atmosphäre in den verschiedenen Höhen referieren. Wir tun dies auf die Gefahr hin, daß etliches vielleicht mit der Zeit widerrufen werden muß.

Indem wir uns wieder auf das Wärmehaushaltschema (Abb. 116) berufen, stellen wir die Frage: Wie verteilen sich nach der Höhe die 134 von der Atmosphäre pro Zeiteinheit empfangenen und die 134 von der Atmosphäre pro Zeiteinheit abgegebenen Energieeinheiten? Wir nehmen uns zuerst die *Wärmeeinnahme* vor.

Die 14 Einheiten absorbierter Energie aus der direkten *kurzwelligen* Sonnenstrahlung kommen allen Höhen der Atmosphäre zugute, jedoch hauptsächlich den unteren, wo der Wasserdampf am stärksten vertreten ist. Noch mehr wird unten absorbiert, wenn die Atmosphäre gut absorbierende Beimengungen von Staub hat, die sich bekanntlich meistens auf die untersten Kilometerstufen beschränken.

Die 16 Einheiten, die in Form von Kondensationswärme der Atmosphäre zugeführt werden, verteilen sich überall dort, wo Wolken gebildet werden. Der weitaus größte Anteil kommt den Schichten zwischen 0,5 und 4 km Höhe zugute.

---

[1] Die Jahresschwankung der Temperatur ist beispielsweise im östlichen Atlantischen Ozean bis ungefähr 200 m Tiefe nachweisbar (HELLAND-HANSEN: Report on the Scientific Results of the „Michael Sars" North Atlantic Deep Sea Expedition 1910, Physical Oceanography and Meteorology, Section 32. Bergen 1930.)

Die 104 Einheiten *langwelliger* Wärmestrahlung von der Erdoberfläche werden hauptsächlich dank des Absorptionsvermögens des beigemengten Wasserdampfes durch die Atmosphäre aufgenommen. Einen kleineren Absorptionsbeitrag gibt auch die Kohlensäure, während die reine trockene Luft keine nachweisbare Absorption der langwelligen Wärmestrahlung aufweist. Sowohl der Wasserdampf als auch die Kohlensäure absorbieren selektiv. SIMPSON[1] zog daraus wichtige Konsequenzen, die wir an Hand der aus SIMPSONS Abhandlung entlehnten Abb. 117 besprechen werden. Die Erdoberfläche, die im behandelten Fall als schwarzer Strahler von der Temperatur 280° A angenommen

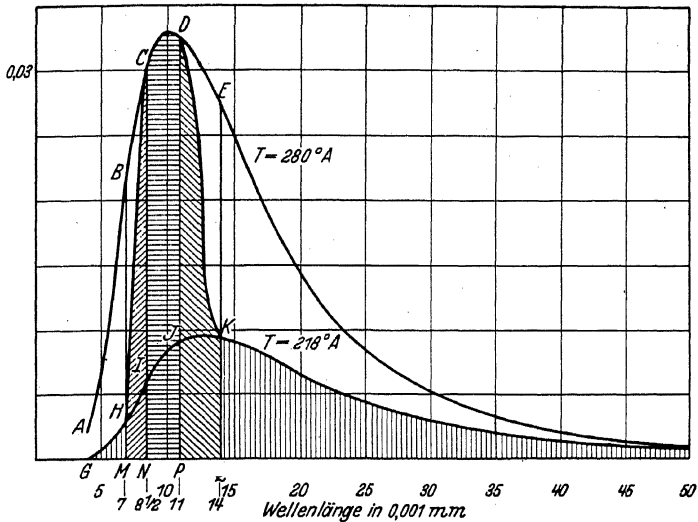



Abb. 117. Ausstrahlung von Erde und Atmosphäre auf 50° N nach SIMPSON.

ist, emittiert eine Energiemenge pro Oberflächen- und Zeiteinheit, die durch die Fläche $ABCDEFG$ dargestellt wird. Von dieser Erdstrahlung kommt ein schmaler Wellenbereich, von etwa $8^1/_2$ bis 11 μ, ziemlich unbehindert durch die wolkenlose Atmosphäre hindurch und bringt die durch die Fläche $NCDP$ vertretene Ausstrahlung vom Erdboden direkt in den Weltraum. Die angrenzenden Wellenbereiche 7 bis $8^1/_2\,\mu$ und 11 bis 14 μ, welche die Energiemengen $MBCN$ bzw. $PDEQ$ befördern, werden von der Atmosphäre teilweise absorbiert, teilweise in den Weltraum transmittiert. Die Reste der Erdstrahlung d. h. die Energiemengen ABM und QEF, werden schon beim Durchgang durch

[1] „Further Studies in Terrestrial Radiation", Memoirs of the Royal Meteorological Society, Vol. III, No. 21. London 1928.

eine Luftschicht, deren Wasserdampfmenge vollständig ausgefällt ungefähr 0,3 mm Niederschlag liefern würde, fast total absorbiert. Diese Wasserdampfmenge ist in den feuchtesten Teilen der Tropen schon zwischen Erdboden und 10 m Höhe, in trockenen arktischen Gebieten zwischen Erdboden und etwa 1000 m Höhe enthalten. *Ein großer Teil* der 104 Einheiten *langwelliger Wärmestrahlung von der Erde wird also schon von der Bodenschicht der Atmosphäre absorbiert*, nur die verhältnismäßig kleinen Energiemengen, die mit den schwächer absorbierten Wellen transportiert werden, erreichen höhere Gebiete der Atmosphäre. Eine Ausnahmestellung nehmen die Wolken ein, insofern als sie die von der wolkenfreien Luft durchgelassenen Wellen $8^1/_2$—11 μ vollständig absorbieren. Die unteren Grenzflächen der Wolken nehmen also direkte Strahlungswärme von der Erdoberfläche auf, auch wenn die betreffenden Wolken nicht der Bodenschicht der Atmosphäre angehören.

Wir gehen jetzt zu den *Wärmeverlusten* der Atmosphäre über. Der Wasserdampf und die Kohlensäure der Luft strahlen in demselben Wellenbereich, in dem sie selbst absorbieren, und es geht deshalb eine langwellige Wärmestrahlung auch von der bodennächsten Luftschicht an den Erdboden. Im Mittel für die ganze Erde ist jedoch diese Wärmestrahlung kleiner als die von der Erde zur Bodenluftschicht. Nur wenn Bodeninversionen der Temperatur vorkommen, geht die Wärmeabgabe von der Luft zum Erdboden. Dies ist sogar die Regel für die Polargebiete, wo fast immer Bodeninversionen vorkommen, aber auf niedrigen Breiten kommt derselbe Fall hauptsächlich nur in klaren Nächten vor.

Die langwellige Strahlung höherer Schichten kommt sehr geschwächt zur Erdoberfläche, da sie hauptsächlich in dem stark absorbierbaren Wellenbereich vor sich geht. Die Wolken aber strahlen auch in den wenig absorbierbaren Wellenlängen, welche die Erdoberfläche erreichen. Die Strahlungsbilanz Erdoberfläche—Wolkenbasis hängt von der gegenseitigen Temperaturdifferenz ab. Gewöhnlich sind die unteren Wolkenflächen kälter als die Erdoberfläche und empfangen deshalb mehr Strahlungswärme, als sie abgeben. Im großen und ganzen sind also *weder die Bodenschicht noch die unteren Wolkenflächen Wärmeverluststellen der Atmosphäre*, da sie beide im Mittel mehr Wärmestrahlung von der Erde empfangen, als sie selbst aussenden.

Die 46 Einheiten langwelliger Wärmestrahlung, welche die Atmosphäre ohne Gegenleistung *an den Weltraum* abgibt, repräsentieren den weitaus größten und auch ständig wirksamen Wärmeverlust des Systemes Erde—Atmosphäre. Es ist eine wichtige Aufgabe zu bestimmen, in welchen Schichten der Atmosphäre diese Ausstrahlung vor sich geht. Ein Teil kommt zweifellos von den Wolkenoberflächen, die im-

stande sind, die wenig absorbierbaren Wellen von $8^1/_2$ bis 11 μ auszusenden. Die wolkenfreie, mehr oder weniger feuchte Luft aber vermag nur solche Wellen auszusenden, die in der darüberliegenden Luftschicht absorbiert werden. Es geht also allerdings eine Strahlung von Schicht zu Schicht aufwärts, aber eine Ausstrahlung in den Weltraum von der wolkenfreien Luft wird erst in solcher Höhe anfangen, wo die gesamte darüberliegende Luftmasse nicht mehr genug Wasserdampf und Kohlensäure enthält, um die Strahlung voll zu absorbieren.

Mit der näheren Lokalisierung der *oberen Emissionsschicht* fängt die Unsicherheit und ein teilweiser Widerstreit der Strahlungstheorien an. SIMPSON selbst vermutete, daß die Stratosphäre genug Wasserdampf enthalte, um fast die ganze absorbierbare Wärmestrahlung der Troposphäre aufzunehmen; die eigentliche Ausstrahlung in den Weltraum würde also erst innerhalb der Stratosphäre anfangen. In der Abb. 117 hat SIMPSON eine Stratosphäre von 218° A angenommen, die eine durch die Fläche $GHIJKF$ vertretene „schwarze Strahlung" liefern würde. Da aber, vermöge der selektiven Emission, diese Ausstrahlung in dem Wellenbereich $8^1/_2$ bis 11 μ ganz und in den Bereichen 7 bis $8^1/_2$ μ und 11 bis 14 μ teilweise fehlt, besteht die tatsächliche Ausstrahlung von der Stratosphäre in den Energiemengen $GHM + QKF$ und einem gewissen Anteil von $MHIN$ und $PJKQ$. Die Gesamtausstrahlung in den Weltraum von Erdoberfläche und Atmosphäre wird folglich durch die schraffierte Fläche $GHCDKF$ angegeben.

Neuerdings hat ALBRECHT[1] plausibel gemacht, daß die Ausstrahlung in den Weltraum zum größten Teil schon von der oberen Troposphäre stammt, und daß die Stratosphäre diese Strahlung ohne nennenswerte Absorption durchläßt. Nach ALBRECHT soll die Emission der wolkenfreien Luft in den Weltraum von einer etwa 3 km starken troposphärischen Schicht stammen, welche sich in polaren und gemäßigten Breiten an die Tropopause anschmiegt, in tropischen Breiten dagegen weit unterhalb der Tropopause liegt (am Äquator z. B. Emissionsschicht in 9 bis 12 dyn. km und Tropopause bei 17 dyn. km). Die Strahlung dieser Emissionsschicht wird als von der geographischen Breite und von der Jahreszeit unabhängig angesehen und überall annähernd gleich der selektiven Strahlung von Wasserdampf und Kohlensäure bei etwa -50° C angenommen. In der SIMPSONschen Abb. 117 des Emissionsspektrums vom System Erde + Atmosphäre wäre also statt der Kurve $T = 218$° A eine Kurve $T = 223$° A zu benutzen, d. h. eine in quantitativer Hinsicht geringfügige Änderung.

Die ALBRECHTsche Emissionsschicht bildet die natürliche obere Begrenzung der Troposphäre in polaren und gemäßigten Breiten. In

[1] Meteorol. Z. 1931, H. 2 und 12.

den Tropen dagegen vermag die starke vertikale Durchmischung[1] die Emissionsschicht zu durchstoßen mit dem Resultat, daß die Tropopause dort bedeutend höher als die Emissionsschicht zu liegen kommt. Die Luft der obersten tropischen Troposphäre wird durch die vertikale Durchmischung mit den niedrigeren Schichten bis zu Temperaturen weit unterhalb denen des Strahlungsgleichgewichtes abgekühlt und empfängt deshalb mehr Strahlungswärme, als sie selbst abgibt.

Hieraus folgt auch, daß in den Tropen die Stratosphäre an die obere Troposphäre Strahlungswärme abgeben muß. Die untere tropische Stratosphäre bekommt deshalb eine niedrigere Strahlungsgleichgewichtstemperatur als diejenige im übrigen Teil der Stratosphäre, eben weil sie auf „kalter Unterlage" ruht. Erst bei etwa 26 dyn. km erreicht die tropische Stratosphäre annähernd dieselbe Strahlungsgleichgewichtstemperatur wie die in der Stratosphäre über Europa gemessene.

Die in der gemäßigten Zone beobachtete jährliche Schwankung in der Gleichgewichtstemperatur der Stratosphäre (Maximum bei Sommersonnenwende und Minimum bei Wintersonnenwende, s. Abschnitt **163**, S. 632) muß auf der Absorption der kurzwelligen direkten Sonnenstrahlung beruhen. Die Tagessumme dieser Wärmeabsorption ist natürlich eine Funktion der Sonnendeklination und hat folglich außerhalb der Tropen ihre Maxima und Minima bei den Sonnenwenden. Das starke Anwachsen der jährlichen Temperaturamplitude der Stratosphäre mit Annäherung an den Pol bestätigt auch die Annahme, daß die jährliche Schwankung der direkten Sonnenstrahlung für die der Stratosphärentemperatur verantwortlich ist.

Auch die Troposphäre absorbiert natürlich aus der direkten Sonnenstrahlung Wärmebeträge, deren jährliche Periode eine Funktion der Sonnendeklination ist. Wenn trotzdem die Temperaturextreme der Troposphäre 2 bis 3 Monate gegenüber den Sonnenwenden verspätet sind, so ist das natürlich auf die um ebensoviel verspätete jährliche Periode der langwelligen Erdstrahlung — die größte Wärmeeinnahme der Troposphäre — zurückzuführen. Es ist deshalb verständlich, daß die Troposphärentemperatur die Jahresschwankung der Erdoberflächentemperatur mitmacht, während die Stratosphärentemperatur eine fast rein solare Jahresschwankung aufweist.

D. Überschuß und Defizit an Strahlungswärme in den verschiedenen Breitengürteln. Obwohl die vielen Einzelposten des atmosphärischen

[1] Wir nehmen an, daß am Äquator auch ein langsames „Aufsteigen en masse" stattfindet, das erst bei der Tropopause auf Null abnimmt (s. Abschnitt **173**). Dieses Aufsteigen ist vielleicht für die Aufrechterhaltung der niedrigen Temperaturen in der obersten tropischen Troposphäre noch wichtiger als die vertikale Durchmischung.

Wärmehaushalts mit großer Unsicherheit behaftet sind, kann die *Hauptbilanz des Systems Atmosphäre + Erde gegenüber der Außenwelt* mit einiger Sicherheit aufgestellt werden. Die einzige belangvolle Energiezufuhr dieses Systems ist die Sonnenstrahlung, und deren Intensität an der äußeren Grenze der Atmosphäre kennt man auf etwa 1% genau. Die Energieverluste durch die Albedo und durch die langwellige Ausstrahlung müssen zusammen die Energiezufuhr kompensieren, und man kennt also auch die Summe dieser beiden Energieverluste auf etwa 1% genau, obgleich natürlich jeder der beiden Addenden weniger exakt bestimmbar ist. Die Albedo der Erdoberfläche und die der Wolkenoberflächen kennt man annäherungsweise durch Messungen, so daß eine Schätzung der Gesamtalbedo der verschiedenen Breitengürtel möglich ist. Die größte Albedo haben die schneebedeckten und ebenso die stark bewölkten Breitengürtel. Auch die langwellige Ausstrahlung des Systems Erde—Atmosphäre unter den verschiedenen geographischen Breiten läßt sich schätzen, indem man für jeden Breitengürtel ein Energiespektrum, analog dem in Abb. 117 für 50° N gegebenen, entwirft. Die von der Emissionsschicht stammende Ausstrahlung sollte nach ALBRECHT auf allen Breitengraden dieselbe sein, und nur die von der Erdoberfläche und den Wolkenoberflächen mittels der durch die Atmosphäre nicht oder nur schwach absorbierbaren Wellen zustande kommende Ausstrahlung ist von der geographischen Breite abhängig. Diese von der geographischen Breite abhängige Ausstrahlung läßt sich auch für die verschiedenen Erdzonen schätzen, obwohl natürlich nicht mit großer Sicherheit, da die wenig bekannte Temperatur der Wolkenoberflächen in die Berechnung eingeht.

Die Wärmebilanz im Mittel für das ganze Jahr auf den verschiedenen Breitenkreisen der Erde würde sich nach obiger Schätzungsgrundlage folgendermaßen stellen (Werte nach ALBRECHT, und zwar alle in die M.T.S.-Einheit Kilojoule pro m^2 pro sec umgerechnet):

Breite in Graden	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Zugestrahlte Wärme . .	236,4	232,6	223,0	207,1	186,2	161,9	134,3	111,7	100,4	$97,9 \cdot 10^{-3}$
Ausgestrahlte Wärme . .	209,2	208,4	205,0	197,5	189,5	179,9	170,7	161,1	153,6	$153,6 \cdot 10^{-3}$
Differenz . .	27,2	24,3	18,0	9,6	− 3,3	−18,0	−36,4	−49,4	−53,1	$-55,6 \cdot 10^{-3}$

Die Tropen haben Überschuß und die Pole Defizit an Strahlungswärme, und die Grenze zwischen Überschuß- und Defizitgebiet liegt etwa bei $37^1/_2$° Breite.

Indem wir diese zonale Verteilung von Überschuß und Defizit mit der vorher abgeleiteten vertikalen Verteilung dieser beiden Größen

vergleichen, kommen wir zu der in Abb. 118 schematisch angegebenen räumlichen Verteilung der Wärme- und Kältequellen der Atmosphäre[1]. Die Kältequelle umfaßt die ALBRECHTsche Emissionsschicht für langwellige Wärmeausstrahlung an den Weltraum und dazu die darunterliegende Luft bis zum Erdboden in den Polargegenden. Die Wärmequellen befinden sich teils unterhalb, teils oberhalb dieser Kältequelle. Die untere und größere der Wärmequellen umfaßt die untere Troposphäre der Tropenzone und der angrenzenden Teile der gemäßigten Zone. Ihre Wärmeeinnahmen bestehen hauptsächlich in dem Überschuß an langwelliger Wärmestrahlung im gegenseitigen Strahlungsaustausch mit der Erdoberfläche, und dazu kommt als wichtiger Zuschlag die Kondensationswärme, deren größter Teil innerhalb der unteren Wärmequelle freigemacht wird. Die obere Wärmequelle umfaßt den höchsten Teil der tropischen Troposphäre, der so kalt ist, daß dort weniger Wärme ausgestrahlt als absorbiert wird.

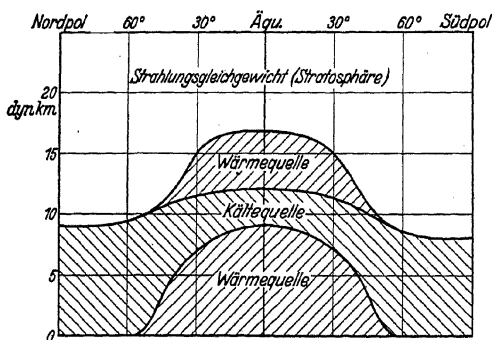



Abb. 118. Mutmaßliche räumliche Verteilung der atmosphärischen Wärme- und Kältequellen im Jahresmittel.

Damit die Grenze zwischen Überschuß und Defizit für die Atmosphäre als Ganzes bei $37^1/_2°$ Breite liegen soll, muß die Grenze zwischen Wärme- und Kältequelle am Boden in bedeutend höherer Breite gelegen sein. Die genaue Lage dieser Grenze kennen wir jedoch noch nicht.

[1] Gemäß der in Abschnitt **53** gegebenen Definition sind die Wärmequellen die räumlichen Gebiete der Wärmezufuhr $\left(\frac{dw}{dt} > 0\right)$, und die Kältequellen sind die räumlichen Gebiete des Wärmeverlustes $\left(\frac{dw}{dt} < 0\right)$. In den Begriff der Wärmezufuhr bzw. des Wärmeverlustes haben wir außer der gestrahlten Wärme auch die durch molekulare Leitung (Abschnitt **168**) und durch Turbulenz transportierte Wärme (Abschnitt **169**) mit einbezogen, und die gegenseitige Abgrenzung der Wärme- und Kältequellen sollte deshalb unter Berücksichtigung aller dieser Wärmeübertragungen geschehen. Die molekulare Wärmeleitung ist aber verschwindend klein, und auch der viel stärkere turbulente Wärmeaustausch ist wahrscheinlich klein gegenüber dem durch Strahlung unterhaltenen Wärmestrom, so daß wir berechtigt sind, in erster Annäherung die Lage der Wärme- und Kältequellen ausschließlich nach den Strahlungsverhältnissen zu bestimmen.

Um die Zeit der Sommersonnenwende besteht gemäß SIMPSON[1] Wärmeüberschuß für das Gesamtsystem Erde + Atmosphäre bis etwa 70° Breite, und von dort bis zum Pol besteht annäherndes Strahlungsgleichgewicht. Die Verteilung der Wärme- und Kältequellen der Atmosphäre müßte dann etwa so beschaffen sein wie in der Abb. 119 für die Nordhalbkugel. Außer der Emissionsschicht kommt dann wahrscheinlich nur die Bodenschicht der polaren Atmosphäre, die ein Defizit im Strahlungsaustausch mit dem Polareis hat, als Kältequelle in Betracht. Die ganze übrige Troposphäre der Nordhalbkugel hat Überschuß an Strahlungswärme.

Um dieselbe Zeit hat die Südhalbkugel Wintersonnenwende, und gemäß SIMPSON reicht dann das Gebiet des Wärmeüberschusses nur bis etwa 15° Breite. Die sich daraus ergebende annähernde Verteilung der atmosphärischen Wärme- und Kältequellen ist in der Abb. 119 rechts gegeben. Die untere Wärmequelle hat sich äquatorwärts zurückgezogen, aber am Erdboden umfaßt sie wohl immerhin etwas mehr als den Gürtel bis 15° Breite. Die Verteilung der Wärme- und Kältequellen im Südsommer (= Nordwinter) ergibt sich natürlich aus der Abb. 119 durch Vertauschung von rechts und links.

Abb. 119. Mutmaßliche räumliche Verteilung der atmosphärischen Wärme- und Kältequellen im Juni.

Die Strahlungsverhältnisse der beiden Halbkugeln werden in quantitativer Hinsicht etwas verschieden sein, denn die südpolare Zone ist systematisch kälter als die nordpolare (s. Abschnitt **163**). Die direkte Strahlung vom Boden an den Weltraum wird also in der südpolaren Zone kleiner sein als in der nordpolaren, und daher ist auch das Wärmedefizit in der südpolaren Kältequelle kleiner als in der nordpolaren.

Für die dynamische Meteorologie wird es sehr wichtig sein, die in den Abb. 118 und 119 nur skizzenmäßig angegebenen Wärme- und Kältequellen quantitativ festgelegt zu bekommen. Dann wird es möglich sein zu entscheiden, wie viel mechanische Arbeit die verschiedenen tropo-

[1] „The Distribution of Terrestrial Radiation". Memoirs of the Royal Meteor. Soc. Vol. III, No. 23. London 1929.

sphärischen Zirkulationen aus der Wärmeenergie schöpfen. So viel ist aber schon zu ersehen, daß die Kältequelle zusammen mit der unteren Wärmequelle reichliche Möglichkeiten für arbeitserzeugende Zirkulationen darbieten (vgl. Satz von SANDSTRÖM S. 186). Wenn aber die Zirkulationen auch in die obere Wärmequelle hinaufwachsen, wird dort etwas von der unten gewonnenen Arbeit wieder eingebüßt.

Siebzehntes Kapitel.

Die permanenten Zirkulationssysteme.

171. Die Meridionalzirkulation. Innerhalb der Troposphäre, wo, gemäß den Resultaten der Strahlungsforscher, kein Strahlungsgleichgewicht vorhanden ist, müssen wir allgemein

$$\frac{dw}{dt} \gtrless 0 \tag{1}$$

voraussetzen. Damit trotzdem das mittlere jährliche Temperaturfeld von Jahr zu Jahr dasselbe bleiben soll, muß gemäß Gleichung **50** (10):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt} - \frac{\theta}{\vartheta}\left(v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) = 0\,, \tag{2}$$

d. h.:

$$\frac{\theta}{\vartheta}\left(v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) = \frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt}$$

sein. Indem wir wie gewöhnlich die x-Achse zonal und die y-Achse meridional verlaufen lassen, wird bei einer zonalen Temperatur- und Druckverteilung $\partial \vartheta / \partial x = 0$, und wir haben die Bedingung

$$\frac{\theta}{\vartheta}\left(v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) = \frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt} \tag{3}$$

für die Aufrechterhaltung des mittleren jährlichen Temperaturfeldes der Atmosphäre von Jahr zu Jahr. D. h. die Zufuhr bzw. Abfuhr von Wärme durch meridionalen und vertikalen Lufttransport muß sich so einstellen, daß die Strahlung keine dauernde Änderung des Temperaturfeldes bewirken kann.

Aus der Gleichung (3) in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung kann man, wenn $\frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt}$ und ϑ in jedem Punkt der Atmosphäre bekannt sind, die Geschwindigkeitskomponenten v_y und v_z in einer stationären Meridionalzirkulation auf ruhender Erde berechnen. Für stationäre Bewegung ist nämlich $\partial q / \partial t = 0$, und die Kontinuitätsgleichung **17** (9) wird:

$$\frac{\partial (q v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (q v_z)}{\partial z} = 0\,. \tag{4}$$

Aus (3) ergibt sich:

$$q v_z = \frac{1}{\frac{\partial \vartheta}{\partial z}} \left\{ \frac{\vartheta}{\theta} \frac{q}{c_p} \frac{dw}{dt} - q v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right\}. \tag{5}$$

Setzt man dies in die Gleichung (4) ein, so ergibt sich nach Umordnung der Glieder die folgende Gleichung für $q v_y$:

$$\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial y}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \Big) q v_y - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial y}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial z}} \right) q v_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\frac{\partial \vartheta}{\partial z}} \frac{q}{c_p} \frac{dw}{dt} \right) = 0. \tag{6}$$

Kennt man hier in jedem Punkt der Atmosphäre $\frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt}$, p und ϑ, so sind auch q und $\partial \vartheta / \partial y$, $\partial \vartheta / \partial z$ überall bekannt, und $q v_y$ läßt sich folglich aus der partiellen Differentialgleichung (6) berechnen. Wenn $q v_y$ gefunden ist, ergibt sich $q v_z$ aus (5).

Da aber die Strahlungsforschung noch nicht die räumliche Verteilung von $\frac{1}{c_p} \frac{dw}{dt}$ ermittelt hat, und außerdem die Integration von (6) schwierig ist, so müssen wir einen weniger exakten Weg einschlagen, um die Meridionalzirkulation zu suchen. Zu dem Zwecke integrieren wir zuerst die Strahlungsbilanzwerte der auf S. 665 gegebenen Tabelle über aufeinanderfolgende 10°-Gürtel und bekommen die folgende Verteilung von Überschuß bzw. Defizit an Strahlungsenergie:

Breitengürtel . .	0—10°	10—20°	20—30°	30—40°	40—50°	50—60°	60—70°	70—80°	80—90°
10^9 Kilojoule/sec	+1109	+941	+544	+167	−402	−690	−833	−615	−222

Damit die Wärmeverteilung von Jahr zu Jahr stationär bleibe, muß der gesamte Wärmeüberschuß nach den Defizitgebieten transportiert werden, d. h. es muß ein polwärts gerichteter Wärmestrom bestehen. Dieser Wärmestrom läßt durch die koaxialen Kegelflächen $\varphi =$ konst. oder, wie wir sagen werden, durch die zonalen Vertikalschnitte pro Zeiteinheit die folgenden Wärmemengen hindurchtreten:

Breite $\varphi =$ . . .	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
10^9 Kilojoule/sec	0	1109	2050	2594	2761	2360	1669	837	222	0

Dieser Wärmetransport wird teils durch die Meeresströmungen, teils durch die Atmosphäre vermittelt. Der meridionale Wärmetransport des Meeres ist bisher ungenügend untersucht worden, aber man ist wahrscheinlich berechtigt, ihn als klein anzusehen gegenüber dem-

jenigen der Atmosphäre und ihn dementsprechend bei unseren Überschlagsrechnungen zu vernachlässigen. Weiterhin vernachlässigen wir die meridionalen Wärmetransporte der Stratosphäre, denn dort herrscht annäherndes Strahlungsgleichgewicht, so daß keine wesentlichen meridionalen Lufttransporte für die Aufrechterhaltung der vorhandenen Wärmeverteilung nötig sind.

Der meridionale Wärmetransport der Troposphäre kann natürlich nur durch die Meridionalkomponente v_y der Luftbewegung besorgt werden, und wir haben deshalb die Möglichkeit, diese unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen zu berechnen.

Wir wählen eine Meridionalzirkulation, bei der die zonal orientierten isobar-isosteren Solenoide durch die Luftteilchen in arbeitserzeugendem Sinne umkreist werden, d. h. daß die Luft am Pol absinkt, unten äquatorwärts strömt, am Äquator aufsteigt und oben polwärts zurückkehrt. Der Einfachheit halber idealisieren wir vorläufig die Meridionalzirkulation in solcher Weise, daß die Troposphäre der betrachteten Halbkugel als eine einzige torusförmige Luftwalze aufgefaßt wird, ohne uns darum zu kümmern, daß diese Strömungsform sich als dynamisch unmöglich herausstellen wird. Erst im Abschnitt **173** wird gezeigt, in welcher Weise eine Meridionalzirkulation in dynamisch möglichen Zirkulationssystemen enthalten sein kann. Um eine einfache Berechnungsgrundlage für Massen- und Wärmetransporte zu bekommen, nehmen wir fernerhin an, daß die untere Hälfte der Troposphärenmasse eine Meridionalkomponente der Geschwindigkeit $-v_y$, die obere eine $+v_y$ habe, wobei $\partial v_y/\partial z = 0$ innerhalb jeder Troposphärenhälfte vorausgesetzt wird. Damit ist gesichert, daß der Massentransport **52** (4) $\overline{V} = \int q v_y d\sigma$, über jeden zonalen Vertikalschnitt integriert, Null liefern muß, so daß das Massenfeld zeitlich unveränderlich bleibt. Schließlich sollen die Stromröhren der Meridionalzirkulation in sich zurücklaufen, so daß wir für jede Stromröhre die Wärmetransportformeln **53** (6) oder die äquivalente Massentransportformel **53** (7) anwenden können. Der meridionale Wärmetransport der ganzen betrachteten Meridionalzirkulation ist nun gleich der Summe der Wärmetransporte aller ihrer Stromröhren:

$$\Delta W_W = \Delta W_K = \sum \overline{V} \left[c_p \left(\frac{p_0}{100} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} (\vartheta_1 - \vartheta_0) + W_V (f_{s1} - f_{s0}) \right.$$

Diese Formel bleibt z. B. auch gültig für den Wärmetransport durch einen zonalen Vertikalschnitt, obwohl dieser keine Trennungsfläche zwischen Wärme- und Kältequelle ist. ΔW_W ist dann als der Wärmeüberschuß auf der Äquatorseite und ΔW_K als das gleich große Wärmedefizit auf der Polarseite desselben zonalen Vertikalschnittes aufzufassen, d. h. die in der Tabelle S. 669 unten dargestellte Größe.

Wählen wir Stromröhren gleichen Massentransportes, so kann $\bar{V}$ außerhalb des Summenzeichens gebracht werden und die Gleichung in bezug auf V aufgelöst werden:

$$\bar{V} = \frac{\Delta W_{\varkappa}}{\sum p \left(\frac{p_0}{100}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} (\vartheta_1 - \vartheta_0 + W_V (f_{s1} - f_{s0})}$$

Der Wert des Nenners kann auf Grund der Verteilung der potentiellen Temperatur und der spezifischen Feuchtigkeit in den verschiedenen zonalen Vertikalschnitten berechnet werden. Die notwendigen Berechnungsgrundlagen haben wir in der Abb. 120, die einen Meridionalschnitt

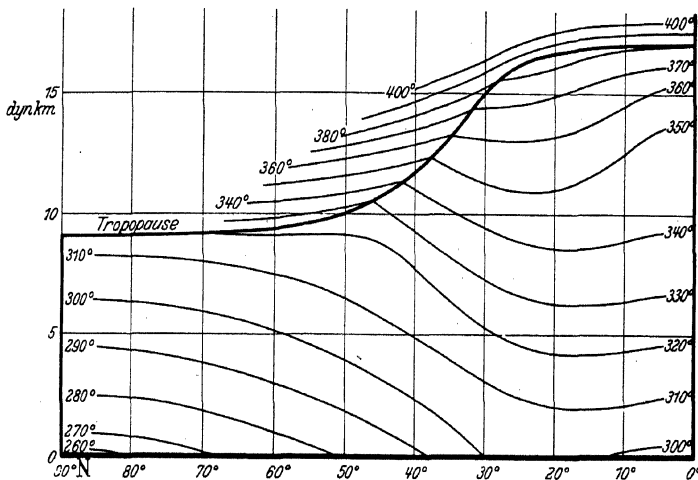



Abb. 120. Verteilung der potentiellen Temperatur im Jahresmittel.

des zonalen Feldes der potentiellen Temperatur (Jahresmittel, auf die Angaben von Pawlowsk, Pavia, Agra und Batavia gestützt) darstellt, und in einem entsprechenden Meridionalschnitt des zonalen Feldes der spezifischen Feuchtigkeit. Letzteres, welches hier nicht wiedergegeben ist, fußt auf der vereinfachenden Annahme, daß die relative Feuchtigkeit in der unteren Strömung 70% und in der oberen Strömung 50% beträgt. Die Berechtigung der gewählten relativen Feuchtigkeit in der oberen Strömung ist vielleicht zweifelhaft, aber für das numerische Resultat dieser Überschlagsrechnung hat sie nicht sehr große Bedeutung, da die spezifische Feuchtigkeit der oberen Strömung ohnehin einen sehr kleinen Wert darstellt.

Man erhält die folgenden Werte der gleich großen Massentransporte $\bar{V}$ in der unteren äquatorwärts gerichteten und in der oberen, polwärts gerichteten Strömung:

Breite φ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	
$\bar{V}$ . . .	1,31	2,45	3,03	3,03	1,67	1,02	0,45	0,11	10^8 Tonnen/sec
v_y . . .	0,71	1,39	1,94	2,44	1,64	1,32	0,87	0,43	m/sec

Die entsprechenden Meridionalkomponenten v_y der unteren und oberen Strömung sind in der letzten Zeile hinzugefügt. Während der stärkste meridionale Massentransport bei etwa 35° Breite liegt, kommt, teils wegen der Konvergenz der Meridiane, teils wegen der polwärts abnehmenden vertikalen Mächtigkeit der Troposphäre, das Maximum der meridionalen Luftbewegung bei etwa 40° Breite zu liegen.

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung können wir auch noch die Vertikalkomponente der Luftbewegung ausrechnen. Bei den gemachten Voraussetzungen über die Horizontalbewegung muß die Vertikalkomponente gerade an der Grenze zwischen der unteren äquatorwärts gerichteten und der oberen polwärts gerichteten Strömung ihre größten Werte erreichen. Diese maximalen Werte der auf- bzw. absteigenden Bewegung sind die folgenden:

Breitengürtel	0—10°	10—20°	20—30°	30—40°	40—50°	50—60°	60—70°	70—80°	80—90°
v_z max . . .	4,5	3,7	1,5	—1,2	—6,9	—3,4	—3,5	—3,4	—3,3 mm/sec

Mit Ausnahme des Wertes für den Gürtel 40—50°, der vielleicht auf Zufälligkeiten im benutzten Material beruht, sind die Vertikalkomponenten überall kleiner als 5 mm/sec.

Die Richtung des aus Meridional- und Vertikalkomponente zusammengesetzten Vektors ist in der Abb. 121 mittels Pfeilen dargestellt. Da diese Abbildung etwa 370fache Überhöhung hat, wird der Winkel des Windvektors mit der Horizontalen entsprechend übertrieben. Mit der rohen Voraussetzung über die Verteilung von v_y mit der Höhe kommt ein Knick in den Stromlinien an der Grenze zwischen äquatorwärts und polwärts gerichteter Strömung zustande. Dieser hat natürlich keine meteorologische Realität, sondern würde in der Natur abgerundet sein.

Die berechnete idealisierte Meridionalzirkulation zeigt die folgenden Haupteigenschaften.

Die Achse der troposphärischen Luftwalze liegt auf etwa 31° Breite. Die Grenze zwischen auf- und absteigenden Windkomponenten (gestrichelte Linie) verschiebt sich mit der Höhe äquatorwärts, um an der höchsten Stelle der Tropopause zu enden. Im Sommer, wenn die

Tropopause ihr Höhenmaximum etwa bei 20° Breite zu haben scheint (s. Abb. 104), wird die Grenze zwischen Auf- und Absteigen steiler verlaufen. Es ist wichtig zu bemerken, daß *die Grenze zwischen Auf- und Absteigen in der berechneten Meridionalzirkulation mit der* in Abschnitt **166** besprochenen *Grenze zwischen dem tropischen Ostwindgürtel und dem Westwind des „Polarwirbels" nahe zusammenfällt,* sogar die in der Höhe stattfindende jährliche meridionale Schwankung derselben findet man wieder. Wir erblicken hierin nicht nur ein zufälliges Rechenresultat, sondern eine Gesetzmäßigkeit im Aufbau des dreidimensionalen Stromfeldes der Atmosphäre, deren weitere Konsequenzen im nächsten Abschnitt folgen. Die Übereinstimmung mit der Natur versagt aber

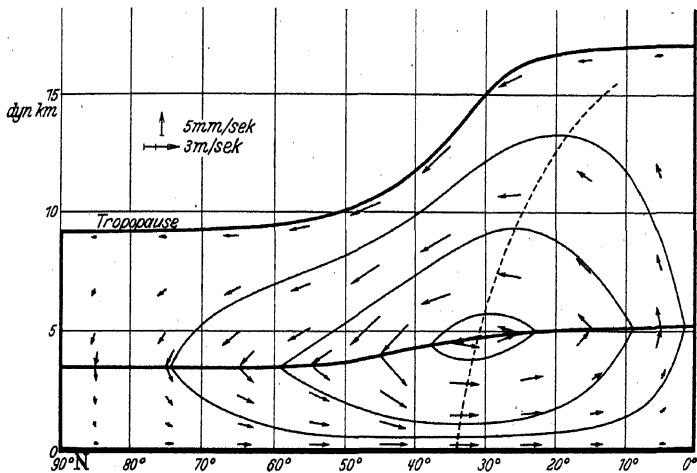



Abb. 121. Eine idealisierte Meridionalzirkulation (370fach überhöht).

auf höheren Breiten, wo unsere idealisierte Meridionalzirkulation durchwegs Absinken zeigt, während die Wirklichkeit ein komplizierteres Bild liefert (s. Abschnitt **173**). Die Windgeschwindigkeiten in unserer idealisierten Meridionalzirkulation sind auffallend klein, indem sie nirgends 2,5 m/sec überschreiten. Im Winter, wenn das polare Defizit an Strahlungswärme sein Maximum hat, würden sich etwas größere, im Sommer etwas kleinere Windgeschwindigkeiten ergeben. Auf der Südhalbkugel, wo das polare Defizit an Strahlungswärme kleiner als auf der Nordhalbkugel ist (s. Abschnitt **170** *D*), würde die Meridionalzirkulation im Mittel etwas langsamer als im berechneten Beispiel laufen[1].

[1] Dieses Resultat kann ebensogut folgendermaßen formuliert werden: es ist in der Antarktis kälter als in der Arktis wegen des geringeren meridionalen Wärmetransportes auf der Südhalbkugel. Dies ist die schon von SIMPSON gegebene Er-

Wie bei allen anderen thermisch gebundenen Vertikalzirkulationen ist die *Umlaufsgeschwindigkeit der Meridionalzirkulation stabil.* Läuft die Meridionalzirkulation nämlich schneller als für den stationären Betrieb nötig, dann wird sie zuviel Wärme transportieren, und die Temperaturgegensätze Pol—Äquator nehmen ab. Läuft sie dagegen langsamer, so transportiert sie zu wenig Wärme, und die Temperaturgegensätze Pol—Äquator nehmen zu.

Die thermische Kontrolle der Zirkulationsgeschwindigkeit ist, wie schon in Abschnitt **53** hervorgehoben, durch die thermische Stabilität des zirkulierenden Mediums bedingt; z. B. könnten in einer vollständig trockenen und genau adiabatisch geschichteten Troposphäre überhaupt keine meridionalen Wärmetransporte nach dem Schema der Abb. 121 stattfinden, und die vertikale Meridionalzirkulation könnte unendlich schnell laufen, ohne daß die Überschußwärme der niedrigen Breiten polwärts abtransportiert würde. Dieser hypothetische Zustand könnte aber nicht lange bestehen, denn eine schnell laufende meridionale Vertikalzirkulation würde durch die Advektion polarer Luft in der unteren und äquatorialer Luft in der oberen Troposphäre die Temperatur unten zum Fallen und oben zum Steigen bringen, wodurch die ursprünglich adiabatisch geschichtete Troposphäre unteradiabatisch geschichtet würde. *Die meridionale Vertikalzirkulation erklärt also* — wie wohl zuerst durch VON BEZOLD hervorgehoben —, *warum die ganze Troposphäre im Mittel unteradiabatisch geschichtet ist.* Tatsächlich wirkt diese Stabilisierung so stark, daß mehr als die Hälfte der Troposphäre auch in bezug auf feuchtadiabatische Prozesse stabil geschichtet ist.

Mit Hilfe des Theorems über die bei einem Kreisprozeß geleistete Arbeit (Abschnitt **51**) können wir abschätzen, wieviel Arbeit die in Abb. 121 dargestellte Meridionalzirkulation pro Sekunde durch den Umlauf um die zonal orientierten Solenoide gewinnt. Wir wollen auf die Einzelheiten der Rechnung nicht eingehen, sondern begnügen uns damit, das Resultat mitzuteilen, daß die Atmosphäre jeder Erdhalbkugel $1{,}6 \cdot 10^{11}$ Kilojoule pro Sekunde an mechanischer Arbeit gewinnt. Diese Arbeitsleistung wird nicht zur Vergrößerung der kinetischen Energie der arbeitenden Substanz verwendet, denn die Meridional-

klärung der großen Kälte in der Antarktis. Am ausgeprägtesten ist der Unterschied zwischen antarktischen und arktischen Sommertemperaturen, denn zu dieser Jahreszeit ist die Arktis zum großen Teil durch schneefreie erwärmte Landflächen umgeben, während die Antarktis auch im Sommer durch einen breiten Meeresgürtel von etwa 0° C eingekreist ist. — Schon die mittleren Luftdruckkarten (Abb. 105 bis 108) legen die Vermutung nahe, daß auf der Nordhalbkugel die meridionalen Wärmetransporte stärker als auf der Südhalbkugel seien. Die Luftströmungen um die geschlossenen Tief- und Hochdruckgebiete der Nordhalbkugel bringen nämlich mehr Luftaustausch in meridionaler Richtung hervor als die annähernd zonalen Luftströmungen der Südhalbkugel.

zirkulation ist ja voraussetzungsgemäß von Jahr zu Jahr unveränderlich. Die Arbeitsleistung der Meridionalzirkulation kann also nur zur Überwindung der Reibung dienen, und zwar ist sie auch die einzige zu diesem Zweck verfügbare Energiequelle der Atmosphäre, denn durch die evtl. gleichzeitig vorhandene Zonalzirkulation, die keine Solenoide umkreist, wird keine Wärme in Arbeit umgesetzt.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Reibungswärme $1{,}6 \cdot 10^{11}$ Kilojoule pro Sekunde gleichmäßig über die ganze Erdhalbkugel verteilt wird, und daß sie ursprünglich von der Zone des Wärmeüberschusses 0—40° Breite gekommen sein muß, so haben wir den folgenden polwärts gerichteten Transport von Energiemengen, die schließlich in Reibungswärme umgesetzt werden:

Breite φ = . . .	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
10^9 Kilojoule/sec	15	30	44	56	37	21	10	2

Dieser Energietransport ist nur etwa $^1/_{50}$ des gesamten meridionalen Wärmetransportes, wie ein Vergleich mit der Tabelle S. 669 unten zeigt.

Der Energieverbrauch der Reibung der ganzen hier betrachteten Erdatmosphäre, $3{,}2 \cdot 10^{11}$ Kilojoule pro Sekunde, beträgt nur etwa 0,2% der an der oberen Atmosphärengrenze empfangenen Sonnenenergie $1{,}8 \cdot 10^{14}$ Kilojoule pro Sekunde.

Abb. 122. Schema mehrerer Horizontalzirkulationen zwischen den Tropen und dem Polargebiet (frei nach EXNER: Dynamische Meteorologie. 2. Aufl. 1925).

Die in diesem Abschnitt behandelte Meridionalzirkulation und der aus ihr abgeleitete Reibungsenergieverbrauch der Atmosphäre sind nicht ohne weiteres auf die wirklichen Verhältnisse anwendbar, denn wir haben ein Bewegungsfeld vorausgesetzt, das nicht das einzige mögliche ist, und das tatsächlich in der Natur nie in reiner Form realisiert ist. Wenn es nur darauf ankäme, ein Bewegungssystem zu finden, das den nötigen meridionalen Wärmetransport besorgt, hätten wir auch z. B. das in Abb. 122 schematisch dargestellte horizontale Strömungssystem verwenden können. Ein jedes an solchen Horizontalzirkulationen teilnehmendes Luftindividuum nimmt, während es sich im äquatornahen Teil seiner Bahn befindet, Wärme auf und gibt im polnahen Bahnstück Wärme ab, so daß ein Wärmestrom gegen den

Pol resultiert. Dieser horizontalmeridionale Wärmetransport[1] findet ständig in der Erdatmosphäre statt, so daß der für die vertikale Meridionalzirkulation übrigbleibende Wärmetransport kleiner als in den obigen Überschlagsrechnungen ausfallen dürfte.

Andererseits kann aber keine rein horizontale Meridionalzirkulation allein bestehen bleiben, denn die horizontal zirkulierenden Teilchen umkreisen fast keine Solenoide, und fast keine Wärmeenergie wird zur Aufrechterhaltung der Bewegung verfügbar. Die arbeitsleistende vertikale Meridionalzirkulation muß also in irgendeiner mehr oder weniger maskierten Weise in den jeweilig vorkommenden Zirkulationssystemen enthalten sein, obwohl wahrscheinlich der vertikalmeridionale Umlauf etwas langsamer, als in diesem Abschnitt ausgerechnet, verläuft.

172. Überlagerung von Meridional- und Zonalzirkulation. Die im vorigen Abschnitt ausgerechnete Zirkulation in Meridionalebenen könnte auf ruhender Erde in reiner Form auftreten[2]. Die Atmosphäre der rotierenden Erde hat aber eine zusammengesetzt zonal-meridionale Zirkulation, deren Haupteigenschaften hier schrittweise abgeleitet werden sollen. Dabei werden wir in diesem Abschnitt als Vorbereitung nur die rein kinematische Operation der Überlagerung der im vorigen Abschnitt ausgerechneten idealisierten Meridionalzirkulation auf eine reine Zonalzirkulation (Abb. 114 oder 115) in qualitativer Weise durchführen. Ein dynamisch mögliches Bewegungssystem wird dies allerdings noch nicht liefern, wie wir bald sehen werden.

Das Resultat der Überlagerung ist in Abb. 123 schematisch dargestellt. Der oberste Teil der Abbildung enthält zwei um den Pol symmetrische *Stromlinien*systeme, ein gestricheltes, das für eine Niveaufläche in der unteren Troposphäre gilt, und ein voll ausgezogenes, das für irgendeine Niveaufläche in der oberen Troposphäre gilt (der Einfachheit halber nur durch eine einzige Stromlinie vertreten). Unten divergieren die Stromlinien spiralenförmig vom Pol, oben konvergieren sie spiralenförmig gegen den Pol. Der stetige Übergang von den divergenten zu den konvergenten Spiralen vollzieht sich in einem gewissen mittleren Niveau, wo die Stromlinien konzentrische Kreise bilden. An der Grenze zwischen Ostwind- und Westwindgürteln ändern die Strom-

[1] Näheres hierüber in DEFANT: „Statik und Dynamik der Atmosphäre", S. 74 im Handbuch der Experimentalphysik (Leipzig 1928), wo über die Resultate der durch DEFANT, EXNER und ÅNGSTRÖM gemachten Anwendungen der SCHMIDTschen „Austauschtheorie" auf die horizontalmeridionalen Wärmetransporte der Atmosphäre berichtet wird.

[2] Die zonale Wärmeverteilung müßte in diesem Falle durch die Strahlung einer die Erde umkreisenden Sonne geschaffen und aufrechterhalten werden.

linienspiralen ihren Rotationssinn, und zwar unten etwa bei 60 und 30° Breite, während oben die Umkehr bei 60° Breite fehlt.

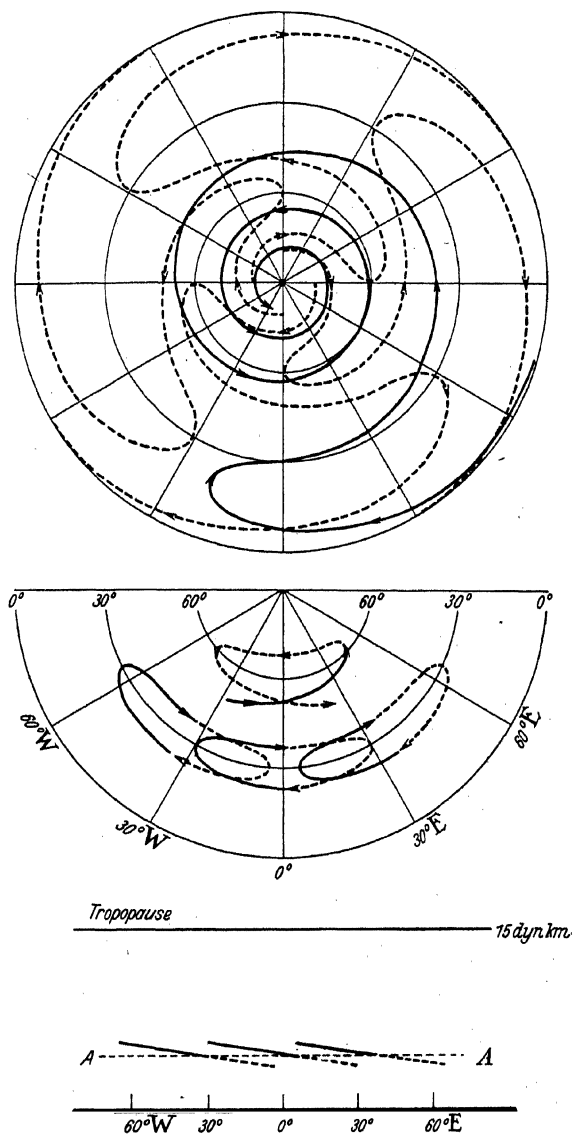



Abb. 123. Überlagerung von Meridional- und Zonalzirkulation, mit Beispielen von Bahnen individueller Luftteilchen in Horizontal- und Zonalprojektion (Zonalprojektion 370 fach überhöht).

Weiter unten in der Abb. 123 sind einige *Bahnen* individueller Luftteilchen dargestellt, sowohl in ihrer Projektion auf die Erdoberfläche als in Projektion auf eine zonale Vertikalfläche. Obgleich es sich hier um eine stationäre Bewegung handelt, wo die räumlichen Stromlinien und die räumlichen Bahnen zusammenfallen, sind natürlich die zweidimensionalen Stromlinien in einer Ebene nicht identisch mit den Projektionen der dreidimensionalen Bahnen auf dieselbe Ebene. Die Abb. 123 bringt drei untereinander kongruente Bahnen von Luftteilchen in der Nähe der Achse der troposphärischen Luftwalze bei 30° Breite zur Darstellung. Solche Teilchen befinden sich im tropischen Ostwindgürtel, während sie steigen, und im gemäßigten Westwindgürtel, während sie wieder absinken. Die Bahnen werden ellipsenähnliche Kurven, die in zonaler Richtung in solcher Weise geneigt sind, daß das Westende der Kurve am höchsten und das Ostende am tiefsten liegt[1]. Die Osthälften der Bahnkurven, die der unteren Troposphäre angehören, sind in gleicher Weise wie die Stromlinien der unteren Troposphäre gestrichelt gezeichnet. Die *zonale Neigung der Bahnkurven* ist gleich v_z/v_x, wo v_z die Vertikal- und v_x die Zonalgeschwindigkeit der Teilchen bedeuten. Da die in der Tabelle S. 672 unten ausgerechneten Werte für v_z nur einige mm/sec betragen, während v_x bis zu 30 m/sec anwachsen kann, ergeben sich immer sehr kleine Werte der Zonalneigung v_z/v_x. Der Höchstwert von v_z/v_x ist etwa im Niveau der Achse *AA* der troposphärischen Luftwalze zu suchen und scheint etwa $^1/_{3000}$ zu betragen. Die dargestellten Bahnkurven mit der willkürlich gewählten Zonalerstreckung von 60 Längengraden sind im Zonalschnitt mit dieser Maximalneigung von $^1/_{3000}$ eingezeichnet und liegen dann im Westen etwa 1 km oberhalb, im Osten etwa 1 km unterhalb der Achse der troposphärischen Luftwalze. Wählt man Teilchen weiter von der Achse *AA* entfernt, so bekommen die entsprechenden Bahnkurven immer größere Zonalerstreckung und können schließlich beliebig viele Erdumläufe weit reichen. Diese langgestreckten Bahnen schmiegen sich an die untere und obere Grenzfläche der Troposphäre an, denn ihre Zonalneigung v_z/v_x nimmt dort gegen Null ab.

Gleichzeitig mit der Vergrößerung der Zonalachse wächst auch die Meridionalachse der ellipsenähnlichen Bahnkurven, allerdings in viel langsamerer Progression. Die Äquatorialseite der Bahnkurven nähert sich immer mehr dem Äquator, und die Polarseite nähert sich der polaren Zone, wo unten Ostwind herrscht. Die dorthin reichenden Bahnen komplizieren sich und bilden je eine zyklonisch durchlaufene

[1] Es wird hier zur Vereinfachung der Darstellung angenommen, daß die Teilchenbahnen nach einem Umlauf in sich zurücklaufen, was in Wirklichkeit nicht der Fall zu sein braucht.

Schleife von der in der Abb. 123 dargestellten Art, die von den Teilchen während des Absteigens beschrieben werden.

Die hier beschriebene, zusammengesetzt zonal-meridionale Zirkulation ist allerdings kinematisch sehr wohl vorstellbar, aber als stationäre Strömung ist sie dynamisch ebenso unmöglich, wie die reine Meridionalzirkulation, denn es ist kein Druckfeld denkbar, dessen Gradientwind solche spiralförmigen Stromliniensysteme wie die der Abb. 123 liefern könnte. Die zusammengesetzte zonal-meridionale Zirkulation muß also in solcher Weise modifiziert werden, daß sie überall als annähernde Gradientwindströmung eines möglichen Druckfeldes auftritt. Dies kann nur durch irgendeine zellulare Aufteilung der Strömung geschehen.

173. Theorie der allgemeinen troposphärischen Zonal- und Meridionalzirkulation auf einer Erde von gleichmäßiger Oberflächenbeschaffenheit. Wir setzen voraus, daß die Mehrzahl aller Luftteilchen der Troposphäre in solcher Weise zirkuliert, daß sie Wärme in Arbeit umsetzen, die wiederum zur Überwindung des Reibungswiderstandes dient. Die Teilchen müssen also die zonal orientierten isobar-isosteren Solenoide in derselben Umlaufsrichtung umkreisen wie schon für die idealisierte Meridionalzirkulation abgeleitet (Abb. 121). Dabei bleibt es gleichgültig, ob die Teilchen so wie in dem Bewegungsfeld, das aus der Überlagerung von Zonal- und Meridionalzirkulation entstand, auch in zonaler Richtung lange Strecken bewegt werden, denn die Umkreisung der zonalen Solenoide hängt nur von der Meridionalprojektion der räumlichen Bahnen ab.

Die Abb. 124 in Verbindung mit der Abb. 125 zeigt ein schematisches Bewegungsfeld, das die Mehrzahl der Teilchen in arbeitserzeugendem Sinn um die zonalen Solenoide laufen läßt, wobei gleichzeitig der Wind überall als annähernder Gradientwind eines möglichen Druckfeldes auftritt. Wir schicken eine Beschreibung dieses Bewegungsfeldes und des entsprechenden Druckfeldes voraus und fügen nachher die empirischen Tatsachen hinzu, die es wahrscheinlich machen, daß das Bewegungsfeld der Abb. 124 in der Natur als Grundzustand vorhanden ist.

Wir betrachten zuerst den „Zonalschnitt 30° N“ (Abb. 124 oberste Reihe rechts), in dem die vorläufig als stationär angesehene Zellenaufteilung der Strömung und die Anordnung der in zonaler Richtung geneigten Teilchenbahnen innerhalb der Zellen veranschaulicht sind. Der Sinn der zonalen Neigung ergibt sich genau wie in der Abb. 123: die Teilchen steigen, während sie sich im tropischen Oststrom befinden, und sinken im Weststrom nördlich von 30° N wieder ab, so daß die antizyklonisch durchlaufenen Bahnen im Westen höher als im Osten liegen müssen.

Die zonale Neigung der Bahnellipsen ist wahrscheinlich von der Größenordnung $^1/_{10000}$, die sich bei der kinematischen Überlagerung von reiner Meridional- und reiner Zonalzirkulation ergab. Mit der in Abb. 124 willkürlich gewählten Zonaldimension der Zellen von 90 Längen-

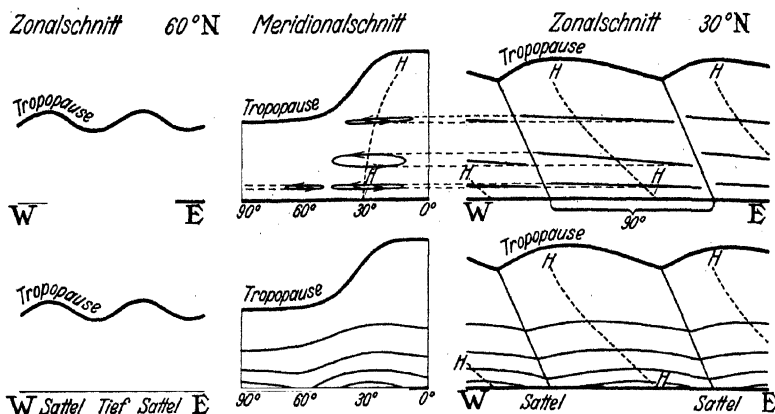



Abb. 124. Schema der allgemeinen troposphärischen Zirkulation.
Obere Reihe: Bahnen. *Untere Reihe:* Isobaren. Überhöhung 370fach, für die Isobaren jedoch noch größer.

graden kommen also Vertikalamplituden der Teilchen von der Größenordnung 1 km vor. Die Bahnen sind am steilsten ungefähr in der Höhenlage 5 km, während nach oben und nach unten die Neigung der Bahnen auf Null abnimmt. Die Tropopause, welche die Zellen nach oben begrenzt, muß eine solche Form haben, daß die in horizontalen Ellipsen herumlaufenden obersten Tropopauseteilchen tangential zur Tropopause strömen. Wahrscheinlich wird dies in der Weise verwirklicht, daß sich die Tropopause, so wie in dem Zonalschnitt dargestellt, über einer jeden Zelle wölbt und an der Grenze benachbarter Zellen scharfe Furchen aufweist.

Abb. 125. Schematisches Druckfeld im Meeresniveau der in Abb. 124 dargestellten allgemeinen Zirkulation. Gestrichelte Linien: Schnittlinien der Zellenwände mit dem Erdboden.

Die Grenzflächen zwischen den Zellen sind thermische Diskontinuitätsflächen mit zyklonischem Gleitwirbel, und ihre Neigung ist durch die MARGULESsche Formel **128** (11) festgelegt. Die Zellenwände sind im Zonalschnitt mit einer zonalen Neigung von $^1/_{200}$ eingezeichnet, äquatorwärts von 30° werden sie allmählich noch bedeutend flacher.

In der Abb. 124 (untere Reihe rechts) ist fernerhin auch der Zonalschnitt des zu der zellularen Strömung gehörigen Druckfeldes ein-

gezeichnet. Dort, wo Südwind weht, müssen die isobaren Flächen ein westwärts gerichtetes Gefälle haben, und dort, wo Nordwind vorhanden ist, muß das Gefälle der isobaren Flächen ostwärts gerichtet sein. Die eingezeichneten Isobaren im Zonalschnitt genügen dieser Bedingung, sie wölben sich innerhalb jeder Zelle auf und bilden scharfe Tiefdruckfurchen beim Durchtritt durch die Diskontinuitätsflächen zwischen den benachbarten Zellen.

Dasselbe Druckfeld im Meeresniveau ist in der Abb. 125 in Polarprojektion dargestellt. Zu jeder Zelle gehört eine zonal in die Länge gezogene Antizyklone, deren Zentrum auf etwa 30° Breite liegt. Diese Antizyklonen bilden zusammen den *subtropischen Hochdruckgürtel.* Die Schnittlinien der Zellenwände mit dem Erdboden (gestrichelte Linien) verlaufen SW—NE (auf der Südhalbkugel NW—SE) durch die Sattelpunkte des Hochdruckgürtels.

Es ist eine notwendige Folge der oben beschriebenen Luftbewegung innerhalb der Zellen, daß unterhalb des Niveaus der maximalen Vertikalkomponenten horizontale Divergenz auf der Nordseite und horizontale Konvergenz auf der Südseite des Hochs stattfinden muß. Dies ist wiederum gleichbedeutend mit dem Vorhandensein einer normal zu den Isobaren nach außen gerichteten Komponente ($v_n > 0$) des Windes auf der Nordseite und einer nach innen gerichteten Windkomponente ($v_n < 0$) auf der Südseite des Hochs. Die Windkomponente v_n muß sehr klein sein, wahrscheinlich von der Größenordnung 10^{-2} bis 10^{-1} m/sec, und kann also kaum überhaupt durch Beobachtungen festgestellt werden, aber nichtsdestoweniger hat sie große dynamische Konsequenzen. Das Vorhandensein einer Windkomponente v_n normal zu den Isobaren ist nämlich gleichbedeutend mit einer Beschleunigung j_l tangential zu den Isobaren. Die Bewegungsgleichung für eine parallel zu den Isobaren gelegte Achse reduziert sich nämlich auf:

$$j_l = 2\Omega_z v_n \tag{1}$$

(von der Reibung wird vorläufig abgesehen). Die positive Richtung längs der Isobare ist in Gleichung (1) die vom Gradientwinde angezeigte, und es besteht also *auf der Nordseite des Hochs eine Beschleunigungskomponente in Richtung des Gradientwindes und auf der Südseite eine Beschleunigungskomponente gegen den Gradientwind.*

Da die Bewegung voraussetzungsgemäß stationär ist, gilt auch:

$$j_l = v_l \frac{\partial v_l}{\partial l} + v_n \frac{\partial v_l}{\partial n} + v_z \frac{\partial v_l}{\partial z}, \tag{2}$$

wo die Ableitungen nach l bzw. n in Richtung tangential bzw. normal zu den Isobaren auszuführen sind. Unter den drei Gliedern rechts überwiegt aller Wahrscheinlichkeit nach das erste, und es muß also $v_l \frac{\partial v_l}{\partial l}$ vom

selben Vorzeichen wie j_l sein, d. h. positiv auf der Nordseite und negativ auf der Südseite des Hochs. Die Teilchen müssen also auf der Nordseite des Hochs von einem Geschwindigkeitsminimum nach einem Geschwindigkeitsmaximum und auf der Südseite von einem Geschwindigkeitsmaximum nach einem Geschwindigkeitsminimum sich bewegen. Folglich durchlaufen die Teilchen ein Geschwindigkeitsminimum am Westende und ein Geschwindigkeitsmaximum am Ostende ihrer Bahnen. Da der Wind überall annähernd ein Gradientwind ist, müssen also am Westende des Hochs die Isobaren weiter auseinander liegen als am Ostende desselben, oder mit anderen Worten *der Hochdruckkern liegt östlich von der Mitte der Hochdruckzelle,* so wie in der Abb. 125 angegeben.

In ganz ähnlicher Weise läßt sich ableiten, daß oberhalb des Niveaus der maximalen Vertikalkomponenten der Hochdruckkern westlich der Zellenmitte liegen muß, damit die kinematisch erforderliche horizontale Konvergenz auf der Nordseite und die horizontale Divergenz auf der Südseite des Hochs sich ergeben. Die Achse des Hochdrucks verläuft also in Zonalprojektion etwa so wie in Abb. 124 mittels der Linie HH dargestellt.

Die bisher unberücksichtigte Reibungsschicht in Erdbodennähe hat in allen Hochdruckgebieten eine nach außen gerichtete Windkomponente normal zu den Isobaren (vgl. S. 648) und damit auch eine horizontale Divergenz aufzuweisen. Die in dieser Weise ausströmende Luft muß durch Absinken ersetzt werden, und es überlagert sich deshalb ein langsames Absinken auf die ganze bisher betrachtete positive und negative Vertikalbewegung. Die Teilchenbahnen in Meridionalprojektion bilden dann nicht festliegende Ellipsen wie in der Abb. 124, sondern trochoidale Schleifen, längs denen die Teilchen sich allmählich dem Erdboden nähern. Die quantitative Theorie der Arbeitserzeugung wird in diesem Fall komplizierter als zuvor, da die Bahnen in der Meridionalprojektion nicht mehr geschlossen sind, aber es besteht kein Zweifel, daß die Teilchen, auch wenn sie in den trochoidalen Schleifen laufen, einen Arbeitsgewinn herausholen.

Indem wir jetzt zu den *empirischen Bestätigungen* übergehen, wollen wir als die wichtigste hervorheben, daß alle stationären Hochdruckzellen der Subtropen auf jeden Fall am Erdboden die theoretisch zu erwartende asymmetrische Lage des Hochdruckkerns aufweisen. Beispielsweise hat die nordpazifische Hochdruckzelle im Sommer (Abb. 131) ihren Ostabschluß auf 120° W und ihren Westabschluß auf rund 130° E, so daß die Zellenmitte sich bei etwa 175° W befindet. Der Hochdruckkern liegt aber auf 150° W, d. h. etwa 80° vom Westende und nur 30° vom Ostende der Zelle. Um dieselbe Zeit reicht die nordatlantische Hochdruckzelle von der afrikanischen Westküste bei 10° W bis zur cali-

fornischen Küste bei 120° W. Die Zellenmitte ist also bei 65° W, aber der Hochdruckkern lagert wiederum östlicher, und zwar bei 40° W. Weitere Bestätigungen findet man im Winter im Nordpazifik, während das Azorenhoch im Winter auf den Mittelkarten für eine Prüfung zu wenig ausgeprägt (wahrscheinlich zu wenig stationär) ist. Alle deutlichen Hochdruckkerne des Subtropengürtels der Südhalbkugel scheinen auch gemäß den Mittelwertskarten (Abb. 105 und 106) östlich der respektiven Zellenmitten zu liegen, so wie es die Theorie fordert[1]. Eine vollständige Bestätigung der umgekehrten Asymmetrie der Subtropenhochs in der oberen Troposphäre läßt sich beim jetzigen Stande der Aerologie nicht liefern. Sind aber die extrapolierten Subtropenhochs auf den Karten von SHAW in 8 km Höhe (Abb. 109 D) auch nur annähernd korrekt, so sind die Hochdruckkerne tatsächlich in der oberen Troposphäre nahe dem Westende der Hochdruckzellen gelegen.

Direkte aerologische Belege für das beschriebene Bewegungsfeld hat man nur von einem Teil des Nordatlantik westlich der afrikanischen Küste (hauptsächlich Sommeraufstiege), aber dort ist gerade ein sehr interessanter Teil des Feldes an der gegenseitigen Grenze zweier Hochdruckzellen — das Azorenhoch im Westen und das superafrikanische Hoch im Osten — zum Vorschein gekommen (s. Abb. 109 A). Die geneigte quasistationäre Zellenwand zwischen diesen beiden Hochs bildet die schon lange bekannte Trennungsfläche zwischen NE-Passat und SW-Antipassat, die, im Nullniveau an der Westküste der Sahara anfangend, westwärts und nordwärts ansteigt[2]. Eine ähnliche nach Westen und nach Norden ansteigende Trennungsfläche zwischen Passat und Antipassat muß am Ostabschluß der nordpazifischen Hochdruckzelle an der californisch-mexikanischen Küste bestehen. Diese ist aber bisher noch nicht aerologisch erforscht.

Die in Westindien auf etwa 15° N im Winter ausgeführten aerologischen Aufstiege[3] zeigen bis etwa 8 km Höhe Ostwinde, die durch eine windschwache Zone von den darüber vorhandenen mit der Höhe zunehmenden Westwinden getrennt ist. Es ist dies nur eine Folge der mit der Höhe stattfindenden Äquatorwärtsverlegung des subtropischen

[1] Wie ersichtlich, besteht ein Sattelpunkt mitten im Süd-Pazifik, weil der betreffende Ozean zu breit für eine einzige Hochdruckzelle ist. Diese Erscheinung beweist die dynamische Notwendigkeit einer Zellenaufteilung auch auf einer Erde gleichmäßiger Oberfläche.

[2] Die vollständigste Darstellung derselben bringt H. U. SVERDRUP in: „Der Nordatlantische Passat.“ Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig, Bd. II, H. 1, 1917. Die sog. Mischungsschicht, die wohl eher eine Subzidenzschicht ist (vgl. **181**), gehört zur Passatströmung und damit zur westlichen Hochdruckzelle.

[3] HERGESELL: „Passatstudien in Westindien.“ Beiträge z. Phys. d. fr. Atm. Bd. IV, S. 153ff.

Hochdrucks und nicht ein Phänomen des Durchstoßens der Pilotballone von einer Hochdruckzelle in die andere. Die analoge Windverteilung mit der Höhe über Indien im Winter (Abb. 114) und über Samoa zu allen Jahreszeiten sind schon im Abschnitt **166** besprochen worden.

Indirekte Bestätigungen der im Westen gehobenen, im Osten gesenkten Teilchenbahnen in den subtropischen Hochdruckzellen liefert die Niederschlagsverteilung[1]. Im großen und ganzen ist der subtropische Hochdruckgürtel wüstenhaft trocken, jedoch mit Ausnahme des Westsaumes einer jeden ozeanischen Hochdruckzelle (beider Halbkugeln), wo ergiebige Schauerregen vorkommen. Die Luft im Westteil der ozeanischen Hochdruckzellen hat gemäß der Abb. 124 ein mehrtägiges langsames Aufsteigen hinter sich und ist somit für feuchtlabile Vertikalumwälzungen reif geworden (s. Abschnitt **175**).

Die hiermit gegebene Theorie der stationären subtropischen Hochdruckzellen gilt mit kleinen Modifikationen auch, wenn die Zellen beweglich sind. Denken wir uns eine west-östliche Translationskomponente zu der in Abb. 124 dargestellten Bewegung hinzuaddiert, so bewegen sich die Hochdruckzellen mit einer Geschwindigkeit gleich der Translationskomponente. Die Horizontalprojektionen der Teilchenbahnen werden statt Ellipsen trochoidale Kurven, aber in Meridionalprojektion beschreiben die Teilchen genau dieselben Bahnen wie zuvor. Für die Arbeitserzeugung ist es auch gleichgültig, ob die räumlichen Bahnen festliegende geneigte Ellipsen oder Schraubenlinien bilden, wenn nur die Schraubenwindungen dieselben zonalen Solenoidbündel wie die Ellipsen umschließen, und wenn der Umlaufssinn und die Umlaufsperiode der Teilchen beibehalten bleiben.

Die wandernden Hochs sind aber im allgemeinen nicht so einfach gebaut, wie hier vorausgesetzt, indem sie nicht ständig aus einer und derselben Luftmasse bestehen. Wie später (Abschnitt **181**) gezeigt wird, findet nämlich auf der Polarseite des wandernden Hochs, wo keine undurchdringliche Zellenwand vorhanden ist, eine Zufuhr kalter Luft statt, die den Luftbestand des Hochs ständig erneuert. Obwohl die wandernden Hochs somit kompliziertere Gebilde als die stationären sind, behalten sie aber sicher eine gewisse Ähnlichkeit mit jenen in bezug auf die räumliche Gestalt der Teilchenbahnen. In diese Richtung deutet auch die Gestaltung des Druckfeldes, die bei den wandernden Hochs recht oft dieselbe asymmetrische nach Osten verschobene Lage des Hochdruckkerns wie bei den stationären aufweist[2].

Es ist leicht, die Theorie der arbeitsleistenden stationären subtropischen Hochs auch auf die *stationären Tiefs* bei 60° Breite zu übertragen. Sollen auch diese arbeitsleistend sein, so müssen die zyklonisch

---

[1] Schon Sverdrup (l. c.) deutet dies an.

[2] Die vollständige Theorie dieses Falles muß auf **179** (3) bauen.

durchlaufenen Bahnellipsen im Osten gehoben und im Westen gesenkt sein, so wie in Abb. 124 links oben eingezeichnet, und der Tiefdruckkern muß weit östlich im Tiefdruckgebiet liegen. Die empirische Nachprüfung mit den mittleren Luftdruckkarten ist aber unmöglich, da diese nicht nur durch die stationären Tiefs, sondern auch durch die wandernden Zyklonen der Polarfront und der Arktikfront bestimmt sind. Die Frage bleibt also offen, ob die Teilchen in den stationären Tiefdruckgebieten auf 60° Breite die zonalen Solenoide in arbeitserzeugendem oder -verbrauchendem Sinn umkreisen. Wahrscheinlich kommt je nach der Wetterlage das eine oder das andere vor.

Die geschlossenen zyklonischen Bahnen um die Zentren bei 60° Breite sind nur ein Phänomen der unteren Troposphäre. Weiter oben laufen die Teilchen von W nach E um das Polartief herum, also im großen und ganzen parallel zu den zonalen Solenoiden, wobei keine Wärme in Arbeit umgesetzt wird. Ein Arbeitsgewinn kommt nur zustande, falls die Teilchen während des Ostwärtsströmens in Linksschraubenlinien um die zonalen Solenoide laufen. Ob diese Linksschraubenbahnen häufiger als die Rechtsschraubenbahnen sind, wissen wir nicht, und daher wissen wir auch nicht, welchen Anteil die oberen Troposphärenschichten auf hohen Breiten zu der Arbeitserzeugung der Atmosphäre liefern. Deutlich arbeitserzeugende Gebilde der hohen Breiten werden wir aber in den später zu besprechenden jungen Frontalzyklonen[1] vorfinden. Andererseits sind aber alle alternden und sterbenden Frontalzyklonen arbeitsverbrauchende Gebilde, die an ihrer früher erworbenen kinetischen Energie zehren.

Wie es dann auch mit der Gesamtarbeitsleistung der komplizierten Zirkulationen der hohen Breiten stehen mag, so sorgen doch die Zirkulationen in den subtropischen Hochs dafür, daß die Mehrzahl aller troposphärischen Teilchen positive Arbeit erzeugt. Dadurch ist schon die Aufrechterhaltung der allgemeinen troposphärischen Zirkulation gewährleistet.

Die historischen und zeitgenössischen Theorien der allgemeinen Zirkulation auf einer Erde gleichmäßiger Oberfläche sind so zahlreich, daß es viel zu weit führen würde, ihren Zusammenhang mit der hier gegebenen darzulegen. Eine Bemerkung allgemeiner Art ist jedoch am Platze.

Alle älteren und zum Teil auch neueren Theorien setzen, mehr oder weniger stillschweigend, ein und dasselbe Stromlinienbild in allen Meridionalebenen voraus. Wir können kein solches für unsere Theorie

[1] Diese Frontalzyklonen sind streng von den in diesem Abschnitte behandelten quasistationären Zyklonen — „Aktionszentren" in der Terminologie von Teisserenc de Bort — zu unterscheiden.

typisches Stromlinienbild geben, denn die Gestalt der Stromlinien wechselt von Meridionalebene zu Meridionalebene. Das mittlere Stromlinienbild aller Meridionalebenen würde eine wahrscheinlich recht komplizierte, aber ziemlich uninteressante Darstellung eines zweidimensionalen Windvektors mit einer von Null sehr wenig abweichenden Stärke liefern. Aus einem solchen mittleren Stromlinienbild für die Meridionalebenen würde man nicht herauslesen können, wie die Teilchenbahnen im Raume verlaufen, und damit würde der Anhaltspunkt einer jeden physikalisch begründeten Theorie fehlen.

Eine der bedenklichsten Folgen der in allen Meridionalebenen identisch gleichen Strömung zeigt sich in den Zonalgeschwindigkeiten von über 100 m/sec, die nach dem Flächensatz als Folge weitreichender Meridionalverschiebungen der Teilchen entstehen müßten. Dieses aus der Mechanik des isolierten Massenpunktes abgeleitete Resultat gilt nämlich auch für einen zonalen Ring von Luftteilchen, die sich alle mit gleich großer Meridionalkomponente bewegen. Wenn aber, wie wir annehmen, solche zonalen Ringe von Luftteilchen gleicher Meridionalbewegung nirgends auftreten, fallen auch die bedenklichen Folgen weg. Äquatorwärts geführte Luftteilchen werden allerdings von einer westwärts gerichteten ablenkenden Kraft der Erddrehung angegriffen, und dies gilt natürlich auch makroskopisch für eine größere Ansammlung solcher Teilchen. Wenn aber westlich dieser äquatorwärts strömenden Luft andere Luft polwärts strömt und folglich einer ostwärts gerichteten ablenkenden Kraft ausgesetzt ist, ergibt sich als Resultat nur, daß die beiden Luftströmungen sich gegeneinander stauen, bis der Hochdruck zwischen den beiden Luftströmungen so starke horizontale Druckgradienten entwickelt, daß die ablenkende Kraft der äquatorwärts und der polwärts strömenden Luft überall kompensiert ist.

Diese Überlegung ist an sich gar nicht neu[1], aber um so mehr muß es wundern, daß sie nicht längst alle Theorien der allgemeinen Zirkulation, die ein für alle Meridionalebenen identisches Stromlinienbild voraussetzen, als praktisch nutzlos beseitigt hat.

174. Geographisch bedingte Zirkulationen. In unserer weiteren Synthese der allgemeinen Zirkulation wollen wir die verschiedenartigen Einwirkungen der Kontinente und ihrer Gebirge auf die im vorigen Abschnitte abgeleitete, zusammengesetzt zonal-meridionale Zirkulation behandeln.

A. Die Stauzirkulationen. Alle Gebirgsketten, die nicht gerade parallel zur vorherrschenden Windrichtung orientiert sind, veranlassen in der auf S. 491 beschriebenen Art die Bildung von Horizontal-

[1] S. beispielsweise EXNER: Dynamische Meteorologie 1925, S. 216.

zirkulationen, die sich der durchgehenden Luftströmung überlagern. Der antizyklonischen Zirkulation auf der Luvseite und der zyklonischen Zirkulation auf der Leeseite entsprechen im Druckfelde ein Hochdruckkeil bzw. ein Tiefdrucktrog, welche beide stationär an das Gebirge gebunden sind. Die Stauwirkung der Gebirgsketten auf Strom- und Druckfeld sieht man am besten auf den Wetterkarten einzelner Tage, während unsere Mittelwertkarten kleinen Maßstabes die Erscheinung nur schwach zutage treten lassen.

Dagegen schließt man deutlich von den Mittelwertkarten des Luftdruckes auf die großzügige Stauwirkung der Gebirgsketten, die darin besteht, daß stabil geschichtete Luftmassen überhaupt auf das Überqueren der großen Hindernisse verzichten. An der Westseite von Südamerika z. B. biegt ein bedeutender Teil der aus Westen kommenden Luft nordwärts der chilenischen Küste entlang, um sich der tropischen Ostströmung anzuschließen, statt die Andenkette zu überqueren. Westlich von Nordamerika zweigt in analoger Weise ein bedeutender Teil des Weststromes südostwärts der californischen Küste entlang ab, anstatt die Rocky Mountains zu überqueren. Im mittleren Luftdruckfeld kommt dies dadurch zum Vorschein, daß ein Druckgefälle vom Pazifischen Ozean gegen die amerikanischen Gebirgsketten hin entsteht, mit anderen Worten, daß der subtropische Hochdruckgürtel bei der meridional verlaufenden Gebirgskette eine „schwache Stelle" und irgendwo im Pazifischen Ozean eine entsprechende „starke Stelle" aufweist. In der Tat ist der Pazifische Ozean westlich der amerikanischen Küste eine in allen Jahreszeiten bevorzugte Stelle für das Liegenbleiben der sonst beweglichen subtropischen Antizyklonenzellen. Diese sich an das Gebirge anlehnenden quasipermanenten Antizyklonenzellen lassen sich nur durch große Störungen, von denen im Abschnitt **181** die Rede sein wird, aus ihrer stabilen Stellung vertreiben.

B. Die Monsunzirkulationen. Die Zirkulationen *thermischen* Ursprunges zwischen Ozeanen und Kontinenten wollen wir unter dem Namen *Monsunzirkulation* zusammenfassen.

Bei der Besprechung des mittleren Temperaturfeldes (**163**) wurde schon darauf aufmerksam gemacht, daß die Land- und Seeverteilung bedeutende Störungen in den zonalen Verlauf der Isothermen hineinbringt. Im Sommerhalbjahr ist die Luft über den Kontinenten wärmer als über den Ozeanen auf gleicher Breite. Im Verhältnis zu den isobaren Flächen liegen also die isosteren Flächen im Sommer über dem Land tiefer als über dem Meere, sie schneiden die Isobarflächen und bilden mit ihnen ein Solenoidsystem (Abb. 126), das an den Küsten entlang läuft und eine Zirkulation erzeugt, die in den unteren Schichten landeinwärts und in den höheren Schichten seewärts gerichtet ist. Im

Winter werden die Verhältnisse umgekehrt (außer in den Tropen, wo die Landflächen das ganze Jahr wärmer als die Meeresoberflächen bleiben), die isosteren Flächen liegen relativ zu den Isobaren über Land höher als über See und erzeugen mit den Isobarenflächen das entgegengesetzte Solenoidsystem, woraus eine Zirkulation in den unteren Schichten seewärts, in den höheren Schichten landeinwärts erfolgt.

Dieser durch die Temperaturverteilung primär erzeugten Zirkulation überlagert sich die durch die Erddrehung bedingte seitliche Geschwindigkeitskomponente, die im Sommerhalbjahr eine zyklonische, im Winterhalbjahr eine antizyklonische Zirkulation um die Kontinente auszubilden strebt. Die wichtigste dieser sog. Monsunzirkulationen ist die durch den eurasiatischen Kontinent erzeugte, deren störender Eingriff in das zonale Druckfeld und das zonale Windfeld schon besprochen worden ist (Abschnitte **164** und **166**). Die anderen kleineren Kontinente haben auch Monsunsysteme, die sich der allgemeinen Zonalzirkulation überlagern und sich dabei je nach ihrer Stärke mehr oder weniger durchzusetzen vermögen.

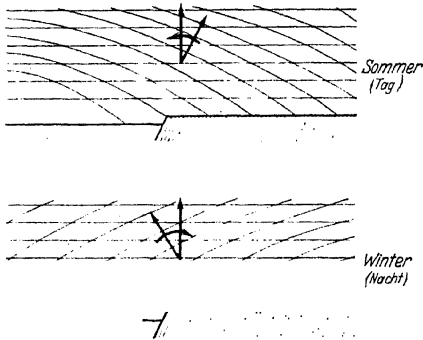



Abb. 126. Schematisches Solenoidfeld der Monsunzirkulationen (vgl. Abb. 13 A, S. 137).

Die wichtigsten Eingriffe der Monsunzirkulationen in die kombiniert zonal-meridionale Zirkulation sind folgende:

Im Zyklonengürtel der Nordhalbkugel, a) Winterhalbjahr: Liegenbleiben der quasipermanenten Zyklonen über den warmen Ozeanen bei Island bzw. Aleuten, b) Sommerhalbjahr: Zeitweises Verschwinden des Tiefdruckgürtels in Nordeuropa und Nordasien.

Im Hochdruckgürtel der nördlichen Subtropen, a) Winterhalbjahr: Maskierung des wahren subtropischen Hochdruckgürtels im asiatischen Sektor durch das sibirische Monsunhoch, ähnlicher Effekt in kleinerem Maßstabe über Nordamerika, b) Sommerhalbjahr: Liegenbleiben einer Antizyklonenzelle über dem Atlantik (Azorenhoch), Unterbrechung des subtropischen Hochdruckgürtels im asiatischen Sektor durch das indische Monsuntief, Erweiterung des pazifischen Hochs bis nach Ostasien.

Im Hochdruckgürtel der südlichen Subtropen, a) Winterhalbjahr: Unbedeutende Verstärkungen des Hochdruckgürtels über Südamerika, Südafrika und Australien, b) Sommerhalbjahr: Schwächung des Hochdruckgürtels durch die Monsuntiefs über denselben Kontinenten.

Im Zyklonengürtel der Südhalbkugel zu allen Jahreszeiten: Keine größeren Störungen des regelmäßigen Ostwärtswanderns der quasipermanenten Zyklonen. Jedoch zeitweises Liegenbleiben von solchen Zyklonen in den Einbuchtungen der Antarktis (hauptsächlich Roßmeer).

Im ganzen verursachen die Monsunsysteme der Südhalbkugel nur schwache Modifikationen im zonalen mittleren Luftdruckfeld, die der Nordhalbkugel aber eingreifende Modifikationen desselben. Wie schon in den Abschnitten **164** und **166** gezeigt wurde, beschränken sich aber selbst die stärksten Monsunsysteme, so wie das asiatische, hauptsächlich auf die untere Hälfte der Troposphäre, so daß in der oberen wiederum annähernd zonale mittlere Druckverteilung herrscht.

Das Solenoidsystem längs den Küsten hat außer der jährlichen Periode, die zur Monsunbildung führt, auch eine 24stündige Periode, die zu dem Phänomen der *See- und Landbrisenzirkulation* führt. Um die 24stündige Periode in reiner Form zu bekommen, muß man sie an einer Küste studieren, wo kein durchgehender Wind weht. Fernerhin muß man auch die Jahreszeit wählen, wo Land und See im Mittel die gleiche Temperatur haben, so daß kein permanentes Küstensolenoidsystem besteht. Unter diesen vereinfachenden Voraussetzungen führt die große tägliche Temperaturamplitude über Land zusammen mit der viel kleineren über See zur Bildung eines Küstensolenoidsystems (Abb. 126), das regelmäßig alle 12 Stunden sein Vorzeichen wechselt. Tagsüber ist die Luft über Land wärmer als die Luft über See, das Solenoidsystem wird dasselbe wie das des Sommermonsuns, und die einsetzende Zirkulationsbewegung ergibt unten eine *Seebrise* mit entsprechender Kompensationsströmung in der Höhe. Nachts ist die Luft über See wärmer als über Land, das Solenoidsystem wird analog dem des Wintermonsuns, und die einsetzende Zirkulationsbewegung ergibt unten eine *Landbrise* mit entsprechender Kompensationsströmung in der Höhe.

Ein Beispiel dieser primär erzeugten Zirkulation in Vertikalebenen senkrecht zur Küstenrichtung ist in der Tabelle S. 690 zahlenmäßig auf der Grundlage eines vorgegebenen, der Einfachheit halber konstanten, Solenoidsystems ausgerechnet. Nach Belieben kann die Tabelle für eine Seebrise oder eine Landbrise gelten. Die Kurve, deren Zirkulation berechnet worden ist, besteht aus einer Vertikalen über dem Land und einer über der See, beide von der 100 cbar-Isobare zur 90 cbar-Isobare hinaufreichend, und aus isobaren Kurven des Druckes 100 cbar und 90 cbar, welche die Endpunkte dieser Vertikalen verbinden. Wir denken uns die beiden Vertikalen in 100 km Abstand voneinander. Die Länge der Kurve ist somit 200 km oder 200000 m, wenn wir von den

Längen der beiden Vertikalen — jede etwa 1000 m — absehen. Der Temperaturunterschied zwischen der Luft über Land und über dem Meer nimmt mit der Höhe rasch ab, so daß man für Vertikalen von einiger Höhe auf ziemlich kleine mittlere Temperaturdifferenzen kommt. Setzen wir diese Temperaturdifferenz gleich 2° C, so gibt die Solenoidtabelle (Tabelle II am Schlusse des Buches) 60 M.T.S.-Solenoide innerhalb der Kurve. Diese Kurve erhält deshalb nach einer Sekunde, nach 3 Stunden (annähernd gleich 10000 Sekunden gesetzt) und 6 Stunden die in der ersten Zeile tabulierten Zirkulationen. Nach Division dieser Zirkulationen durch die Länge der Kurve ergeben sich die in der zweiten

			3 Std.	6 Std.
Zirkulation C . .		60 m²/sec	600000 m²/sec	1200000 m²/sec
Geschwindigkeit v_m		0,00030 m/sec	3 m/sec	6 m/sec
Weglänge l . . .		0,00015 m	15 km	60 km
Transversale Geschwindigkeit wegen der Erddrehung unter verschiedenen geographischen Breiten	90°	$2{,}2 \cdot 10^{-8}$ m/sec	2,2 m/sec	8,8 m/sec
	75°	2,1	2,1 ,,	8,4 ,,
	60°	1,9	1,9 ,,	7,8 ,,
	45°	1,5	1,5 ,,	6,0 ,,
	30°	1,1	1,1 ,,	4,4 ,,
	15°	0,6	0,6 ,,	2,4 ,,
	0°	0	0 ,,	0 ,,

Zeile tabulierten mittleren Geschwindigkeiten v_m längs der Kurve, also nach 3 Stunden 3 m/sec, nach 6 Stunden 6 m/sec.

Sobald die Seebrisenzirkulation merkbare Verschiebungen der Luftteilchen zur Folge hat, macht sich die Wirkung der Erddrehung geltend. Um diese zu finden, berechnet man zuerst die seit dem Anfang der Bewegung im Mittel zurückgelegten Weglängen l der Teilchen (dritte Zeile der Tabelle). Mit Hilfe dieser Zahlen liest man aus der Erddrehungstabelle (Tabelle III am Schlusse des Buches) die entsprechenden transversalen Zusatzgeschwindigkeiten ab, die man je nach der geographischen Breite erhalten würde. Diese transversalen Zusatzgeschwindigkeiten werden für die mittleren Breiten nach 6 Stunden von derselben Größenordnung wie die primär erzeugten Geschwindigkeiten quer zur Küste. Dies gibt eine Ablenkung des Land- und Seewindes von der Größenordnung 45° für diese Breiten, was mit der Erfahrung übereinstimmt.

Besteht ein hinlänglich starkes permanentes Monsunsolenoidsystem, so führen die 24stündigen Schwankungen nur zu Intensitätsänderungen ohne Vorzeichenwechsel desselben, und man bekommt 24stündige Pulsationen des Monsuns ohne wesentliche Richtungsänderung desselben. So wird der Sommermonsun nachmittags stärker und frühmorgens

schwächer, weil die Temperaturdifferenz Land—See und das darauf beruhende Solenoidsystem bei Tage ihr Maximum und nachts ihr Minimum haben. Entsprechend ist der Wintermonsun frühmorgens stärker und nachmittags schwächer, weil die Temperaturdifferenz See—Land und das darauf beruhende Solenoidsystem nachts ihr Maximum und bei Tage ihr Minimum haben.

Wir erwähnen als zweites Beispiel thermischer Zirkulationsbewegungen mit 24stündiger Periode den *Berg- und Talwind.* Die tägliche Temperaturperiode der Luft verläuft mit größerer Amplitude an den Bergen und in den Tälern eines Bergmassives als unter dem gleichen Drucke in der freien Atmosphäre über der Ebene[1]. Die isosteren Flächen bekommen am Tage im Verhältnis zu den Isobaren ein Gefälle gegen den Bergen zu. Das gebildete Solenoidsystem gibt eine Zirkulationsbeschleunigung, die in Bodennähe von der Ebene zu den Bergen hin verläuft, dann längs Täler und Hänge aufwärts, in der Höhe wieder von den Kämmen weg und in gewissem Abstande wieder abwärts in die Ebene führt. Während der Nacht kehren sich die Verhältnisse um: die Isosteren erhalten im Verhältnis zu den Isobaren die umgekehrte Neigung, die Solenoide erhalten das entgegengesetzte Vorzeichen, und die nächtliche Zirkulation wird deshalb vom Berg ins Tal und vom Tal in die Ebene gerichtet sein.

Die Luftmassen, die an den erwähnten thermisch-geographischen Vertikalzirkulationen des Monsuns, der See- und Landbrise und des Berg- und Talwindes teilnehmen, sind im großen und ganzen stabil geschichtet. Würden die Vertikalzirkulationen adiabatisch vor sich gehen, so wäre dann im Bereich des Aufsteigens $\frac{\partial\theta}{\partial t} < 0$ und im Bereich des Absinkens $\frac{\partial\theta}{\partial t} > 0$, so daß das Solenoidsystem geschwächt und schließlich zum Verschwinden gebracht werden würde. Beispielsweise würde das Solenoidsystem der Seebrise (oder Landbrise), das der Berechnung der Tabelle S. 690 zugrunde gelegt wurde, im Laufe von 4 Stunden vernichtet sein, falls $-\frac{\partial\theta}{\partial z}$ nur $\frac{1}{2}$° C pro 100 m beträgt, während die auf- oder absteigenden Teilchen ihre Temperatur adiabatisch um 1° C pro 100 m ändern.

Wenn dies tatsächlich nicht geschieht, sondern im Gegenteil das Solenoidsystem der Seebrise (bzw. der Landbrise) 12 Stunden bestehen bleibt, so kann daraus geschlossen werden, daß die betreffende Vertikalzirkulation der Luftteilchen nicht adiabatisch verläuft. Die aufsteigenden

[1] Bezüglich der neuesten Untersuchungen vgl. A. WAGNER: Hangwind — Ausgleichsströmung — Berg- und Talwind Met. Z. Juni 1932, und A. WAGNER: Neue Theorie des Berg- und Talwindes. Met. Z. Sept. 1932.

Teilchen werden durch Strahlung und meistens auch durch Freimachung latenter Kondensationswärme in den gebildeten Wolken um so viel erwärmt, daß ihre Temperaturabnahme nicht 1 ° C pro 100 m, sondern bedeutend weniger beträgt. Die absteigenden Teilchen werden ihrerseits durch Strahlung so viel abgekühlt, daß ihre Temperaturzunahme nicht 1 ° C pro 100 m, sondern ebenfalls weniger beträgt.

In der Monsunzirkulation erhält sich das Solenoidsystem ein halbes Jahr lang ohne Vorzeichenwechsel, und in den Tropen im engeren Sinne bleibt es sogar immer ohne Vorzeichenwechsel bestehen. Für diese Vertikalzirkulationen gilt dann annähernd die für die allgemeine Meridionalzirkulation geltende Gleichung:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \qquad \frac{dw}{dt} - \frac{\theta}{\vartheta}\left(v_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) = 0\,,$$

d. h. die durch Wärmezufuhr oder -entziehung erzeugte lokale Temperaturänderung ist umgekehrt gleich der durch Advektion herbeigeführten, so daß das Temperaturfeld stationär bleibt. Dies bedeutet insbesondere für die vertikalbewegten Teilchen, daß sie während des Aufsteigens so viel Strahlungs- und Kondensationswärme zugeführt bekommen, daß ihre Temperaturabnahme $d\theta/dz$ numerisch gleich der an Ort und Stelle vorhandenen $\partial\theta/\partial z$ wird, und in analoger Weise während des Absinkens so viel Wärme abgeben, daß ihre Temperaturzunahme $d\theta/dz$ kleiner als der trockenadiabatische Wert und ebenfalls gerade gleich $\partial\theta/\partial z$ wird. Hierdurch bleibt natürlich das Temperaturfeld stationär, und das Solenoidfeld wird aufrechterhalten.

Der Umlauf um die Solenoide der thermisch-geographischen Zirkulationssysteme geht gemäß dem Arbeitstheorem (Abschnitt **51**) im großen und ganzen unter Gewinn mechanischer Arbeit vor sich. Bei den kurzperiodischen Systemen See- und Landbrise und Berg- und Talwind kommt dieser Arbeitsgewinn teils als ein Zuwachs der kinetischen Energie zum Vorschein, teils wird er als Reibungsarbeit verbraucht. Bei den langperiodischen Zirkulationssystemen, wie den halbjährlichen Monsunen, wird für den langsamen Zuwachs der kinetischen Energie nur wenig von der beim Umlauf gewonnenen Arbeit verwendet, und ein um so größerer Anteil derselben geht direkt in Reibungsarbeit über. Bei permanenten Monsunzirkulationen würde nichts von der beim Umlauf gewonnenen Arbeit in kinetische Energie umgesetzt, sondern alles wird zur Überwindung der Reibung verwendet.

Wenn die thermisch-geographischen Vertikalzirkulationen innerhalb fester Wände eingeschlossen wären, würde man, ähnlich wie bei der allgemeinen Meridionalzirkulation, die Formel **53** (7) benutzen können, um den permanenten Massentransport zu berechnen, der zum Ab-

transport des Wärmeüberschusses der Wärmequelle an die Kältequelle nötig wäre. Da die Monsunsysteme aber keine wohldefinierten Grenzen haben und dazu nie von der immer und überall wirksamen allgemeinen Meridionalzirkulation zu trennen sind, müssen wir auf die quantitative Anwendung der betreffenden Formel verzichten. Nichtsdestoweniger gilt natürlich qualitativ, daß, je größer der zu transportierende Wärmeüberschuß ist, um so stärker muß der Massentransport sein. Ist der Massentransport zu klein, so vergrößert sich der Temperaturgegensatz zwischen Wärme- und Kältequelle, das Solenoidsystem wird intensiver und die Zirkulationsbewegung beschleunigt. Ist dagegen der Massentransport zu groß, so verkleinert sich der Temperaturgegensatz, das Solenoidsystem wird schwächer, und die beim Umlauf um die Solenoide gewonnene Arbeit reicht nicht mehr aus, um die Reibung zu überwinden, so daß die Zirkulationsbewegung retardiert wird. Es gibt also für jede der thermisch-geographischen Vertikalzirkulationen eine stabile Umlaufsgeschwindigkeit, die gerade den richtigen Wärmetransport besorgt. Die permanenten und auch die halbjährlichen Monsunzirkulationen halten sich bei kleinen Schwankungen ständig in der Nähe dieses stabilen Wertes der Umlaufgeschwindigkeit. See- und Landbrise sowie Berg- und Talwindsysteme haben dagegen nicht genügend Zeit, sich auf den stabilen Umlauf einzustellen, denn ihre Solenoidsysteme wechseln zu schnell an Intensität und auch an Vorzeichen. Zu gegebenen Momenten sind diese Zirkulationsbewegungen entweder arbeitsleistend und befriedigen die Ungleichung **53** (3) oder arbeitsverbrauchend und befriedigen die Ungleichung **53** (4).

175. Feuchtlabile Zirkulationen. Als „feuchtlabil“[1] bezeichnen wir eine vertikale Temperaturverteilung, bei welcher

$$\delta_{pa} < \delta < \delta_a$$

($\delta = -\frac{\partial \theta}{\partial z}$ δ_a und δ_{pa} trockenadiabatischer bzw. feuchtadiabatischer Wert des vertikalen Temperaturgradienten; vgl. Abschnitt **50**). Ein Vergleich der in Abb. 102, S. 627, dargestellten vertikalen Temperaturverteilungen mit den in derselben Abbildung eingetragenen Feuchtadiabaten gibt darüber Aufschluß, in welchen Breitenzonen Feuchtlabilität vorhanden ist.

In den *Polargebieten* in engerem Sinne ist gemäß der mittleren vertikalen Temperaturverteilung überall und zu allen Jahreszeiten $\delta < \delta_{pa}$, so daß keine Feuchtlabilität vorhanden ist (lokale Ausnahmen an der Kontaktfläche kalter Luft mit offenen Meeresrinnen).

[1] Terminologie nach Refsdal: „Der feuchtlabile Niederschlag.“ Geofys. Publ. Vol. V, No. 12. Oslo 1930.

Dasselbe gilt für *Europa* im Winter; im Sommer aber ist δ nahe bei dem Wert δ_{pa}, und zwar besonders in Südeuropa (Pavia). In Einzelfällen kommen teils kleinere, teils größere vertikale Temperaturgradienten als die der mittleren Temperaturverteilung vor, so daß eine feuchtlabile Schichtung $\delta > \delta_{pa}$ im Sommer — und zwar besonders in der warmen Tageszeit — eine recht häufige Erscheinung sein wird. Übe· den *Ozeanen der gemäßigten Zone* entstehen feuchtlabile Schichtungen besonders im Winter, wenn die von den angrenzenden kalten Kontinenten zugeführte Luft auf dem Meer von unten her erwärmt wird, so daß δ wächst.

In den *Tropen* hat die untere Troposphäre auch gemäß der mittleren Temperaturverteilung ein $\delta > \delta_{pa}$ und ist folglich meistens feuchtlabil. Von einer gewissen Höhe an wird wiederum $\delta < \delta_{pa}$, und zwar liegt diese obere Grenze der feuchtlabilen Schichten in Agra bei etwa 3 km im Februar und bei etwa 13 km im August, und in Batavia bei 12 bis 13 km das ganze Jahr hindurch. Die Schichten von 3 bis 13 km sind aber nirgends stark feuchtlabil, sondern annähernd feuchtindifferent.

Die geographische Verteilung der Feuchtlabilität ist wohl hauptsächlich eine Folge der Strahlungsverhältnisse. In den Tropen hat ja die untere Troposphäre immer Überschuß, die Schicht von etwa 9 bis 12 km Defizit an Strahlungswärme (s. Abb. 118 und 119, S. 666), so daß eine möglichst große Temperaturabnahme mit der Höhe aufrechterhalten bleibt. Der Sommer auf höheren Breiten bietet ähnliche Verhältnisse nur in abgeschwächter Form, während im Winter der höheren Breiten keine untere Wärmequelle über Land vorhanden ist — aber um so mehr an der Kontaktfläche mit warmen Meeresteilen.

Für die nähere Lokalisierung der typisch feuchtlabilen Gebiete ist auch noch das *Bewegungsfeld* entscheidend. Eine jede Breitenzone bekommt einen vergrößerten vertikalen Temperaturgradienten δ und damit auch eine größere Wahrscheinlichkeit für feuchtlabile Zustände, wo:

1. eine advektive Abkühlung, $v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} > 0$, in der Höhe ohne entsprechende advektive Abkühlung unten stattfindet (Beispiele hiervon werden im Abschnitt **182** vorkommen),

2. eine vertikale Dehnung, die Isentropen in vertikaler Richtung auseinanderführt. Beispiele hierfür bietet jede Stelle der Atmosphäre mit horizontaler Konvergenz, d. h. in der unteren Troposphärenhälfte vornehmlich die Tiefdruckgebiete und außerdem in schwächerer Form die Südseiten der subtropischen Hochs (s. Abschnitt **173**).

Die Umkehrung der unter 1 und 2 definierten Prozesse, d. h.:

1′. advektive Erwärmung in der Höhe ohne entsprechende Erwärmung unten,

2'. vertikales Schrumpfen (typisch für antizyklonale Verhältnisse), vermindert den vertikalen Temperaturgradienten δ und damit auch die Wahrscheinlichkeit für feuchtlabile Zustände.

Notwendige Vorbedingung für die hier zu besprechenden feuchtlabilen Vertikalumwälzungen ist natürlich auch noch ein Feuchtigkeitsgehalt, der zur Sättigung aufsteigender Luftelemente genügt. Luft maritimer Herkunft ist also unter sonst gleichen Bedingungen für feuchtlabile Vertikalumwälzungen besser geeignet als kontinentale Luft.

Die feuchtlabilen Vertikalumwälzungen sind mit der Bildung von isobar-isosteren Solenoiden verbunden, welche als Folge der Vertikalbewegungen selbst entstehen. Um die feuchtlabilen Zirkulationen in reiner Form zu studieren, nehmen wir an, daß der betreffende feuchtlabile Teil der Atmosphäre anfangs barotrop, d. h. ohne isobar-isostere Solenoide, sei. Es sei dann irgendwo durch ein gewisses *endliches* lokales Aufsteigen so viel adiabatische Abkühlung eingetreten, daß der Taupunkt passiert wird und sich eine Wolke bildet. Innerhalb der Wolke ist die lokale Temperaturänderung bei feuchtadiabatischer Zustandsänderung der Luftelemente gemäß Gleichung **50** (11d):

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} = -v'_z(\delta_{pa} - \delta),$$

d. h. in feuchtlabiler Atmosphäre positiv, so lange das Aufsteigen innerhalb der Wolke andauert. Außerhalb der aufquellenden Wolke muß aus Kontinuitätsgründen absinkende Bewegung stattfinden, wodurch die lokale Temperaturänderung gemäß der Gleichung **50** (11c)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v_z(\delta_a - \delta)$$

ebenfalls positiv wird.

Ist nun in gleichem Druckniveau:

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} > \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

d. h. auch:

$$-v'_z(\delta_{pa} - \delta) > -v_z(\delta_a - \delta),$$

oder:

(1) $$\delta > v'_z\delta_{pa} - v_z\delta_a$$

so entsteht rings um die Wolke ein Solenoidfeld, das die begonnene Vertikalzirkulation weiter beschleunigt. *Die aus einem endlichen wenn auch kleinen Impuls entstandene Vertikalzirkulation schafft* also dann *selbst ein Solenoidsystem, welches für das weitere beschleunigte Wachstum der eingeleiteten Störung sorgt.*

Die Energiequelle der adiabatisch bzw. feuchtadiabatisch verlaufenden feuchtlabilen Zirkulationen liegt in der Kondensationswärme,

welche die aufsteigende Luft wärmer als ihre Umgebung macht. Jedoch wird nur in Ausnahmefällen die ganze freigemachte Kondensationswärme verwertet, denn es wird ja auch gemäß den Gleichungen **50** (11 d) und (11 c) die ganze feuchtlabile Atmosphäre durch die Umwälzung erwärmt, und die dazu erforderliche Wärmemenge wird auch der freigemachten Kondensationswärme entnommen. Wir werden das Verteilungsgesetz der freigemachten Kondensationswärme zwischen den beiden Posten „Erwärmung der Atmosphäre" und „Bildung von Solenoiden" suchen.

Dazu betrachten wir eine Niveaufläche, welche die in feuchtlabilen Vertikalumwälzungen befindliche, durch vertikale Seitenwände abgeschlossene Atmosphäre durchschneidet. Im betrachteten Moment schneidet die Niveaufläche sowohl Wolken als wolkenfreie Gebiete. Die mittlere Vertikalkomponente im Wolkengebiet sei v'_{zm} und im wolkenfreien Gebiet v_{zm}.

Die absinkende ungesättigte Luft für sich betrachtet ist stabil, und deshalb wird ein jedes Luftelement derselben, das langsamer oder schneller als die umgebende Luft sinkt, durch stabilisierende Kräfte auf die mittlere Abwärtsgeschwindigkeit, die das betreffende Niveau charakterisiert, zurückgebracht werden. Wir können deshalb voraussetzen, daß die Abwärtskomponente der wolkenfreien Luft bis auf turbulente Unregelmäßigkeiten kleinen Stiles überall im wolkenfreien Gebiet der betrachteten Niveaufläche ziemlich nahe ihrem Mittelwerte v_{zm} ist. Es tritt dann überall im wolkenfreien Teile der Niveaufläche pro Zeiteinheit eine adiabatische Erwärmung $\varDelta\theta = -v_{zm}(\delta_a - \delta)$ ein.

Innerhalb der Wolken, wo keine stabilisierenden Kräfte wirksam sind, werden die Einzelwerte von v'_z bedeutende Abweichungen von ihrem Mittelwert v'_{zm} aufweisen können. Wir werden uns aber zur Vereinfachung vorstellen, daß alle diese Ungleichmäßigkeiten im Aufsteigen der Wolkenteilchen ausgeglichen sind, so daß $\varDelta\theta' = -v'_{zm}(\delta_{pa} - \delta)$ einen eindeutigen Wert liefert für die im Wolkengebiet der betreffenden Niveaufläche stattfindende lokale Temperaturzunahme pro Zeiteinheit. $\varDelta\theta'$ ist größer als $\varDelta\theta$, denn es handelt sich voraussetzungsgemäß um feuchtlabile Umwälzungen, die der Ungleichung (1) genügen.

Eine isobare Einheitsschicht (in der die Luft ständig wechselt) im betrachteten Niveau speichert nun pro Zeiteinheit die Wärmemenge $c_p(m\varDelta\theta + m'\varDelta\theta')$ auf, wo m' die momentane Masse der Wolkenluft und m die momentane Masse der wolkenfreien Luft innerhalb der betrachteten Schicht bedeuten. Diese Wärmemenge können wir folgendermaßen in zwei Teile teilen:

$$c_p(m\varDelta\theta + m'\varDelta\theta') = c_p(m + m')\varDelta\theta + c_p m'(\varDelta\theta' - \varDelta\theta)\,.$$

Das erste Glied rechts bedeutet eine Wärmemenge, die nur zur gleichmäßigen Erwärmung der ganzen Schicht um $\varDelta\theta$ Grade gedient und

folglich keine Solenoidfelder geschaffen hat. Das zweite Glied rechts bedeutet eine Wärmemenge, die nur den Wolken zugute gekommen ist und deshalb an der Grenze zwischen Wolken und wolkenfreier Luft zur Bildung von Solenoidfeldern geführt hat mit dem Resultat, daß kinetische Energie gebildet werden kann.

Diese Aufteilung der Wärmemengen kann für alle gleich schweren isobaren Einheitsschichten durchgeführt werden, und durch Summation über sämtliche isobaren Einheitsschichten erhalten wir einerseits den Anteil der Kondensationswärme, der zur Erwärmung der Atmosphäre pro Zeiteinheit verbraucht wird:

$$c_p \sum (m + m') \varDelta\theta = c_p (m + m') \sum \varDelta\theta. \tag{2}$$

Andererseits erhalten wir den zur Solenoidbildung pro Zeiteinheit verfügbaren Anteil der Kondensationswärme:

$$w_s = c_p \sum m'(\varDelta\theta' - \varDelta\theta) = c_p \overline{m}' \sum (\varDelta\theta' - \varDelta\theta), \tag{3}$$

wo $\overline{m}'$ der Mittelwert von allen m', und $(\varDelta\theta' - \varDelta\theta)$ die in den verschiedenen isobaren Einheitsschichten pro Zeiteinheit stattfindende Temperaturerhöhung der Wolken im Verhältnis zur umgebenden Luft bezeichnen.

Die Verhältniszahl der für Solenoidbildung verfügbaren Kondensationswärme zur gesamten Kondensationswärme wird:

$$\eta_s = \frac{c_p \overline{m}' \sum (\varDelta\theta' - \varDelta\theta)}{c_p \overline{m}' \sum (\varDelta\theta' - \varDelta\theta) + c_p (m + m') \sum \varDelta\theta}$$
$$= \frac{\overline{m}' \sum (\varDelta\theta' - \varDelta\theta)}{\overline{m}' \sum (\varDelta\theta' - \varDelta\theta) + (m + m') \sum \varDelta\theta}.$$

Um diesen „Solenoidbildungseffekt" in seiner Abhängigkeit von den Feldeigenschaften zu studieren, betrachten wir wiederum die isobare Einheitsschicht. Für diesen Ausschnitt der feuchtlabilen Atmosphäre ist der Solenoidbildungseffekt:

$$\eta_s = \frac{c_p m'(\varDelta\theta' - \varDelta\theta)}{c_p (m \varDelta\theta + m' \varDelta\theta')} \qquad \frac{\frac{m'}{m}(\varDelta\theta' - \varDelta\theta)}{\varDelta\theta + \frac{m'}{m} \varDelta\theta'}$$

Für $\varDelta\theta'$ und $\varDelta\theta$ können wir noch die aus **50** (11d) bzw. (11c) abgeleiteten Werte einführen und bekommen:

$$\eta_s = \frac{\frac{m'}{m}\left(-v'_{zm}(\delta_{pa} - \delta) + v_{zm}(\delta_a - \delta)\right)}{-v_{zm}(\delta_a - \delta) - \frac{m'}{m} v'_{zm}(\delta_{pa} - \delta)}.$$

Da fernerhin die Massentransporte nach oben und nach unten einander kompensieren müssen, gilt mit guter Annäherung $v'_{zm} m' = -v_{zm} m$

oder auch $\frac{v_{zm}}{v'_{zm}} = -\frac{m'}{m}$. Unter Berücksichtigung dieser Relation vereinfacht sich der Ausdruck des Solenoidbildungseffektes in:

$$\eta_s = -\frac{\frac{m'}{m}\left((\delta_{pa}-\delta) + \frac{m'}{m}(\delta_a - \delta)\right)}{\frac{m'}{m}(\delta_a - \delta) + \frac{m'}{m}(\delta_{pa} - \ldots}$$

$$(4) \qquad \frac{(\delta - \delta_{pa}) - \frac{m'}{m}(\delta_a - \delta)}{\delta_a - \delta_{pa}} \qquad \frac{\frac{\delta - \delta_{pa}}{\delta_a - \delta} - \frac{m'}{m}}{\frac{\delta_a - \delta_{pa}}{\delta_a - \delta}}$$

In einer feuchtlabilen Atmosphäre, wo $\delta_{pa} < \delta < \delta_a$, sind die beiden Brüche $(\delta - \delta_{pa})/(\delta_a - \delta)$ und $(\delta_a - \delta_{pa})/(\delta_a - \delta)$ positiv. Das Massenverhältnis m'/m ist natürlich auch positiv. *Ein positiver Solenoidbildungseffekt kommt also nur zustande, wenn:*

d. h. nur wenn das Verhältnis zwischen der Masse der Wolkenluft und der Masse der wolkenfreien Luft $(\delta - \delta_{pa})/(\delta_a - \delta)$ *nicht überschreitet, und zwar wird der Solenoidbildungseffekt um so größer positiv, je kleiner die Masse der Wolkenluft* m' *im Verhältnis zur Masse* m *der wolkenfreien Luft ist.* Geht m'/m gegen Null, so wird der Solenoidbildungseffekt:

$$(5) \qquad \eta_s = \delta - \delta_v$$

was bei gegebenem δ der maximal erreichbare Wert ist. Erst wenn außerdem δ bis zum trockendiabatischen Wert δ_a wächst, wird $\eta_s = 1$, und die gesamte Kondensationswärme dient zur Solenoidbildung. Die Werte von $\eta_s > 1$, welche die Formel im Falle $\delta > \delta_a$ liefert, bedeuten nur, daß im Falle überadiabatischer Schichtung für trockene Luft auch andere Energiequellen als die Kondensationswärme bei der Umwälzung Solenoide bilden (potentielle Energie).

Die Formel (4) zeigt also, daß die feuchtlabile Atmosphäre gegenüber der Bildung von breiten Wolkentürmen mit schmalen Zwischenräumen, die der Ungleichung $\frac{m'}{m} > \frac{\delta - \delta_{pa}}{\delta_a - \delta}$ genügen, als ein stabiles Medium ($\eta_s < 0$) reagiert, während sie um so labiler reagiert, je schmaler die Wolkentürme relativ zu den Zwischenräumen sind. Setzen wir voraus, daß am Anfang Vertikalumwälzungen aller Arten stattfinden, so wird nach einer gewissen Zeit diejenige Art von Vertikalumwälzung vorherrschen, welche die günstigsten Entwicklungsbedingungen vorfindet, mit anderen Worten das schnelle Aufsteigen in möglichst engen Wolkentürmen und das gleichzeitige langsame Absinken in den weiten Zwischenräumen.

Die unendlich schmalen Wolkentürme mit unendlich schnell aufsteigender Bewegung, welche gemäß der obigen Diskussion eigentlich die bevorzugten sein müßten, sind allerdings wegen des Eingreifens der Reibung und auch wegen der relativ kleinen Vertikaldimension der Atmosphäre unmöglich. Dazu kommt noch, daß etwaige schmale aufsteigende „Luftfäden", welche durch die von Niveau zu Niveau wechselnde Horizontalbewegung mitgeführt werden, leicht „zerreißen". Die feuchtlabilen Zirkulationen können deshalb nur dann große Vertikaldimensionen annehmen, wenn der Querschnitt der aufsteigenden Luftmassen ein gewisses Mindestmaß erreicht. So entsteht das gewöhnliche Gebilde der feuchtlabilen Umwälzungen — der Cumulonimbus —, dessen Horizontalquerschnitt einige Quadratkilometer beträgt, der aber immerhin viel enger bleibt als die wolkenfreien Räume zwischen benachbarten Cumulonimben. *Der Aufwärtsstrom im Cumulonimbus ist wahrscheinlich der unter den obwaltenden Reibungsverhältnissen der freien Atmosphäre schmalste mögliche Aufwärtsstrom von mehreren Kilometern vertikaler Ausdehnung.* Ist dies richtig, so ist auch der Solenoidbildungseffekt der feuchtlabilen Umwälzung so nahe wie es sich in der Natur verwirklichen läßt, an den bei gegebenem δ maximal möglichen Wert (5) gebracht.

In 1 bis 2 km Höhe drängen sich die Cumuluswolken oft viel dichter aneinander als weiter oben, und die dortigen Umwälzungen sind also von der Art, daß ihr Solenoidbildungseffekt viel kleiner als der maximal mögliche wird. Wenn die Cumuli so dicht gedrängt liegen, daß

$$\frac{m'}{m} > \frac{v - v_{pa}}{\delta_a - \delta},$$

was oft vorkommen dürfte, so wird der *Solenoidbildungseffekt* sogar *negativ*. Die Solenoide werden dann in arbeitsverbrauchendem Sinne umkreist und die kinetische Energie der sich selbst überlassenen Vertikalumwälzung müßte abnehmen. Wenn trotzdem die dicht gedrängten arbeitsverbrauchenden Cumuli lange bestehen bleiben können, so müssen ständige Impulse von unten her wirksam sein. Diese Impulse können beispielsweise von der mechanischen Turbulenz der Luftströmung oder auch von thermisch betriebenen Vertikalumwälzungen in einer überadiabatischen Schicht nahe dem Erdboden herrühren. Besonders starke, und zwar lokal gebundene, Vertikalimpulse werden von den Berg- und Talwindsystemen geliefert. In einer stabilen Atmosphäre führen diese zur Bildung dicht gedrängter arbeitsverbrauchender Cumuli, während in einer genügend feuchtlabilen Atmosphäre die arbeitserzeugenden Cumulonimbustürme entstehen.

Rein feuchtlabile Zirkulationen großer Horizontalerstreckung sind kaum denkbar, denn die Atmosphäre ist nirgends barotrop über weite

Distanzen hinweg. In einer baroklinen Atmosphäre bestimmen aber die großen permanenten Solenoidfelder die wesentlichen Züge der Zirkulation, so wie wir sie in der Meridionalzirkulation und in den Monsunzirkulationen kennen gelernt haben. Die evtl. gleichzeitig vorhandenen feuchtlabilen Zirkulationen bilden nur eine „Kleinstruktur", die sich den großen Zirkulationen überlagert. Diese „Kleinstruktur" ist aber für alle lokal auftretenden großen Vertikalkomponenten der Luft verantwortlich. Die in den großen Zirkulationen umlaufenden Teilchen erlangen ja kaum größere Vertikalkomponenten als von der Größenordnung mm/sec, aber in der überlagerten Kleinstruktur von feuchtlabilen Umwälzungen kommen in extremen Fällen Vertikalkomponenten von der Größenordnung 10 m/sec vor.

Eine Untersuchung der in Abb. 102 dargestellten mittleren vertikalen Temperaturverteilungen zeigt, daß der maximal erreichbare Solenoidbildungseffekt feuchtlabiler Umwälzungen $\eta_s = (\delta - \delta_{pa})/(\delta_a - \delta_{pa})$ Höchstwerte von etwa 0,5 in den niedrigsten Atmosphärenschichten der Tropen liefert. Oberhalb 3 km sind die Werte meistens unter 0,1, und an vielen Stellen sind sie auch schwach negativ, so daß feuchtlabile Umwälzungen vom Boden bis zu großen Höhen nur mit schwacher Solenoidbildung verbunden sind. Beispielsweise würde eine Umwälzung von 0 bis 12 km Höhe über Batavia im August gemäß der mittleren Kurve einen maximal erreichbaren Solenoidbildungseffekt von 0,13 haben, d. h. sogar für den Fall unendlich dünner Wolkentürme wird nur 13% der Kondensationswärme zum Aufbau der Solenoidfelder und 87% zur allgemeinen Erwärmung der Atmosphäre verbraucht.

Die außertropischen feuchtlabilen Umwälzungen bringen gemäß der mittleren Kurven der Abb. 102 noch kleinere Solenoidbildungseffekte hervor als die tropischen. Jedoch ist zu beachten, daß im Einzelfalle viel stärkere Feuchtlabilität vorkommen kann als im mittleren Zustand, so daß unter günstigen Umständen die außertropischen feuchtlabilen Umwälzungen ähnliche Solenoidbildungseffekte wie die oben für die tropischen Verhältnisse abgeleiteten haben können.

Die Formel (3) der *zur Solenoidbildung pro Zeiteinheit verfügbaren Energie* läßt sich unter Berücksichtigung der Relationen

$$\Delta\theta' = -v'_{zm}(\delta_{pa} - \delta)\,, \quad \Delta\theta = -v_{zm}(\delta_a - \delta) \quad \text{und} \quad \frac{v_{zm}}{v'_{zm}} \qquad \frac{m'}{m}$$

auf die folgende Form bringen:

$$(6) \qquad \begin{aligned} {}'_s &= c_p \overline{m}' \sum v'_{zm} \left[(\delta - \delta_{pa}) - \frac{m'}{m} (\delta_a - \delta) \right. \\ &= c_p \overline{m}' \bar{v}'_{zm} \sum \left[(\delta - \delta_{pa}) - \frac{m'}{m} (\delta_a - \delta) \right]. \end{aligned}$$

Die Summation ist hier über alle beteiligten isobaren Einheitsschichten zu erstrecken. $\overline{m}'$ ist, wie früher erwähnt, der Mittelwert der in jeder

einzelnen der isobaren Einheitsschichten vorhandenen Masse m' von Wolkenluft. $\bar{v}'_{zm}$ ist der Mittelwert aller v'_{zm}, welche wiederum die mittlere Vertikalbewegung der Wolkenluft innerhalb jeder einzelnen isobaren Einheitsschicht vertreten.

Bei der Summation sind graphische Berechnungsmethoden empfehlenswert, welche von SHAW durch die Tephigramformulare[1] und von REFSDAL[2] durch die Emagram- und Evogramformulare zurechtgelegt sind. Die beiden erwähnten Autoren vernachlässigen allerdings das ziemlich wichtige Glied $-\frac{m'}{m}(\delta_a - \delta)$, aber ihre Berechnungsmethode eignet sich auch für die vollständige Formel (6).

Die aus einer feuchtlabilen Atmosphäre im ganzen für Solenoidbildung herauszuholende Energie ist natürlich begrenzt, wenn keine permanenten äußeren Wärmequellen (unten) und Kältequellen (oben) wirksam sind. Im Laufe der feuchtlabilen Umwälzungen steigt nämlich sonst fortwährend die Temperatur der freien Atmosphäre, während am Boden, wo $v_z = 0$, die Temperatur konstant bleibt, mit dem Erfolg, daß *der vertikale Temperaturgradient δ asymptotisch auf δ_{pa} abnimmt.* Wenn somit der feuchtlabile Zustand in einen feuchtindifferenten übergeführt worden ist, erlöschen natürlich auch die Vertikalumwälzungen.

Mit dem Formelsystem dieses Abschnittes haben wir nur Ausdrücke für den zur Solenoidbildung verwendeten Anteil der Kondensationswärme bekommen, wir haben also kein allgemein gültiges quantitatives Gesetz für die weitere Umbildung desselben in kinetische Energie aufstellen können. Das Arbeitstheorem (Abschnitt **51**) gilt ja nur für wirkliche thermodynamische Kreisprozesse und nicht für solche irreversiblen Prozesse wie die feuchtlabilen Umwälzungen. Einzelfälle können aber numerisch berechnet werden. Das größte praktische Interesse knüpft sich dabei an solche Zirkulationen, deren unterer Teil in feuchtlabiler und deren oberer Teil in stabiler Atmosphäre liegt; denn in der Natur werden ja immer die feuchtlabilen Vertikalzirkulationen die Tendenz haben, über den Bereich feuchtlabiler Schichtung hinaufzuwachsen. In solchen Zirkulationen wird unten kinetische Energie erzeugt und oben verbraucht, so daß die gesamte kinetische Energie nicht sehr groß wird. Die Reibung bremst natürlich auch den Lauf der feuchtlabilen Zirkulationen, aber ihre Wirkung ist wahrscheinlich nicht so groß wie die der Zufügung einer arbeitsverbrauchenden oberen Fortsetzung der Zirkulation in die stabile Atmosphäre hinauf.

Die bisher besprochenen feuchtlabilen Umwälzungen sind „ungeordnet", und es wird deshalb nirgends einheitlich verteilte kinetische Energie in großem Umfange gebildet. Die feuchtlabilen Umwälzungen

---

[1] SHAW: Manual of Meteorology, Vol. III. Cambridge 1930.

[2] REFSDAL: l. c. S. 693.

können aber auch in mehr geordneter Weise durch die Aufgleitbewegung an atmosphärischen Frontflächen ausgelöst werden, wodurch auch die Energie der großzügig angeordneten Windfelder gespeist wird. Diese Rolle der an den Fronten stattfindenden feuchtlabilen Umwälzungen wird in Abschnitt **180** besprochen.

Achtzehntes Kapitel.

Die Störungen der großen permanenten Zirkulationen.

Auf den Grundzustand, der durch die Zonal- und Meridionalzirkulation sowie durch die geographischen Zirkulationen bestimmt ist, überlagern sich noch mannigfache Störungen, die in den wandernden Frontalzyklonen und in den wandernden Antizyklonen ihre typischen Vertreter haben. Die Frontalzyklonen, die wir zuerst behandeln werden, entstehen dort, wo das Feld der isobar-isosteren Solenoide Konzentrationsstellen aufweist[1]. Ihr Wachstum ist gesichert, wenn die Troposphäre an der betreffenden Stelle feuchtlabil oder auf jeden Fall nicht allzu stabil ist.

Wir suchen zunächst die Häufungsstellen der isobar-isosteren Solenoide.

176. Die Frontenbildung. Die isobar-isosteren Solenoide häufen sich an solchen Stellen, wo der horizontale Temperaturgradient groß ist. Die Bedingung für das Zustandekommen großer horizontaler Temperaturgradienten ist in Abschnitt **9** behandelt worden für den vereinfachten Fall, daß die Temperatur als konservative Eigenschaft der bewegten Teilchen angesehen werden kann. Das Resultat ist, daß die Luftbewegung in den stationären *Deformationsfeldern* die Isothermen in solcher Weise „transportiert", daß sie schließlich mit der Dehnungsachse des Feldes parallel werden und dabei alle asymptotisch an diese Achse heranrücken. Sind die Isothermen zu Anfang nicht mit der Dehnungsachse parallel, so werden sie in solcher Weise gedreht, daß ihre Richtung sich asymptotisch an die der Dehnungsachse anschmiegt. Bilden sie anfangs einen größeren Winkel mit der Dehnungsachse als mit der Schrumpfungsachse, so werden die Isothermen während der Drehung zuerst auseinandergeführt, um sich erst nachher zu nähern.

Diese „Advektion der Isothermen", deren Schlußresultat ein ständig wachsender horizontaler Temperaturgradient quer zur Dehnungsachse

---

[1] Es entstehen bisweilen auch Zyklonen an Stellen, wo im voraus keine Fronten existierten. Solche Zyklonen bekommen bald eine Struktur, wie die der occludierten Frontalzyklonen, ohne durch das Frontalwellenstadium zu passieren (vgl. Abschnitt **178**).

ist, findet man tatsächlich in den stationären Deformationsfeldern der Atmosphäre, nur mit der Modifikation, die daher rührt, daß die Temperatur keine wirklich konservative Eigenschaft der Teilchen ist. Betrachten wir z. B. eine stationäre horizontale Luftströmung mit Meridionalkomponente v_y in einer Atmosphäre, deren Temperaturfeld zu Anfang genau zonal war, so ändert sich gemäß der Gleichung **50** (10) die Temperatur in einem festen Punkte um

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt} - \frac{\theta}{\vartheta} v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \tag{1}$$

Ist die Meridionalkomponente beispielsweise polwärts gerichtet ($v_y > 0$), so steigt, da $\partial\vartheta/\partial y$ immer negativ ist, die Temperatur in dem festen Punkt oder, was damit gleichbedeutend ist, die Isothermen werden polwärts transportiert, vorausgesetzt, daß das erste Glied rechts klein gegenüber dem zweiten ist. Je mehr die Temperatur in dem betreffenden Punkt steigt, um so größer negativ wird allmählich das erste Glied rechts, denn eine Luftmasse, deren Temperatur höher als die des Strahlungsgleichgewichtes für die betreffende geographische Breite ist, verliert Wärme. Bei weiterem Temperaturanstieg wird die Grenze erreicht, wo die beiden Glieder rechts einander das Gleichgewicht halten:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt} - \frac{\theta}{\vartheta} v_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

so daß trotz der polwärts gerichteten Luftbewegung kein weiteres Polwärtswandern der Isothermen möglich ist. Dieselbe Gleichung, mit negativem v_y und positivem dw/dt, bestimmt auch die Grenze für die maximal mögliche Äquatorwärtsverschiebung der Isothermen infolge äquatorwärts gerichteter Bewegung.

Abb. 127. Frontogenese in einem Deformationsfeld mit zonaler Drehungsachse.

Die Wirkung eines stationären Deformationsfeldes mit zonaler Dehnungsachse auf die zonale Temperaturverteilung der Erdatmosphäre wird durch die Abb. 127 veranschaulicht. Eine gewisse Anzahl Isothermen nähern sich asymptotisch an die Dehnungsachse, so daß der meridionale Temperaturgradient dort bis ins Unendliche wächst, aber die übrigen Isothermen erreichen nur die durch die Gleichung (2) definierte jeweilige Grenze der maximal möglichen Polwärts- bzw. Äquatorwärtsverschiebungen und bleiben dann stationär.

Ist die Dehnungsachse des stationären Deformationsfeldes nicht genau zonal orientiert (Abb. 128), so drehen sich die Isothermen und schmiegen sich gleichzeitig der Dehnungsachse an; dieser Vorgang kann sich aber wiederum nur so weit entwickeln, wie das mit den maximal möglichen meridionalen Isothermenverschiebungen vereinbar ist. Das Schlußresultat wird deshalb ein Temperaturfeld, das aus zwei annähernd zonalen Teilen besteht, deren gegenseitige durch eine Temperaturdiskontinuität charakterisierte Grenze längs der Dehnungsachse des Deformationsfeldes fällt.

Im Falle genau zonaler Dehnungsachse wurde die Diskontinuität ihrer ganzen Länge nach durch ein und dasselbe Isothermenbündel gebildet, im Falle nichtzonaler Dehnungsachse findet man nicht mehr dasselbe Isothermenbündel längs der ganzen Diskontinuitätslinie (θ_{5-6} am linken und θ_{3-4} am rechten Rand der Abb. 128).

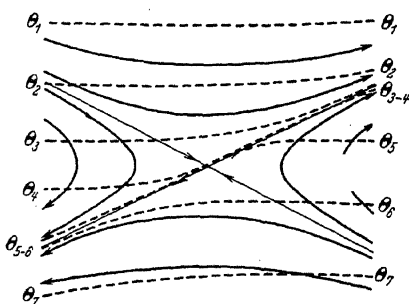



Abb. 128. Frontogenese in einem Deformationsfeld mit Dehnungsachse WSW-ENE.

Ist die Dehnungsachse des stationären Deformationsfeldes annähernd meridional orientiert, so werden die zonalen Isothermen auseinandergeführt, und erst nach langdauernder Drehung würden sie sich wieder längs der Dehnungsachse aneinanderschmiegen. Diese Isothermendrehung um fast 90° kann nur nahe dem Zentrum des Deformationsfeldes vollführt werden, weiter weg vom Zentrum dagegen nicht, weil infolge (2) nur begrenzte meridionale Isothermenverschiebungen möglich sind.

Von diesem letzten Falle abgesehen führen also die stationären Deformationsfelder zur Bildung von thermischen Diskontinuitätslinien — den sog. *Fronten* — längs der jeweiligen Dehnungsachse des Feldes. Der Vorgang der Frontenbildung — die *Frontogenese* — müßte eigentlich unendlich lange dauern, damit eine Temperaturdiskontinuität in strengem Sinne entstünde; aber schon nach 1 oder 2 Tagen besteht eine Konzentration der Isothermen längs der Dehnungsachse, die für alle praktisch meteorologischen Zwecke als „Temperaturdiskontinuität" gelten kann. Während der anfänglichen Frontogenesenperiode hat die werdende „Front" noch große Breite (bis zu einigen hundert Kilometern) und wird am besten als Frontalzone bezeichnet. Wo man die Grenze zwischen den Bezeichnungen Frontalzone und Front festzusetzen hat, ist zu einem gewissen Grade willkürlich[1].

[1] Ein Definitionsversuch nebst Begründung findet sich in BERGERON: „Über die dreidimensional verknüpfende Wetteranalyse." Geofys. Publ. Vol. V, No. 6. Oslo 1928.

Da die Frontogenese eine gewisse Zeit in Anspruch nimmt, haben die beweglichen Deformationsfelder weniger deutliche frontogenetische Wirkung als die stationären, denn jeder individuelle Ausschnitt der Atmosphäre wird im beweglichen Deformationsfeld gewöhnlich nur während kurzer Zeit deformiert. Nur wenn die Verschiebung des Deformationsfeldes parallel zur Dehnungsachse vor sich geht, vollzieht sich die Frontogenese unter ähnlichen Bedingungen wie im stationären Feld.

Aus der Formel **128** (12)

$$\operatorname{tg}\theta_d = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}}{g(\theta' - \theta)}\,\theta\theta'$$

ist ersichtlich, daß zu einer geneigten Diskontinuitätsfläche mit endlichem Temperatursprung $(\theta' - \theta)$ auch eine sprunghafte Änderung des horizontalen Druckgradienten senkrecht zur Diskontinuitätsfläche $\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}\right)$ gehört, und zwar ist, wie in **128** S. 481 gezeigt, die sprunghafte Änderung des Druckgradienten immer von dem Vorzeichen, daß die Größe $\partial^2 p/\partial y^2$ an der Front gegen $+\infty$ (nie gegen $-\infty$) geht. Dies bestätigt sich zur Genüge in der Natur, und wir können aus den beobachteten Werten von $\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y}\right)$ und $(\theta' - \theta)$ an einer Front die Neigung θ_d der zugehörigen Diskontinuitätsfläche ausrechnen. Es ergeben sich Neigungen der Frontflächen zur Horizontalen von der Größenordnung 1/100, und zwar natürlich in solchem Sinne, daß die kältere der beiden Luftmassen einen Keil unterhalb der wärmeren bildet. Die Frontfläche reicht ebenso hoch wie das frontogenetische Deformationsfeld, aus dem die Front hervorgegangen ist, d. h. bisweilen sogar bis zur Tropopause, aber oft nur einige Kilometer.

Die Frontflächen in der freien Atmosphäre sind ebensowenig wie ihre Schnittlinien mit dem Erdboden — die Fronten — durch Temperaturdiskontinuitäten in strengem Sinne charakterisiert. Die Isothermenflächen werden also nur in seltenen Fällen beim Durchgang durch die Übergangsschicht gefaltet, und die vertikalen Sondierungen durch diese Schicht ergeben also selten Temperaturinversionen $\left(\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0\right)$, wie es bei einer wirklichen Diskontinuitätsfläche der Fall sein würde. Eine Übergangsschicht mit Isothermie $(\partial \theta/\partial z = 0)$ oder auch nur mit kleinerem negativen $\partial \theta/\partial z$ als dem für die Troposphäre normalen kennzeichnet gewöhnlich die „Frontfläche" in den vertikalen Temperatursondierungen.

Die Art der Anhäufung der isobar-isosteren Solenoide in einer Frontalzone im Westwindgürtel der gemäßigten Breiten geht aus dem schematischen frontnormalen Vertikalschnitt in Abb. 129 hervor. Die

Orientierung der betreffenden Front ist annähernd zonal gedacht, und die Abbildung stellt folglich einen Ausschnitt aus einem Meridionalschnitt des troposphärischen Solenoidfeldes dar. Aus den Abb. 112 und 113, S. 644, ist zu ersehen, wie unter mittleren Verhältnissen überall kontinuierliche Neigungen der Isobaren und Isosteren und eine kontinuierliche Verteilung der Solenoide bestehen. Innerhalb der engen Frontalzone (Abb. 129) besteht aber ein verstärktes Gefälle der isosteren Flächen, und dadurch kommt die Anhäufung einer gewissen Anzahl von Solenoiden auf engem Raume zustande.

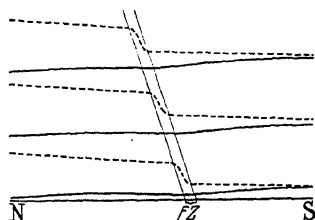



Abb. 129. Schematischer Vertikalschnitt durch eine Frontalzone (*FZ*) im Westwindgebiet der gemäßigten Breiten. Isobaren ausgezogen, Isosteren gestrichelt. Überhöhung etwa 300 fach.

Die Abb. 129 zeigt auch (obwohl schwach wegen ungenügender Überhöhung) die mittels der Gleichung **128** (12) abgeleitete und durch Beobachtungen bestätigte „Brechung" der isobaren Flächen beim Durchgang durch die Frontfläche. Dank dieser „Brechung" wird das allgemeine polwärts gerichtete Druckgefälle auf der Polarseite der Frontfläche geschwächt oder sogar umgekehrt. Weiter polwärts schließt sich ein stetiger Übergang zum normalen polwärts gerichteten Druckgefälle an.

177. Die wichtigsten Frontenbildungen und die durch sie abgegrenzten Luftmassen. Frontenbildung kommt von Zeit zu Zeit sozusagen überall in der irdischen Atmosphäre vor. Es folgt aber aus dem vorigen Abschnitt, daß die Frontogenese in gewissen Gebieten viel häufiger und ausgeprägter als anderswo auftreten muß, nämlich dort, wo häufig quasistationäre Deformationsfelder mit möglichst zonaler Dehnungsachse lagern. Die Lage dieser quasipermanenten frontogenetischen Deformationsfelder kann man z. B. aus den klimatologischen Karten des mittleren Druckfeldes ersehen. Wir brauchen nur das Gedankenexperiment zu machen, daß die mittlere Druckverteilung des Monats und das dazugehörende Feld des Gradientwindes einige Tage genau unverändert bestehe, und werden ableiten, was für Fronten sich dann bilden müssen.

Wir nehmen uns zuerst die *winter*lichen Verhältnisse der *Nordhalbkugel* vor, die durch die Karte des mittleren Luftdruckes im Februar vertreten werden (Abb. 130).

Im westlichen *Pazifischen Ozean* finden wir einen deutlich entwickelten Sattelpunkt zwischen dem kontinentalen Monsunhoch über Asien und dem langgestreckten pazifischen Subtropenhoch.

Die Dehnungsachse des entsprechenden Deformationsfeldes verläuft etwa WSW—ENE längs des einen Astes der hyperbolischen Sattelpunktisobare. Die Orientierung des Deformationsfeldes ist für die Frontogenese sehr günstig, denn der Verlauf der mittleren Isothermen (Abb. 100) ist in der westlichen Pazifik eher WSW—ENE als rein zonal. Nach kurzer Zeit entwickelt sich also eine Front längs der Dehnungsachse (gestrichelte Linie); der WSW-Ast derselben führt nach dem südlichsten Teil der Philippinen, der ENE-Ast nach der amerikanischen Küste unter etwa 50° N. Es ist dies die *pazifische Polarfront* (auf der Karte *Paz. PF*). Der Name Polarfront soll andeuten, daß die Ausströmung polarer Luft an der betreffenden Front „aufgefangen" wird, so daß die Polarfront die Südgrenze der „Polarluft" bildet.

Die Wolkenbeobachtungen von Manila (14° 35′ N, 120° 58′ E) geben einen Anhaltspunkt über die Mächtigkeit dieser Polarluft. Im Februar haben dort die unteren Wolken im Mittel eine Bewegung aus N 80° E, die mittelhohen Wolken aus N 78° E und die hohen Wolken (Ci) aus S 11° E, und solche Strömungen bestehen in ähnlicher Weise den ganzen Winter hindurch vom Oktober bis März[1]. Im Winter liegt also die pazifische Polarfrontfläche über den nördlichen Philippinen zwischen dem Niveau der mittelhohen und hohen Wolken, d. h. irgendwo zwischen 5 und 10 km Höhe.

Für die Bestimmung der Neigung der pazifischen Polarfrontfläche weiter östlich gibt es keinen geeigneten Beobachtungsort. Außerdem ist der ENE-Ast der pazifischen Polarfront in ständigem Hin- und Herwandern begriffen, so daß Mittelwerte der beobachteten Luftbewegung in höheren Schichten für die Festlegung der mittleren Neigung der zugehörigen Frontfläche nichts nützen würden. Einzelbestimmungen der Neigung der Polarfrontfläche über Europa ergeben Werte um $^1/_{100}$ herum, und eine Neigung von derselben Größenordnung gilt auch für alle die im folgenden beschriebenen außertropischen Frontflächen. Die Polarfrontfläche läßt sich in einigen Fällen nur bis zu etwa halber Tropopausenhöhe hinauf nachweisen, wo sie dann diffus endet, während sie in anderen Fällen die ganze Troposphäre von unten bis oben durchschneidet. Das frontogenetische Deformationsfeld, in der die Polarfrontfläche gebildet wird, reicht nämlich je nach der Wetterlage bis zu verschiedenen Höhen. Dieses wiederum aus Europa stammende Resultat muß auch für die pazifische Polarfrontfläche gültig sein.

Alle Polarluft nördlich der pazifischen Polarfront kommt von der Ausfallspforte zwischen dem asiatischen Monsunhoch und dem Aleutentief. Die Polarluft, die sich noch an ihrer Ursprungsstelle — den eigentlichen arktischen Gegenden — befindet, wollen wir *„arktische Polar-*

[1] P. José Algué: „Las Nubes en el Archipiélago Filipino." Manila 1898. Deutsches Referat von P. Bergholz: Meteorol. Z., März 1900.

luft" oder kürzer „*Arktikluft*" nennen. Wenn die arktische Polarluft über offenes Meer kommt, erwärmt sie sich allmählich und wird zweckmäßig mit dem Namen „*maritime Polarluft*" bezeichnet. Zwischen arktischer Polarluft und maritimer Polarluft existiert also westlich des Aleutentiefs ein stetiger Übergang.

Anders ist es östlich des Aleutentiefs. Der SW-Strom erwärmter maritimer Polarluft trifft hier auf die Rocky Mountains, steigt über sie

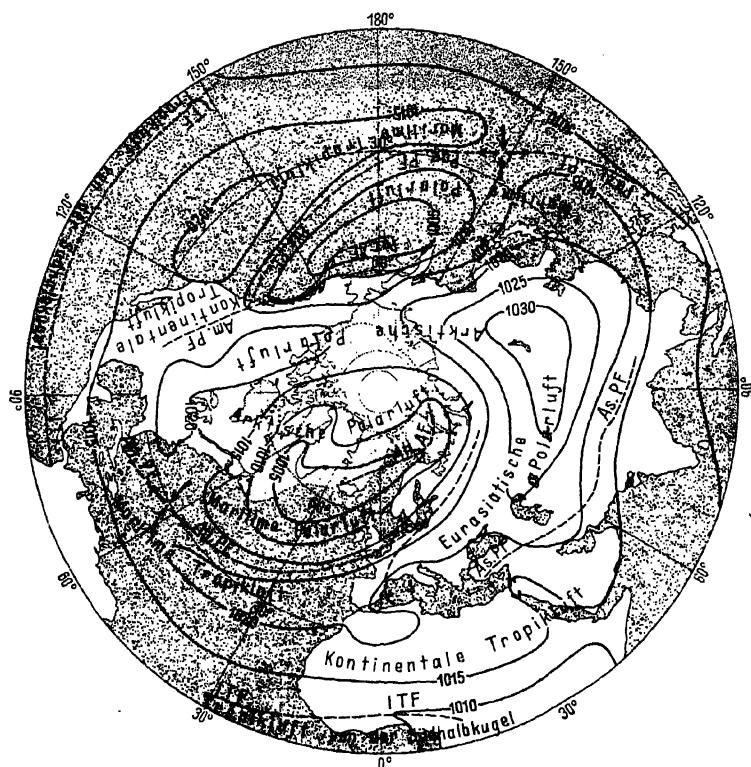



Abb. 130. Hauptfronten der Atmosphäre der Nordhalbkugel. Februar.

hinauf und bleibt nachher in der Höhe, denn die arktische Polarluft nordöstlich der Gebirge läßt sich nicht aus den untersten Schichten vertreiben. Es bildet sich also eine sich an die Rocky Mountains anlehnende Front zwischen einerseits arktischer und andererseits maritimer Polarluft. Diese wollen wir die *pazifische Arktikfront* (*Paz. AF*) nennen, da sie die Südgrenze der Arktikluft bildet. Die betreffende Arktikfront hat ein „blindes Ende" gegen das Aleutentief hin, und westlich desselben existiert sie natürlich überhaupt nicht.

Indem wir weiter ostwärts gehen, finden wir einen Sattelpunkt über dem westlichen Teil der Vereinigten Staaten zwischen dem warmen pazifischen Subtropenhoch und dem kalten nordamerikanischen Monsunhoch. Die Front, die sich zwischen den beiden Hochs bildet, hat, in dem durch die Mittelwertkarte definierten atmosphärischen Zustande, ihre natürliche Lage längs der Rocky Mountains. Dieses Frontstück durch die Vereinigten Staaten, welches die SW-Grenze der über dem größten Teil des nordamerikanischen Kontinents lagernden Polarluft bildet, werden wir mit dem Namen: die *amerikanische Polarfront* (*Am. PF*), bezeichnen.

In der freien Atmosphäre wird man die Frontfläche der amerikanischen Polarfront auch weiter ostwärts verfolgen können. Mit wachsender Höhe wird nämlich der subtropische Hochdruckgürtel auch an der schwachen Stelle im Mexikanischen Golf ständig deutlicher. Daher muß eine Tiefdruckfurche zwischen diesem Hochdruckgürtel und dem ziemlich seichten nordamerikanischen Monsunhoch bestehen. In dieser Furche liegt die nordwärts ansteigende, wahrscheinlich recht flache Frontfläche der amerikanischen Polarfront. Diese kann unter Umständen mit der östlich sich anschließenden atlantischen Polarfrontfläche zusammenhängen, aber gewöhnlich klafft eine Lücke zwischen den beiden.

Im westlichen Atlantik — nahe Bermuda — liegt der Sattelpunkt zwischen dem nordamerikanischen Monsunhoch und dem atlantischen Subtropenhoch. Das dortige Deformationsfeld ist dem Deformationsfeld der Westpazifik vollkommen analog. Längs der WSW—ENE verlaufenden Dehnungsachse bildet sich etwa von Cuba nach dem englischen Kanal und weiter nach Nordrußland die *atlantische Polarfront* (*Atl. PF*) aus. Diese Polarfront bildet die Südgrenze der durch die Ausfallpforte zwischen dem canadischen Monsunhoch und dem Islandtief ausströmenden Polarluft. Auch dieser Polarluftausbruch besteht aus arktischer Polarluft, die sich in maritime Polarluft umwandelt.

Längs der östlichen trogartigen Fortsetzung des Islandtiefs nördlich von Norwegen bildet sich gewöhnlich eine *atlantische Arktikfront* (*Atl. AF*) zwischen der erwärmten maritimen Polarluft aus SW und der unverfälschten Arktikluft von ENE. Die Karte des mittleren Druckes zeigt allerdings keinen Sattelpunkt an der betreffenden Stelle, aber auch in der Strömung, die der mittleren Druckverteilung entspricht, ist genügend meridionale Konvergenz bei der Troglinie vorhanden, um dort eine thermische Front zu erzeugen. Die atlantische Arktikfront endet blind sowohl ostwärts wie westwärts.

Der Sattelpunkt zwischen dem warmen atlantischen Subtropenhoch und dem kalten sibirischen Monsunhoch ist im mittleren Luftdruckfeld nicht sehr ausgeprägt, denn er liegt bald über Westeuropa, bald über Rußland. Um die Mitte des Winters liegt der betreffende Sattelpunkt

recht oft über Frankreich, und die entsprechende Front — die Westgrenze der eurasiatischen Kaltluft — verläuft dann von Norddeutschland über Ostfrankreich nach dem Mittelmeer.

Das Mittelmeerbecken bekommt gemäß der mittleren Luftdruckverteilung im Meeresniveau seine Luftzufuhr aus dem eurasiatischen Kaltluftvorrat. Es ist aber zu bedenken, daß dieser Lufttransport hauptsächlich durch die verhältnismäßig engen Lücken zwischen Alpen und Balkangebirge und zwischen den Gebirgen des Balkans und Kleinasiens stattfinden muß. In der mittleren Paßhöhe der erwähnten Gebirgszüge ist die Luftdruckverteilung schon eine andere, indem das eurasiatische Monsunhoch mit der Höhe schnell an Bedeutung zurücktritt gegenüber dem subtropischen Hochdruckgürtel. Oberhalb der von Osten heranströmenden eurasiatischen Luft weht deshalb ein Westwind, welcher atlantische Luft vom Azorenhoch heranführt. Der nach Europa reichende westliche Teil der eurasiatischen Kaltluft ist also im Mittel sehr seicht und kann das Mittelmeerbecken nur durch die engen Gebirgslücken erreichen. Über dem Mittelmeer angekommen wird die Luft gemäß der mittleren Luftdruckkarte nach Nordafrika weitertransportiert und erreicht schließlich die tropischen Ostwinde. Nur zeitweise bildet sich eine zusammenhängende *Mittelmeerfront* als Südgrenze der eurasiatischen Kaltluft aus.

Die Gebirge, die sich von Kleinasien über Persien, Afghanistan und Tibet bis nach dem inneren China erstrecken, haben keine breiten und niedrigen Pässe, durch die größere Massen der asiatischen Kaltluft südwärts freie Bahn finden könnten. Im Niveau der mittleren Paßhöhe existiert außer dem asiatischen Monsunhoch nördlich der Gebirge auch der subtropische Hochdruckgürtel südlich der Gebirge (Westwinde in der Höhe über Indien). In der Tiefdruckfurche zwischen den beiden Hochs, d. h. ungefähr der Gebirgskette entlang, muß ein frontogenetisches Deformationsfeld wirksam sein, das eine Frontfläche als südliche Begrenzung der asiatischen Kaltluft erzeugt. Diese *asiatische Polarfrontfläche* (*As.PF*) steigt nordwärts an und reicht ebenso hoch wie das entsprechende frontogenetische Deformationsfeld, d. h. bis zu dem Niveau, wo das asiatische Monsunhoch verschwindet.

Vom Ostende der asiatischen Polarfront im inneren China bis zum Westende der pazifischen Polarfront bei den Philippinen hat die Polarluft freie Bahn nach den Tropen. Es ist dies die weitaus wichtigste Lücke im Kreis der Polarfronten. Durch die beiden anderen Lücken, über dem Mexikanischen Golf bzw. über dem Mittelmeer, strömen viel kleinere Luftmengen als durch die ostasiatische Lücke.

Obwohl auch im störungsfreien Fall, den wir behandeln, keine lückenlos um die ganze Erde reichende Polarfront besteht, finden wir es praktisch, besondere Bezeichnungen für die Luft nördlich und südlich der

Polarfronten einzuführen. Für die Luft nördlich der Polarfronten haben wir schon früher in diesem Abschnitt die Bezeichnung *„Polarluft“* eingeführt und lassen von jetzt an diese Bezeichnung im weiteren Sinne auch für die eurasiatische Kaltluft gelten. Die Luft südlich der Polarfronten werden wir *„Tropikluft“* nennen. Die Polarluft, die durch die Polarfrontlücken entschlüpft, nennen wir auf unseren Mittelwertkarten ebenfalls Tropikluft, sobald sie die Lücke passiert ist.

Da somit ständig eine gewisse Menge Polarluft pro Zeiteinheit in Tropikluft verwandelt wird, muß im Mittel die gleiche Menge pro Zeiteinheit von Tropikluft in Polarluft übergehen. Diese letztere Umwandlung geht in der Höhe oberhalb der occludierenden Zyklonen vor sich und wird im Abschnitt **181** behandelt.

Der größte Teil der Tropikluft bleibt aber lange Zeit hindurch Tropikluft und beteiligt sich dauernd an der im Abschnitt **173** beschriebenen zusammengesetzt zonal-meridionalen Zirkulation mit *antizyklonischen Bahnen der Luftteilchen.* Die Zellen antizyklonischer Zirkulation — die subtropischen Antizyklonen — sind im Winter meistens beweglich, und ihre gegenseitige Begrenzungslinien treten deshalb auf der Karte der mittleren Zustände nicht klar zutage. Am deutlichsten erscheint die pazifisch-subtropische Antizyklone als stationäre Zelle.

Innerhalb der Polarluftdomäne befinden sich die zwei Monsunhochs, das asiatische bzw. das nordamerikanische, und die zwei großen Tiefs bei Island bzw. bei den Aleuten. Die Polarluft strömt also *teils in antizyklonischen Bahnen* so wie die Tropikluft, *teils* aber auch *in zyklonischen Bahnen* nach der im Abschnitt **173** beschriebenen Art.

Beim Aufsuchen der Hauptfronten im *Sommer* (Augustkarte Abb. 131) machen wir dasselbe Gedankenexperiment, daß die mittlere Druckverteilung einige Tage störungsfrei bestehen bleibt, so daß ungestörte Frontogenese stattfinden kann. Da das meridionale Temperaturgefälle im Sommer kleiner als im Winter ist, werden die im folgenden beschriebenen sommerlichen Frontbildungen schwächer als die winterlichen.

Der Sattelpunkt des westlichen Pazifiks ist verschwunden, da statt des asiatischen Monsunhochs ein Monsuntief entstanden ist. Zwischen dem großen pazifischen Subtropenhoch und dem flachen Polhoch besteht unter etwa 65° N eine Tiefdruckfurche mit einem oder mehreren frontogenetischen Sattelpunkten. Dort bildet sich die *pazifische Polarfront* (*Paz. PF*), die also im Sommer über Land nördlich des Pazifischen Ozeans gelegen ist. Sie endet blind sowohl nach der asiatischen wie nach der amerikanischen Seite hin.

Über Nordamerika finden wir den Sattelpunkt zwischen den zwei großen subtropischen Antizyklonen, der pazifischen und der atlantischen. Die Dehnungsachse des entsprechenden Deformationsfeldes führt

einerseits nach dem tropischen Pazifik westlich von Mexiko und andererseits durch Canada nach dem Atlantischen Ozean und Europa. Die entlang der Dehnungsachse sich ausbildende Front ist im westlichen Teil die Grenzlinie zwischen zwei permanenten subtropischen Antizyklonenzellen. Wir nennen sie hier die *pazifische Passatfront*. Im östlichen Teil, d. h. von Canada bis nach Europa, scheidet die Front

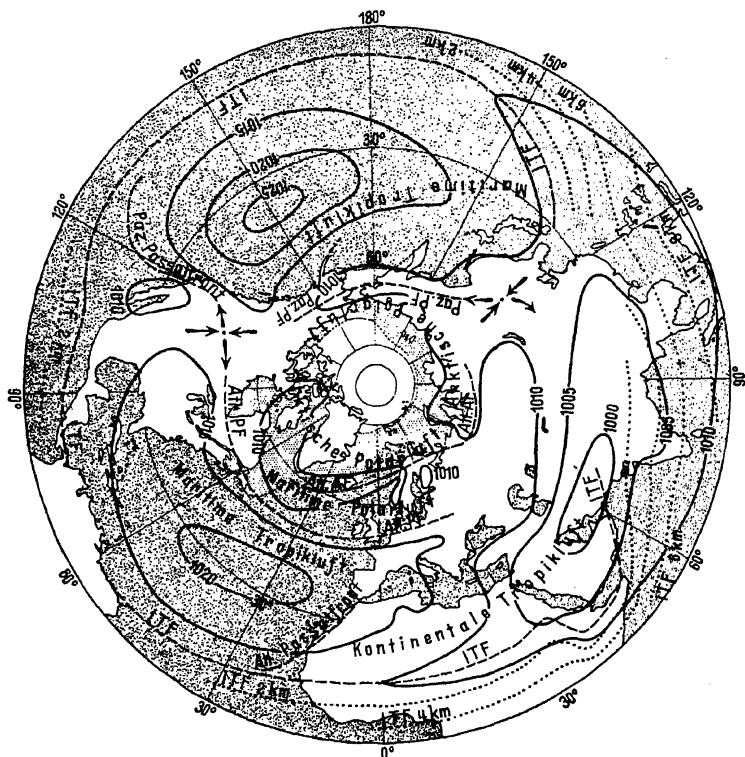



Abb. 131. Hauptfronten der Atmosphäre der Nordhalbkugel. August.

Tropikluft und Polarluft, und wir haben dort die *atlantische Polarfront* (*Atl. PF*).

In der östlichen trogartigen Fortsetzung des Islandstiefs bildet sich ähnlich wie im Winter die *atlantische Arktikfront* (*Atl. AF*) zwischen arktischer und maritimer Polarluft. Eine Fortsetzung derselben längs der russisch-sibirischen Nordküste erscheint auch wahrscheinlich.

Weiter südlich über Sibirien bietet die mittlere Luftströmung keine Möglichkeit für die Bildung stationärer Fronten. Die atlantische Polarfront endet deshalb blind irgendwo über Europa, und von dort bis nach

Ostasien hat der Kreis der Polarfronten eine breite Lücke. Die durch die Lücke ausströmende Polarluft staut sich gegen das chinesische und tibetanische Hochland, überquert aber den westlichen Teil der asiatischen Gebirgskette und erreicht Arabien und die östlichen Mittelmeerländer adiabatisch erwärmt und ausgetrocknet. Ebenso wie im Winter lassen wir natürlich die Polarluft ihren Namen in Tropikluft ändern von dem Zeitpunkt an, da sie die Polarfrontlücke passiert. Und ebenso wie im Winter ist die Schlußfolgerung unumgänglich, daß im Mittel eine entsprechende Menge Tropikluft irgendwo in der Höhe sich in Polarluft umbildet.

Eine weitere wichtige Frontflächenbildung, deren Deformationsfeld allerdings in der Gradientwindströmung am Boden wenig hervortritt, ist die schon in Abschnitt **173** erwähnte Trennungsfläche zwischen Passat und Antipassat im östlichen subtropischen Atlantik. Die Luftdruckkarte in 2000 m Höhe (Abb. 109 A, S. 637) zeigt schon deutlich den entsprechenden Sattelpunkt, etwas westlich von der afrikanischen Westküste, und alle die höheren Luftdruckkarten zeigen es ebenfalls. In der Tat reicht das Deformationsfeld dieser *atlantischen Passatfrontfläche* viel tiefer als bis zum 2000 m-Niveau, und zwar fast bis zum Erdboden. Die Dehnungsachse des zum Sattelpunkte gehörigen Deformationsfeldes (punktierte Linie) verläuft ungefähr SW—NE. Diese Richtung wird dann auch für die niedrigsten Höhenkurven der Passatfrontfläche maßgebend, weiter oben sind sie mehr WSW—ENE orientiert. Die Temperaturdiskontinuität an dieser Frontfläche ist nur zum Teil aus einer Konzentration des allgemeinen meridionalen Temperaturgefälles im Deformationsfeld entstanden. Wesentlich ist in diesem Fall auch der im Sommer sehr große zonale Temperaturunterschied zwischen der heißen Sahara und dem kühleren Atlantischen Ozean.

Die atlantische Passatfrontfläche bildet den Ostabschluß der im Sommer permanenten subtropischen Antizyklonenzelle des Atlantik (das Azorenhoch), und insofern ist sie mit der pazifischen Passatfrontfläche vollkommen analog. Während die pazifische Passatfront in der atlantischen Polarfront eine Fortsetzung findet, muß aber die atlantische Passatfrontfläche in der durch die Mittelwerte definierten Wetterlage irgendwo über Südeuropa blind enden.

Die beiden erwähnten stationären Passatfrontflächen bestehen wahrscheinlich auch im Winter, aber die mittlere Luftdruckverteilung am Boden gibt nicht genug Anhalt zu ihrer genaueren Festlegung auf der Karte.

Auf der *Südhalbkugel* (Abb. 105 und 106, S. 633) gibt es nur einen einzigen durch das ganze Jahr hindurch quasipermanenten Sattelpunkt des Subtropengürtels, nämlich den im Südpazifik. In der warmen

Jahreszeit sind außerdem quasipermanente Sattelpunkte mit zugehörigen frontogenetischen Bewegungsfeldern über den drei südlichen Kontinenten wirksam. Die Dehnungsachsen aller dieser Deformationsfelder (gestrichelte Linien) verlaufen NW—SE, und längs derselben bilden sich *Passatfronten*, die weiter südlich in *Polarfronten* übergehen. Auch zwischen den beweglichen Antizyklonenzellen bestehen NW—SE orientierte ostwärts wandernde Passatfronten, die sich an ostwärts wandernde Polarfronten anschließen. Diese *beweglichen* Fronten lassen sich natürlich nicht an Hand der Karten des mittleren Luftdruckfeldes studieren, und da synoptische Luftdruckkarten für größere zusammenhängende Gebiete der Südhalbkugel bisher fehlen, wissen wir leider wenig über die dortigen Frontenbildungen.

Die *Intertropikfront* (*ITF*) oder kürzer die *Tropikfront* bildet die Scheide zwischen den Tropikluftmassen beider Halbkugeln[1].

Im Falle der vollständigen Symmetrie der Atmosphäre beider Halbkugeln müßte eine zusammenhängende Tropikfront als Trennungslinie zwischen dem ENE-Passat der Nordhalbkugel und dem ESE-Passat der Südhalbkugel genau längs des Äquators liegen. Eine solche Tropikfront wäre aber nur uneigentlich eine Front, denn die Temperatur der beiden Passate würde wegen der Symmetrie identisch sein, so daß keine Diskontinuität nachzuweisen wäre.

Die Symmetrie der Atmosphäre beiderseits des Äquators ist aber schon wegen des umgekehrten Jahreszeitwechsels der beiden Halbkugeln selten erfüllt. Auch die Land- und Seeverteilung in den Tropen ist keineswegs um den Äquator symmetrisch und stört deshalb ebenfalls die Symmetrie der Atmosphäre. So kommt es, daß der Passat der einen Halbkugel oft merkbar kälter ist als der der anderen Halbkugel und über den Äquator hinwegdringt. Die über den Äquator vorgedrungenen Luftmassen müssen gemäß Abschnitt **130**, S. 487, antizyklonisches Wirbeln, d. h. in den typischen Fällen auch antizyklonische Krümmung der Stromlinien aufweisen. Die Stromlinienkarten des Tropengürtels[2] (Abb. 132 und 133) bestätigen dies.

Im *Nordwinter* (Abb. 132) begegnen sich die Passate im Ostpazifik und im Atlantik ziemlich nahe nördlich des Äquators und es kommen dort nur schwache Andeutungen des antizyklonischen Wirbelns der von der Südhalbkugel herübergetretenen Strömung zum Vorschein. Im Indischen Ozean aber verlegt der relativ kalte asiatische Winter-

[1] Die über den Äquator her vorgedrungene Tropikluft wird auch „Äquatorialluft" genannt [vgl. die Abhandlungen (38) und (40) der Bibliographie].

[2] Wesentlich auf W. Köppens Windkarten der Ozeane gestützt. Die Ergänzungen der Stromlinien über Land sind mit Hilfe der mittleren Druckkarten vorgenommen worden.

monsun die Tropikfront ziemlich weit südlich des Äquators, und die Monsunströmung biegt beim Übertritt zur Südhalbkugel deutlich antizyklonisch um.

Im *Nordsommer* (Abb. 133) wird die Tropikfront zum Teil noch weiter aus der Äquatorlage verschoben, und zwar jetzt überall nach Norden zu. Im Ostpazifik liegt die Tropikfront so nördlich, daß der SE-Passat gerade Raum hat, in SW umzuschwenken, und von Westafrika bis nach Ostasien findet man überall die Fortsetzung des SE-Passates der Südhalbkugel nördlich des Äquators in Form einer SW-Strömung (antizyklonisches Umbiegen). Im ägyptischen Sudan erreicht die Tropikfront etwa 18° N, über dem westlichen Indien etwa 25° N und in Ostasien existiert die Tropikfront am Boden überhaupt nicht, denn die S- und SW-Winde setzen sich dort bis zur gemäßigten Zone fort. Die nordpazifische Tropikluft ist also im Sommer zum Teil importierte Tropikluft von der Südhalbkugel.

Die zur Tropikfront gehörige Tropikfront-

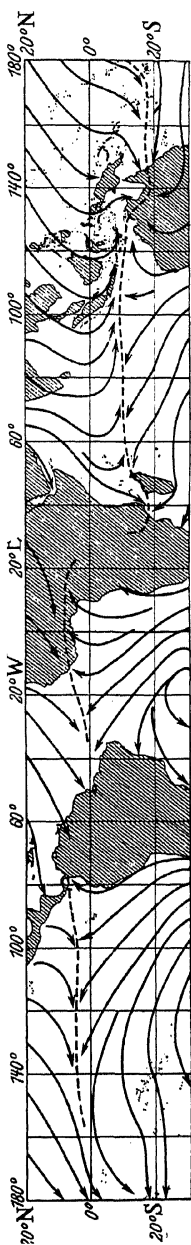



Abb. 132. Die Intertropikfronten. Nordwinter.

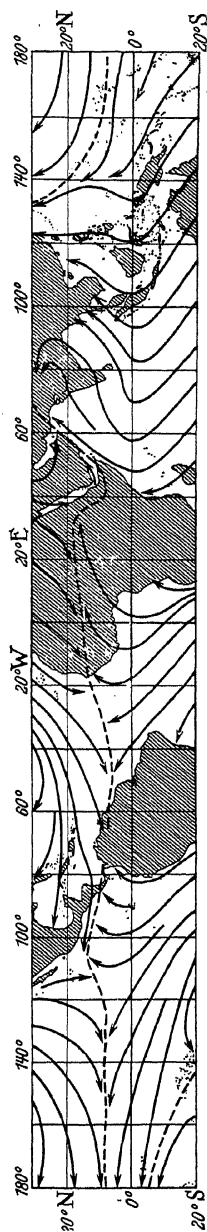



Abb. 133. Die Intertropikfronten. Nordsommer.

fläche steigt in den meisten Fällen äquatorwärts an. Im kalten Keil befindet sich dann der über den Äquator her vorgedrungene Passat, der in den typischen Fällen mit Westkomponente auftritt.

Ein vertikaler Meridionalschnitt durch diese Windsysteme, so wie sie im Sommer über Indien zu beobachten sind, ist schon in Abb. 115, S. 649, gegeben worden. Die meridionale Neigung der Tropikfrontfläche an der steilsten Stelle scheint nach jener Darstellung etwa 1/350 zu betragen: d. h. eine bedeutend kleinere Neigung als die der Polarfrontflächen. Oberhalb des Keiles wehen die gewöhnlichen äquatorialen Ostwinde. Analoges gilt für die Tropikfront über dem Sudan im Nordsommer.

Einen weiteren Anhaltspunkt liefern die Wolkenbeobachtungen von Manila während des Sommermonsuns:

	Juli	August	September
Hohe Wolken aus	N 76 E	N 84 E	N 63 E
Mittelhohe „ „	S 55 W	S 54 W	S 66 W
Untere „ „	S 54 W	S 55 W	S 69 W
Wind am Boden.	S 47 W	S 51 W	S 49 W

Der SW-Monsun (der umgebogene Passat von der Südhalbkugel) überschreitet also das Niveau der mittelhohen (5 km), aber erreicht nicht das Niveau der hohen Wolken (10 km). Der Horizontalabstand von Manila nordostwärts nach der Intertropikfront beträgt gemäß der Karte (Abb. 131) etwa 2000 km. Die Neigung der Tropikfrontfläche ist also hier jedenfalls kleiner als $^1/_{200}$ und größer als $^1/_{400}$, d. h. von derselben Größenordnung wie über Indien.

Mit diesen wenigen Angaben über die Neigung der Tropikfrontfläche läßt sich immerhin ihre Topographie angenähert angeben. Dies ist auf der Karte (Abb. 131) mittels Höhenkurven für 2, 4, 6 bzw. 8 km Seehöhe versucht worden (vgl. auch Abb. 109, S. 637ff.). Bei gestörten Verhältnissen wird die Fläche zwischen extremen Lagen oberhalb und unterhalb der hier angegebenen mittleren Lage schwanken. Gegen den Äquator zu muß die Fläche entweder horizontal werden (vgl. **128**), oder sie muß schon in einem gewissen Abstand vom Äquator diffus enden. Das letztere ist wohl das wahrscheinlichere.

Die Topographie der Tropikfrontfläche zur Zeit ihrer maximalen Verschiebung südlich des Äquators dürfte der eben beschriebenen Topographie spiegelbildlich ähneln, d. h. die Fläche muß auch dann mit einer Neigung von rund $^1/_{300}$ äquatorwärts ansteigen.

178. Wellen- und Wirbelbildungen an Polar- und Arktikfronten. Die im vorigen Abschnitt lokalisierten Frontflächen bildeten sich unter der Voraussetzung der Störungsfreiheit des den klimatologischen Druckkarten entnommenen mittleren Zustandes der Atmosphäre. Wir geben

jetzt die vereinfachende Voraussetzung der Störungsfreiheit auf und lassen die Frontflächen Wellen bilden, die zu größeren oder kleineren Störungen der großen Zirkulationssysteme führen. In diesem Abschnitt beschreiben wir nur die typische Entwicklung der *außertropischen* Frontwellen, während die tropischen Frontwellen erst in Abschnitt **185** besprochen werden. Alle Abbildungen und der ganze Text beziehen sich auf die *Nord*halbkugel.

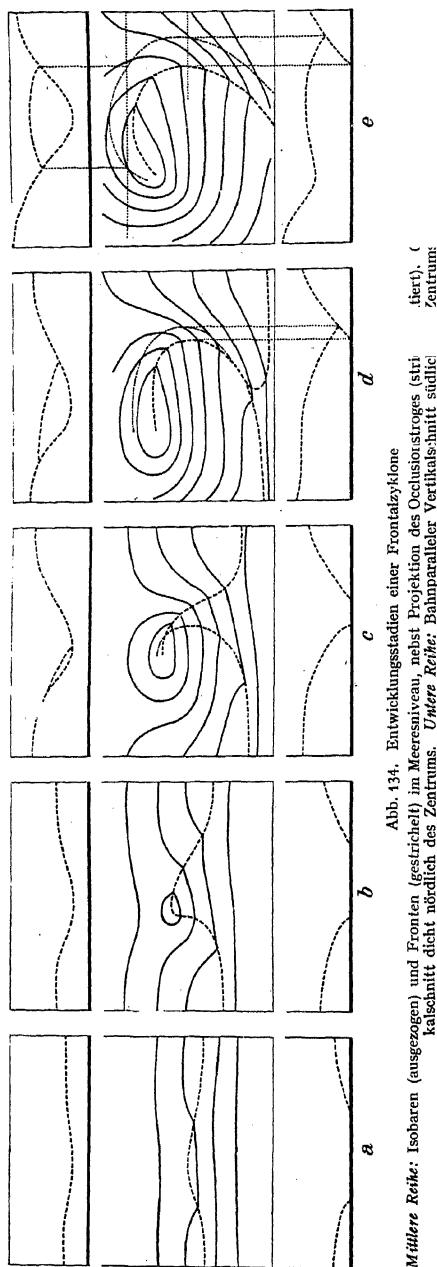
Gemäß früherem Beweis (**128**), ist der Gleitwirbel an einer Frontfläche immer zyklonischen Umlaufsinnes, und eine *zonale* Frontfläche verläuft deshalb zwischen Grundströmungen, die sich einer der folgenden Kategorien zuordnen lassen: A. beide Strömungen aus Westen kommend, diejenige nördlich der Front schwächer als die südlich davon; B. die Strömung nördlich der Front aus Osten, die südlich der Front aus Westen kommend; C. beide Strömungen aus Osten, diejenige nördlich der Front stärker als die südlich der Front. Es müssen natürlich, um diese Klassifikation durchzuführen, die Strömungsgeschwindigkeiten der frontnahen Teile beider Strömungen verglichen werden, denn im allgemeinen Fall ändert sich die Geschwindigkeit der Grundströmung mit wachsendem Abstande von der Front.

A. Die Abb. 134a—e stellt die Entwicklung der Frontwelle mittels eines Horizontalschnittes (mittlere Reihe) und zweier bahnparalleler Vertikalschnitte (obere und untere Reihe) dar.

Abb. 134a zeigt die neugebildete Frontwelle, deren Amplitude noch ganz gering ist. Die Isobaren, die in jedem Augenblick als annähernde Stromlinien gedeutet werden können, zeigen eine vollkommene Ähnlichkeit mit den in Abschnitt **139 (I)** auf qualitativ-theoretischem Wege abgeleiteten und in Abb. 73A dargestellten Stromlinien in der Nähe einer in Schwingung geratenen schrägen Diskontinuitätsfläche, welche den Erdboden schneidet.

Während des Ostwärtswanderns der Frontwelle wächst ihre Amplitude — ein deutliches Zeichen der Instabilität des Grundzustandes — und auch ihre Beeinflussung des ursprünglichen Druckfeldes. In Abb. 134b findet man an der Spitze der warmen Zunge einen Tiefdruck, der schon von Anfang an relativ zur Frontwelle etwas zurückbleibt. Diesem Druckfelde entsprechen natürlich Stromlinien von dem Typus der Abb. 73A, die notwendigerweise in instabilen Wellen auftreten müssen.

Die fortgesetzte Verwirbelung der Wellenzyklone führt zur Einengung und zur baldigen „Occlusion" der nachhängenden Spitze der warmen Zunge, die zwischen den beiden Kaltluftkeilen in die Höhe gehoben wird (Abb. 134c). Der eingeleitete Occlusionsvorgang läßt allmählich immer mehr von den Luftmassen der warmen Zunge in die Höhe steigen, so daß die Kaltluft der Zyklonenvorderseite und der Zyklonenrückseite, die von einander durch die Occlusionsfront getrennt

Abb. 134. Entwicklungsstadien einer Frontalzyklone
Mittlere Reihe: Isobaren (ausgezogen) und Fronten (gestrichelt) im Meeresniveau, nebst Projektion des Occlusionstroges (stri tiert). (
kalschnitt dicht nördlich des Zentrums. *Untere Reihe:* Bahnparalleler Vertikalschnitt südlic Zentrum

bleiben, bald das ganze Zyklonengebiet in der untersten Atmosphäre einnimmt (Abb. 134d und e).

Der Occlusionsvorgang wurde im Abschnitt **139 (III)** qualitativ abgeleitet unter der plausiblen Annahme, daß innerhalb der instabilen Welle die Kaltluft absinken und die Warmluft aufsteigen wird. Wir bringen in den folgenden Abschnitten die nähere Begründung und die weiteren Folgerungen des Occlusionsvorganges. Ein neuer Zug ist aber in den Abb. 134d und e hineingekommen, den man nicht in den entsprechenden Abbildungen des Abschnittes **139** finden wird, nämlich das Nachhängen der südlichen Enden der Kaltluftzungen. Dies ist jedoch nur eine Folge der mit Annäherung an das südlich angrenzende Hochdruckgebiet abnehmenden Geschwindigkeit der warmen Grundströmung. Kaltluftzungen, die weit südwärts bis zu diesem langsam bewegten Teil der Grundströmung vorstoßen, müssen notwendigerweise zurückbleiben im Verhältnis zu der schnell ostwärts wandernden Zyklone.

Die zwei schematischen Vertikalschnitte parallel zur Fortbewegungsrichtung der Zyklone veranschaulichen die Lage der Frontflächen

im Raume. Die oberste Reihe enthält die Vertikalschnitte, die man mittels aerologischer Aufstiege dicht nördlich der Bahn des Zyklonenzentrums bekommen würde. Sie zeigen anfangs (a und b) eine einfache sich vertiefende Welle in der Polarfrontfläche, deren Wellental nicht zum Erdboden hinabreicht. In den späteren Stadien füllt der Occlusionsvorgang das Wellental wieder aus mit Polarluft, welche das Zentrum umströmt und die betrachtete Schnittebene von Süden her erreicht. Südlich der Zyklonenbahn (unterste Reihe) findet man anfangs (Stadien a bis c) einen Wellenquerschnitt, dessen unteren Teil die Erdoberfläche sozusagen weggeschnitten hat. Dieser unvollständige Wellenquerschnitt besteht im vorderen Teil der Zyklone aus einer „Warmfrontfläche", deren Schnittlinie mit der Erdoberfläche die „Warmfront" ist, und im hinteren Teil der Zyklone aus einer „Kaltfrontfläche", die den Erdboden längs der „Kaltfront" schneidet. Die Kaltfront bewegt sich, in der Ebene unseres Vertikalschnittes gemessen, schneller als die Warmfront und holt sie schließlich ein, womit das Occlusionsstadium eingeleitet wird.

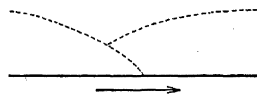



Abb. 135. Vertikalschnitt durch Occlusion vom Typus 2. Kälteste Luft im postfrontalen Keil.

Der Vertikalschnitt durch die Occlusionsfront kann zweierlei Typen aufweisen, je nachdem ob die präfrontale oder die postfrontale Kaltluft die kältere ist. Die Abb. 134 enthält nur die erste Alternative (Occlusionstypus 1), während die zweite Alternative in der Abb. 135 zur Darstellung gebracht ist (Occlusionstypus 2). An den Westküsten der Kontinente im Winter und an den Ostküsten im Sommer bewirkt der zonale Temperaturgradient, daß der Occlusionstypus 1 bevorzugt wird. An den Ostküsten im Winter und an den Westküsten im Sommer ist entsprechend der Occlusionstypus 2 bevorzugt. In Abwesenheit systematischer zonaler Temperaturgradienten ist nahe dem Zentrum die präfrontale Kaltluft immer kälter als die postfrontale (Occlusionstypus 1), weiter südlich umgekehrt (Occlusionstypus 2).

Während der ganzen Entwicklung, die durch die Abb. 134a bis e dargestellt ist, bewegt sich die Zyklone von links nach rechts. Das theoretische Resultat [vgl. Abschnitt **139 (III)**], daß die Initialwelle Abb. 134a schneller ostwärts fortschreitet als die Luft der warmen Grundströmung, ist in dem einzigen bis jetzt genau analysierten Fall[1] bestätigt worden. Was aber das Quantitative betrifft, so fallen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, die bis jetzt theoretisch berechnet worden sind (**160**) durchgehends etwas zu groß aus — offenbar aus dem Grunde, weil in Abschnitt **160** sowohl die Warmluft als auch die Kaltluft iso-

[1] BERGERON u. SWOBODA: Wellen und Wirbel an einer quasistationären Grenzfläche über Europa. Veröff. d. Geophys. Inst. Leipzig 1924.

therm und dadurch bedeutend stabiler als in der Wirklichkeit vorausgesetzt worden sind. In allen späteren Stadien geht die Zyklonenwelle nicht mehr schneller, sondern langsamer als die Luft der warmen Grundströmung; offenbar aus dem in **139** (III) angegebenen Grunde, daß die Störung während der Verwirbelung einen allmählich wachsenden Anteil von Luft aus der langsam bewegten kalten Grundströmung aufnimmt.

Die Vertiefung des Druckzentrums dauert mindestens bis zum Zeitpunkt des Occludierens fort, und in vielen Fällen ist hiermit schon die größte Energieentfaltung erreicht. Nachher verlangsamt sich die Zyklone und stirbt als kalter, annähernd symmetrischer Luftwirbel mit spiralenförmig aufgerollter Occlusionsfront wieder ab. In anderen Fällen tritt eine Art obere Wellenregeneration ein, die im Stadium e der Abb. 134 angedeutet ist, und die darin besteht, daß sich an der Kaltfrontfläche eine obere Welle bildet, die unter Vertiefung ostwärts wandert. Ihre Wirkung unten besteht in einer Vertiefung des Druckzentrums bei dem zurückgebogenen blinden Ende der Occlusionsfront, wo alsbald die größten Druckgradienten und damit auch die größten Windstärken der ganzen Zyklone entstehen. Diese obere Welle an der Kaltfrontfläche ist wahrscheinlich eine Rückwirkung von den Wellen der Tropopause, welche ihrerseits von der Zyklone erregt worden sind (s. Abschnitt **182** und **183**). Die Wiederbelebung der Zyklone durch die oberen Wellen dauert gewöhnlich nicht lange. Während des darauffolgenden Absterbens nimmt die Zyklone auch in diesem Fall die Struktur des zirkularen Wirbels an.

Das tagelange Anwachsen und das darauffolgende tagelange Abklingen der kinetischen Energie der Zyklone geht meistens ziemlich kontinuierlich vor sich. In gewissen Fällen beobachtet man aber eine plötzliche Zunahme der kinetischen Energie, und zwar bisweilen auch in occludierten Zyklonen, in denen keine großen horizontalen Temperaturgradienten mehr vorhanden sind, und die allem Anschein nach bald absterben müßten. Gemäß REFSDAL[1] ist diese plötzliche, von der Normalentwicklung einer Zyklone abweichende Energieentfaltung eine Folge eingetretener Feuchtlabilität der Zyklonenluft. Wie wir in Abschnitt **180** sehen werden, ist nämlich die aus feuchtlabiler Luft zusammengesetzte Zyklone imstande, größere Mengen kinetischer Energie aus der potentiellen zu schöpfen, als es unter feuchtstabilen Verhältnissen möglich wäre.

B. Das Aussehen der jungen Wellenstörungen einer Front *zwischen entgegengesetzt gerichteten Grundströmungen* geht mit voller Deutlichkeit aus der Stromlinienabbildung 73 B in Abschnitt **139** hervor und braucht hier nicht wiederholt zu werden. Die weitere Entwicklung dieser Front-

[1] REFSDAL: l. c. S. 693.

wellen verläuft genau nach demselben Schema wie im Fall A (Abb. 134). Der wesentlichste Unterschied besteht darin, daß der Ostwind, der im Falle A nur eine Wirkung der wachsenden Frontwelle war, jetzt, wenn er sowohl durch die Frontwelle als auch durch die Grundströmung gegeben ist, stärker wird. Die Fortbewegungsgeschwindigkeit der Welle von West nach Ost wird um so langsamer, je stärker der Ostwind der kalten Grundströmung ist, wie das auch theoretisch zu erwarten ist, denn die konvektive Geschwindigkeit der Welle wird dann kleiner oder gar negativ (d. h. westwärts gerichtet).

C. Die jungen Wellenstörungen einer Front *zwischen zwei aus Osten kommenden Grundströmungen* sind durch die Stromlinienabbildung 73 C im Abschnitt **139**, nach der man sich das Isobarenbild direkt vorstellen kann, hinreichend dargestellt. Die Wellenstörungen dieser Art sind bisher wenig untersucht worden, da sie hauptsächlich an den Arktikfronten auftreten und sich somit außerhalb der dichten Beobachtungsnetze befinden. Die asiatische Polarfront entwickelt zuweilen im Winter westwärts wandernde Wellen, die wahrscheinlich auch von dem in Abb. 73 C dargestellten Typus sind. Sie bilden anfangs nur Tiefdruckeinbuchtungen am Südrand des großen kalten Hochdrucks (das sibirische oder eine westliche Fortsetzung desselben), aber können später auch Tiefdruckgebiete mit geschlossenen Isobaren entwickeln. Wenn die betreffende Wetterlage über Europa eintritt, ist aber immer eine Bodenschicht kalter Luft vorhanden, welche die Frontwellenstruktur maskiert und somit die Einzelheiten im Lebenslauf dieser Frontwellen verborgen hält. Es ist jedoch anzunehmen, daß auch diese Frontwellen zwischen zwei östlichen Grundströmungen schließlich verwirbeln in ähnlicher Weise wie die vorher beschriebenen.

Bisher wurde nur von den im Anfangszustand zonal orientierten Fronten gesprochen, und die kalte Luft wurde immer auf der Nordseite der Front angenommen, was ja natürlich das häufigste ist. Allen unter A, B und C beschriebenen Fronten kann aber eine beliebige Azimutorientierung erteilt werden, und es entwickeln sich in der neuen Lage ebenfalls Frontwellen, deren Lebenslauf wir schon kennen. So bekommt man z. B. im Fall entgegengesetzter Grundströmungen durch ein positives Drehen um 90° nordwärts wandernde Frontwellen zwischen einer warmen Südströmung im Osten und einer kalten Nordströmung im Westen der Front. Durch nochmaliges positives Drehen um 90° bekommt man den Fall der westwärts wandernden Frontwellen zwischen einer warmen Ostströmung im Norden und einer kalten Weströmung im Süden der Front usw. Die letztere Wetterlage, die durch eine Umkehr des meridionalen Temperaturgefälles gekennzeichnet ist, kommt natürlich selten vor. Relativ am häufigsten ist sie im Sommer über

Europa, wenn ein kontinentaler nordeuropäischer Oststrom bedeutend wärmer als ein gleichzeitig vorhandener maritimer Weststrom über Mitteleuropa sein kann.

Wo die Fronten durch Gebirgsländer gehen, werden die Frontwellen durch die orographischen Hindernisse in vielerlei Weise verzerrt. Auf die Beschreibung dieser Verhältnisse müssen wir hier verzichten.

179. Die Verteilung der Vertikalbewegung in den Polarfront- und Arktikfrontzyklonen. Die Vertikalkomponenten der Geschwindigkeit größerer Luftmassen überschreiten wahrscheinlich nie die Größenordnung 10^{-2} m/sec und sind deshalb nicht direkt meßbar[1].

Die in Abschnitt **140** abgeleiteten Regeln für *die relative Vertikalbewegung* der Warm- und Kaltluft *bei den Fronten* gelten ohne weiteres, solange die Zyklone noch wellenähnlich ist, so daß die Kaltluft ihre zyklonische und die Warmluft ihre antizyklonische Orbitalbewegung behalten. Eine allgemeingültige Fassung derselben Regeln, ohne Voraussetzung über regelmäßige Orbitalbewegungen, sei hier gegeben: *Hat die Differenz $j'_x - j_x$ der fronttangentialen Beschleunigungen der Warmluft und der benachbarten Kaltluft eine solche Richtung, daß längs ihr gesehen die Warmluft zur rechten und die Kaltluft zur linken liegt, so gleitet dort die Warmluft aufwärts relativ zur Kaltluft; hat dagegen dieselbe Differenz der fronttangentialen Beschleunigungskomponenten die umgekehrte Richtung, so gleitet die Warmluft an der betreffenden Stelle abwärts relativ zur Kaltluft.*

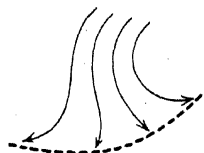



Abb. 136. Teils zyklonische, teils antizyklonische Kaltluftströmung hinter einer Kaltfront.

Das in Abschnitt **140** abgeleitete Aufgleiten der Warmluft relativ zur Kaltluft auf der Wellenvorderseite dauert erfahrungsgemäß während der ganzen Zyklonenentwicklung an, mit anderen Worten, die Warmfrontfläche bleibt immer eine Aufgleitfläche. Auf der Rückseite der Zyklone findet aber das für die Initialwelle gefundene Abgleiten der Warmluft nicht unbegrenzt lange statt, und zwar hängt dies damit zusammen, daß bei wachsender Amplitude der Zyklonenwelle die kalten Teilchen nicht mehr so wie in der Initialwelle ausnahmslos in zyklonisch gekrümmten Orbitalbahnen laufen. Dieses Phänomen ist oft im hinteren äußeren Teil der Zyklone dadurch erkennbar (Abb. 136), daß die südwärts vorstoßende Kaltluft nach Westen (antizyklonisch) umbiegt, so daß ihre dortige fronttangentiale Beschleunigungskomponente j_x nicht mehr dasselbe Vorzeichen hat wie in der

[1] In den engen auf- und absteigenden Luftströmungen, die der Turbulenz ihre Entstehung verdanken, oder auch in Böen und bei der Bildung von Cumulonimbuswolken usw. kommen viel größere Vertikalkomponenten vor, aber diese sind nur als eine „Kleinstruktur" der sonst in vertikaler Richtung sehr langsam bewegten großen Luftmassen aufzufassen (vgl. Abschnitt **175**).

Initialwelle. Die durch die Abb. 136 dargestellte kalte Strömung hat am Vorderrand eine Bewegungskomponente normal zur Kaltfront

$$v_y = \frac{-s\,G_x + j_x}{2\Omega_z} = -\frac{s\,G_x}{2\Omega_z} + \frac{j_x}{2\Omega_z}$$

gleich der Summe aus der Gradientwindkomponente normal zur Front $-\frac{s\,G_x}{2\Omega_z}$ und der von der Tangentialbeschleunigung herrührenden Zusatzkomponente $j_x/(2\Omega_z)$. Diese Zusatzkomponente bewirkt in der Nähe des Zyklonenzentrums, wo j_x und $-G_x$ entgegengesetzt gerichtet sind, ein Ausbreiten der Kaltluft mit Untergradientwindgeschwindigkeit normal zur Frontrichtung. Weiter vom Zentrum weg, wo die Kaltluft antizyklonisch umbiegt, sind aber j_x und $-G_x$ gleichgerichtet, so daß sich die Kaltluft mit Übergradientwindgeschwindigkeit normal zur Frontrichtung ausbreitet. Das Auf- bzw. Abgleiten auf der Kaltfrontfläche hängt auch noch von dem Beschleunigungszustand der benachbarten Warmluft ab, aber es ist einleuchtend, daß ein Aufgleiten der Warmluft dort am wahrscheinlichsten ist, wo der Kaltluftkeil mit Übergradientwindgeschwindigkeit vorstößt, d. h. im hinteren äußeren Teil der Zyklone.

Das Auftreten der Frontflächen entweder als Aufgleit- oder als Abgleitflächen ist entscheidend für die Wolken- und Niederschlagsbildung, worüber in Kapitel XIX näher berichtet wird. Dort wird auch die Bodenreibung berücksichtigt, die für die großen Züge der Zyklonenentwicklung ziemlich belanglos ist.

Die Vertikalbewegung der großen einheitlichen Luftmassen wurde in Abschnitt **160 (II)** berührt insofern, als ein Beweis für eine systematische Neigung der Orbitalbahnen in der Zyklonenwelle geliefert wurde. Diese Neigung der Orbitalbahnen ist eine solche, daß alle Teilchen (warme oder kalte) vor der Zyklonenwelle steigen und hinter derselben absinken. Diese theoretische Ableitung gilt natürlich nur für das erste wellenähnliche Stadium der Zyklone, und wir bringen deshalb hier eine von Brunt und Douglas[1] stammende Herleitung der Verteilung der Vertikalbewegung, welche auf beliebige synoptische Lagen anwendbar ist.

Indem wir die innere Reibung oberhalb der Bodenreibungsschicht vernachlässigen und weiterhin die Bewegung als rein horizontal[2] betrachten, gelten dort die Bewegungsgleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_2 v_x = -s\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega_z v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_2 v_y = -s\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega_z v_x \end{aligned}$$

[1] Memoirs of the Royal Meteorological Society, Vol. III. No. 22. 1928.

[2] Die vollständige dreidimensionale Behandlung des Problems würde gemäß Brunt und Douglas die Resultate nicht wesentlich modifizieren.

wo die Operation ∇_2 sich auf die beiden horizontalen Koordinaten x und y bezieht. Partielle Differentiation dieser Gleichungen nach der Zeit (unter Vernachlässigung der kleinen Glieder, die von der zeitlichen Veränderlichkeit von s herrühren) gibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{dv_x}{dt} = -s\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial t} + 2\Omega_z\frac{\partial v_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{dv_y}{dt} = -s\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial t} - 2\Omega_z\frac{\partial v_x}{\partial t}$$

Mit Hilfe dieser neuen Gleichungen eliminieren wir die lokalen Zeitableitungen von v_x und v_y aus den Gleichungen (1) und lösen in bezug auf v_x und v_y auf:

$$(2)\quad \begin{cases} v_x = -\dfrac{s}{2\Omega_z}\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{1}{2\Omega_z}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_2 v_y) - \dfrac{s}{4\Omega_z^2}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{1}{4\Omega_z^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{dv_x}{dt}, \\ v_y = \dfrac{s}{2\Omega_z}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{2\Omega_z}(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_2 v_x) - \dfrac{s}{4\Omega_z^2}\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial p}{\partial t} - \dfrac{1}{4\Omega_z^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial v_y}{\partial t} \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen schreiben BRUNT und DOUGLAS als eine einzige Gleichung mit Hilfe der Imaginärbezeichnungen, die sie für die Ableitung verwendet haben. Wir ziehen es vor, die Gleichungen (2) in der folgenden Vektorgleichung (2′) zusammenzuziehen:

$$(2')\quad \boldsymbol{v} = \frac{s}{2\Omega_z}\boldsymbol{N}\times\nabla_2 p + \frac{1}{2\Omega_z}\boldsymbol{N}\times(\boldsymbol{v}\cdot\nabla_2\boldsymbol{v}) - \frac{s}{4\Omega_z^2}\nabla_2\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{4\Omega_z^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

$\boldsymbol{N}$ ist hier ein vertikal nach aufwärts gerichteter Einheitsvektor. Das *erste Glied* in (2′) stellt die senkrecht zum Druckgradienten $-\nabla_2 p$ gerichtete Gradientwindgeschwindigkeit dar. Dieses Glied ist bedeutend größer als die übrigen und gibt schon einen guten Näherungswert für den wirklichen Windvektor. Genaue Übereinstimmung zwischen Wind und Gradientwind besteht aber nur, wenn der Zustand stationär ist, so daß die beiden letzten Glieder verschwinden, und wenn die Bewegung außerdem rein translatorisch ist, so daß $\boldsymbol{v}\cdot\nabla_2\boldsymbol{v}$ gleich Null wird. Das *zweite Glied* gibt den Zusatzvektor zu dem reinen Gradientwind, der von der räumlichen Veränderlichkeit des Geschwindigkeitsfeldes herrührt: dieser Zusatzvektor ist senkrecht zu der „konvektiven" Beschleunigung $\boldsymbol{v}\cdot\nabla_2\boldsymbol{v}$, eine Größe, die man direkt aus der Karte der Horizontalgeschwindigkeit ableitet[1]. Dieses Glied gibt eine Windkomponente vom höheren zum tieferen Druck bei Windzunahme in der Bewegungsrichtung, vom tieferen zum höheren Druck bei Windabnahme in der Bewegungsrichtung[2], und es ergibt Übergradientwindgeschwindigkeit bei antizyklonischer und Untergradientwindgeschwindigkeit bei zyklonischer Krümmung der Stromlinien. Das *dritte Glied* kann direkt aus dem

---

[1] Siehe BJERKNES: „Dynamische Meteorologie und Hydrographie", Teil II, Kinematik.

[2] Dieser Effekt ist in Abschnitt 173 behandelt.

Skalarfeld von $\partial p/\partial t$ — der sog. Isallobarenkarte — abgeleitet werden: es verlangt einen Zusatzvektor zum Gradientwind in der Richtung des isallobarischen Gradienten. Das *vierte Glied*, die lokale Zeitableitung der individuellen Beschleunigung, ist weniger anschaulich als die übrigen.

Um die aus der horizontalen Windverteilung (2) oder (2') folgende Vertikalbewegung abzuleiten, bildet man die zweidimensionale Divergenz. Der Gradientwind ist divergenzfrei, und es bleiben nur drei Divergenzglieder übrig:

$$(3)\quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = -\frac{1}{2\Omega_z} \boldsymbol{N} \cdot \operatorname{curl}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla_2 \boldsymbol{v}) - \frac{s}{4\Omega_z^2} \nabla_2^2 \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{4\Omega_z^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

Das erste Glied rechts gibt Divergenz oder Konvergenz, je nachdem ob die konvektive Beschleunigung $\boldsymbol{v} \cdot \nabla_2 \boldsymbol{v}$ antizyklonisch oder zyklonisch wirbelnd ist. Das zweite Glied gibt (in grober Annäherung) Konvergenz in Fallgebieten des Druckes und Divergenz in Steiggebieten des Druckes. Das letzte Glied endlich gibt Konvergenz, wo die Beschleunigung zeitlich zunehmende Divergenz zeigt, und Divergenz, wo die Beschleunigung zeitlich abnehmende Divergenz zeigt.

Gemäß BRUNT und DOUGLAS ist das zweite Glied rechts gewöhnlich überwiegend, so daß die erste Annäherungsregel für die Verteilung der Vertikalbewegung in den untersten Kilometerstufen über flachem Erdboden lautet: *In den Fallgebieten des Druckes herrscht aufsteigende und in den Steiggebieten des Druckes herrscht absinkende Bewegung vor.*

Diese Regel besagt also z. B., daß die Luft auf der Zyklonenvorderseite aufsteigt und auf der Zyklonenrückseite absinkt, d. h. dieselbe Regel, die wir schon für die junge Zyklonenwelle aufstellten, gilt auch in den weiteren Stadien der Zyklone. Der Druckfall hat gewöhnlich seine größten Werte gerade vor der Warmfront und vor der Kaltfront, in den älteren Zyklonen auch vor der rückgebogenen Occlusionsfront. An allen diesen Stellen ist also ein Aufsteigen der Luft vorhanden. Das theoretisch zu erwartende Aufsteigen der Luft in allen Fallgebieten des Druckes und das Absinken derselben in allen Steiggebieten des Druckes erhält eine gute und allseitige Bestätigung durch die beobachtete Verteilung von Wolken und Niederschlägen (s. Kapitel XIX). Das Resultat von BRUNT und DOUGLAS scheint deshalb trotz der offensichtlichen Unvollständigkeit der theoretischen Ableitung ziemlich allgemeingültig zu sein.

Der Occlusionsvorgang ist eine *erste Folge der absinkenden Bewegung hinter der Zyklonenwelle.* Stellen wir uns die mit geneigten Orbitalbahnen vor sich gehende Wellenbewegung zweier unbegrenzter Medien vor, und berücksichtigen wir dann die horizontale Erdoberfläche, so muß die absteigende Komponente der Kaltluft auf der Rückseite der Zyklonenwelle zur Folge haben, daß sich diese Luft am Erdboden ausbreitet. Durch die Arealvergrößerung dieser Kaltluft wird die Warm-

luftzunge am Erdboden in der durch die Abb. 134 dargestellten Weise eingeengt und vom Boden abgehoben, mit anderen Worten, die Zyklone occludiert.

Eine *zweite Folge* der absinkenden Bewegung auf der Rückseite der Zyklone zeigt sich in dem Phänomen der „*Frontolyse*" — der Verwischung der Kaltfront. Die absinkende Kaltluft wird nämlich trockenadiabatisch erwärmt, und ihre Temperatur nähert sich derjenigen der benachbarten Warmluft, so daß die Schärfe der Kaltfront abnimmt.

Allerdings ist eine adiabatische Erwärmung durch Absteigen bis unendlich nahe an einen ebenen Erdboden theoretisch unmöglich, aber durch die Vermittlung des turbulenten vertikalen Luftaustausches wird auch die dünne erdnahe Schicht die Temperatursteigerung, die in der darüberliegenden Luft stattfindet, mitmachen. In dieser Weise wird die Frontolyse bis zum Erdboden durchgreifen. Die etwaige gleichzeitige lokale Abkühlung der vor der Front aufsteigenden Warmluft wird am Erdboden nicht bemerkbar werden, denn dafür wäre ein turbulenter Wärmetransport nach oben notwendig, was nur bei überadiabatischen Gradienten vorkommen kann. *Wenn eine ursprünglich scharfe Kaltfront am Erdboden diffus wird, so besteht also die „Übergangsluft" aus erwärmter Kaltluft und nicht aus abgekühlter Warmluft.*

Abb. 137. Definition der Frontpassage im Thermogramm. *a* Idealisierte Fronten mit Diskontinuität nullter Ordnung. *b* und *c* Frontolysierte Fronten.

Diese gut bewährte Analysenregel für das Frontenzeichnen auf den Wetterkarten wird in der schematischen Abb. 137 illustriert. Das Thermogramm einer Station am Erdboden würde nach der Passage einer idealen, keinen frontolytischen Einflüssen unterworfenen Kaltfront das Aussehen der Abb. 137a links haben. Dieselbe Front unter dem Einfluß der Frontolyse würde im Thermogramm etwa wie die Abb. 137b oder c aussehen. Der Temperaturfall hat dann eine Dauer, die mehrere Stunden betragen kann, aber trotzdem können wir die Passage der Kaltfront zu einem bestimmten Zeitpunkt festlegen, nämlich dann, wenn der erste Temperaturfall beginnt (KF in der Abb. 137).

Wenn eine diffuse Kaltfront umkehrt und sich in eine Warmfront verwandelt, so zeichnen wir die Front zwischen der „Übergangsluft" und der Warmluft. Alle Warmfronten haben mehr oder weniger Übergangsluft, und die gewöhnlich beobachtete Warmfrontpassage gibt deshalb

nicht ein Thermogramm wie Abb. 137a rechts mit ganz plötzlicher Temperatursteigerung, sondern ein Thermogramm etwa wie Abb. 137b oder c mit allmählich anfangender Temperatursteigerung. Auch wenn keine Spur von plötzlichem Temperaturanstieg vorhanden ist (so wie Abb. 137c), kann man immer noch die Warmfrontpassage am Boden definitionsmäßig dort festlegen, wo der allmähliche Temperaturanstieg aufhört (*WF* in der Abb. 137).

Da das Druckfeld in engem Zusammenhange mit dem Temperaturfeld steht, kann man entsprechende Regeln für das Aussehen des Druckfeldes ableiten. Die Abb. 138, oberste Reihe, gibt eine Darstellung der front-

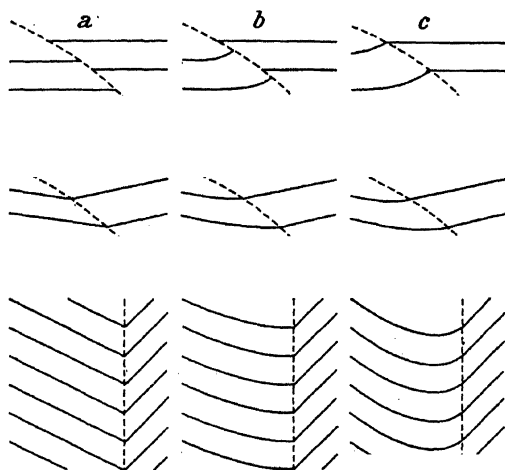



Abb. 138. Frontolyse einer Kaltfront. $a \rightarrow b \rightarrow c$.
Oberste Reihe: Vertikalschnitt des Temperaturfeldes. *Mittlere Reihe:* Vertikalschnitt des Druckfeldes. *Unterste Reihe:* Horizontalschnitt des Druckfeldes.

normalen Vertikalschnitte des Temperaturfeldes a) einer Kaltfrontfläche mit vollständig diskontinuierlichem Temperaturübergang, b) derselben Fläche nach unvollständiger Frontolyse und c) nach vollständiger Frontolyse. Darunter sieht man die entsprechenden Vertikalschnitte des Druckfeldes, und zwar bei a) die „Brechung" der Isobarenflächen bei Durchgang der Frontfläche, bei b) die Abrundung der Isobarenfläche auf der kalten Seite der Frontfläche, wodurch der Knick der Isobaren sich abschwächt und schließlich bei c) das vollständige Verschwinden des Knicks durch fortgesetzte Abrundung der Isobarenflächen auf der kalten Seite. Es ist dies alles eine direkte und einleuchtende Folge der barometrischen Höhengleichung. Die Wirkung der Frontolyse auf das Aussehen der Isobarenkarte im Meeresniveau wird von der untersten Figurenreihe veranschaulicht. Die Front vor der Frontolyse (a) hat

einen scharfen Trog der Isobaren zur Folge. Nach teilweiser Frontolyse (b) hat die Front auf der kalten Seite zyklonisch gekrümmte Isobaren, aber immer noch einen sichtbaren Knick der Isobaren an der Front. Nach vollständiger Frontolyse (c) hat die Front auf der kalten Seite zyklonisch gekrümmte Isobaren, die an der Front selbst sich kontinuierlich dem Verlauf der Isobaren auf der warmen Seite anschließen.

Ein Blick auf die Abb. 134b und c, S. 718, zeigt, daß der Isobarenknick fast oder vollständig verschwunden ist längs eines Kaltfrontstücks in der Nähe des Zentrums der Zyklone, während der Warmfronttrog im Druckfelde unverändert scharf geblieben ist. Da diese Art von *Asymmetrie der Zyklonenwelle* ausnahmslos bei allen Frontwellen eintritt, ist der Schluß berechtigt, daß die Kaltluft dicht hinter der Wellenzyklone immer absinkt.

Eine *dritte Folge* des Absinkens und Ausbreitens der Kaltluft hinter der Zyklone läßt sich mittels des Zirkulationssatzes ableiten (vgl. 130). Die Arealvergrößerung geschlossener horizontaler Kurven innerhalb der sich ausbreitenden Kaltluft vermindert ihre zyklonische Zirkulation und kann schließlich antizyklonische Zirkulation herbeiführen (vgl. Abb. 136). Diese antizyklonische Zirkulation ist nicht immer, aber doch häufig mit antizyklonischen Bahnen der Teilchen verbunden. Die später zu besprechenden wandernden Antizyklonen entstehen gerade durch die antizyklonische Zirkulationsbildung in der absinkenden Kaltluft hinter der Zyklone.

180. Die Energieumsätze in den Polarfront- und Arktikfrontzyklonen. Das Problem der Energieumsätze in den Zyklonen, die sich an der Polar- und Arktikfront bilden, kann nicht gelöst werden, bevor man den Lebenslauf einer Zyklone in Zeit und Raum mittels reichlicher synoptisch-aerologischer Beobachtungen analysieren kann. Was sich vorläufig ganz allgemein sagen läßt, ist erstens, daß die kinetische Energie der Zyklonen ursprünglich zugestrahlte Sonnenenergie war, die Gelegenheit gehabt hat, sich in potentielle und kinetische Energie umzusetzen, ehe sie sich als kinetische Energie der Zyklonen geltend macht, und zweitens, daß wir zwei Wege der Zufuhr dieser kinetischen Energie in das Gebiet der Zyklone angeben können: nämlich sowohl eine direkte Konzentration der schon in den großen Grundströmungen vorhandenen kinetischen Energie im Gebiet der Zyklonen als auch Verwandlung vorhandener potentieller Energie in kinetische. Im folgenden soll versucht werden, in ganz grober Annäherung die Größe der auf dem einen und anderen Weg herangeführten Energiemengen zu schätzen.

(I). *Die Konzentration der kinetischen Energie.* Vor der Zyklonenbildung existiert sowohl in der warmen, wie in der kalten Grundströmung eine

bestimmte, und zwar in zonaler Richtung unveränderliche, kinetische Energiemenge pro Masseneinheit, natürlich in den beiden verschiedenen Grundströmungen von verschiedenem Betrag. Wenn aber dann als Folge der Instabilität der Grenzfläche die Wellenbewegung einsetzt, bekommt die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie eine in zonaler Richtung periodische Verteilung (vgl. Abb. 73 A, B, S. 510). Innerhalb der voraussetzungsgemäß ostwärts gerichteten warmen Grundströmung *konzentrieren sich die größten Geschwindigkeiten und die größte kinetische Energie in den zyklonischen Gebieten*, wo sich die Geschwindigkeit der reinen Wellenbewegung zur Geschwindigkeit der Grundströmung addiert, und die kleinsten Geschwindigkeiten und entsprechende kinetische Energie zwischen den Zyklonen, wo die Geschwindigkeit der reinen Wellenbewegung der der Grundströmung entgegengesetzt gerichtet ist. Ist die kalte Grundströmung westwärts gerichtet (Abb. 73 B), so liegen dort auch die Maxima des Windes und der kinetischen Energie in den Zyklonen, ist dagegen die kalte Grundströmung ostwärts gerichtet (Abb. 73 A), so werden die Zyklonen anfangs durch Minima der kinetischen Energie der Kaltluft begleitet sein.

In den folgenden numerischen Beispielen beschränken wir uns auf die Betrachtung der durch die Wellenbewegung hervorgerufenen Konzentrationen kinetischer Energie innerhalb der *Warmluft*. Vor der Zyklogenese habe die frontparallele warme Strömung im Mittel vom Erdboden bis zur Tropopause die recht kleine Geschwindigkeit 10 m/sec, und die Maximalwerte der von der reinen Wellenbewegung herrührenden Geschwindigkeit seien die Hälfte davon, also 5 m/sec. Man bekommt dann in dem zyklonischen Gebiet die für eine Zyklone recht bescheidene Maximalgeschwindigkeit 15 m/sec und zwischen den Zyklonen eine Minimalgeschwindigkeit von 5 m/sec. Die Energie pro Masseneinheit, die früher überall 50 m^2/sec^2 betrug, wird in den zyklonischen Gebieten 112,5 m^2/sec^2 erreichen und zwischen den Zyklonen einen Minimalwert von 12,5 m^2/sec^2 aufweisen. Nimmt man aber als mittlere Geschwindigkeit der warmen Grundströmung vor der Zyklogenese den hohen, aber immer noch möglichen Wert von 20 m/sec an und setzt die Maximalgeschwindigkeit in der gebildeten Wellenbewegung gleich 10 m/sec, so findet man als größte Geschwindigkeit der warmen Grundströmung im zyklonischen Gebiet 30 m/sec, also schon Orkangeschwindigkeit, und als kleinste Geschwindigkeit der warmen Grundströmung zwischen den Zyklonen 10 m/sec. Die entsprechenden Energien pro Masseneinheit sind vor der Zyklogenese überall 200 m^2/sec^2; nachher beträgt der Maximalwert in den zyklonischen Gebieten 450 m^2/sec^2 und der Minimalwert zwischen den Zyklonen 50 m^2/sec^2.

Diese Zahlen zeigen, daß die durch die Wellenbewegung verursachte Konzentration der kinetischen Energie der Grundströmungen im zykloni-

schen Gebiet von großer Bedeutung zur Erklärung der Energie der Zyklonen ist. Will man aber die allergrößten Energieentfaltungen der Zyklonen mit Geschwindigkeiten bis zu 50 m/sec durch diese Energiekonzentrationen *allein* erklären, so muß man recht unwahrscheinliche Annahmen über die Anfangsenergie der Grundströmungen machen.

(II). *Umsetzung potentieller Energie in kinetische.* Die Bildung, Entwicklung und Vernichtung der Frontalzyklonen ist mit der Vernichtung eines Solenoidsystemes, also mit dem Verlust potentieller Energie verbunden. Die dabei auftretenden Energieumsätze können wir mit Hilfe des Zirkulations- und Arbeitstheorems abschätzen. Es kommen dabei Energiemengen ähnlicher Größenordnung wie bei der Konzentration kinetischer Energie heraus. Auf diese Quelle der Energie der Zyklonen hat zuerst MARGULES aufmerksam gemacht, als er die Energie der Stürme auf das Sinken von Kaltluft und das gleichzeitige Steigen benachbarter Warmluft zurückführte[1].

Die vor der Zyklogenese in der Frontfläche konzentrierten isobar-isosteren Solenoide waren bei der geradlinigen stationären Front durch die Wirkung der Erddrehungssolenoide kompensiert, so daß keine solenoidumkreisende Bewegung entsteht und keine kinetische Energie erzeugt wird. In der Frontwelle entsteht aber arbeitsleistende Aufgleitbewegung der Warmluft relativ zur Kaltluft (an der Warmfrontfläche und am unteren Teil der Kaltfrontfläche) und arbeitsverbrauchende Abgleitbewegung der Warmluft relativ zur Kaltluft (am oberen Teil der Kaltfrontfläche). Der Anteil dieser Vertikalzirkulation, der mit Gewinn kinetischer Energie vor sich geht, nämlich das Aufgleiten der Warmluft relativ zur Kaltluft, entwickelt sich immer stärker und übertrifft den mit Verbrauch kinetischer Energie verbundenen Anteil. Die Zyklonenwelle als Ganzes vergrößert also ihre kinetische Energie, was notwendigerweise mit einer gleichzeitigen Verstärkung der horizontalen Druckgradienten — „Vertiefung der Zyklone" — verbunden ist.

Durch den Occlusionsvorgang verschwindet das Solenoidfeld, das auf dem Temperaturgegensatz Warmluft—Kaltluft beruht, und es bleibt nur ein solches Solenoidfeld übrig, das den Temperaturgegensätzen verschiedener Teile der Kaltluft seine Existenz verdankt. Dieses Solenoidfeld ist noch bei den in Abschnitt **178** erwähnten Wellenregenerationen wirksam, wird aber bald belanglos. In der absterbenden Zyklone muß eine arbeitsverbrauchende Vertikalzirkulation stattfinden, die darin besteht, daß das Aufsteigen im zentralen Teil der Zyklone noch eine Zeitlang anhält, nachdem das die Bewegung fördernde Solenoidsystem verschwunden ist. Wegen der Stabilität der Atmosphäre wird

[1] MARGULES: Über die Energie der Stürme. Jb. k. k. Zentralanstalt f. Meteorol. u. Geodynamik, Wien 1903.

dann der aufsteigende zentrale Teil kälter als die Umgebung. Das dadurch entstandene Solenoidfeld wird, solange die Luft im zentralen Teil der Zyklone aufsteigt, in arbeitsverbrauchendem Sinne umkreist, und die kinetische Energie der Zyklone muß abnehmen. Die Reibung gegen den Erdboden befördert das Einströmen im untersten Teil der Zyklone und sorgt dadurch für die Aufrechterhaltung der arbeitsverbrauchenden Vertikalzirkulation. Die Reibung beschleunigt somit auf indirekter Weise das Absterben der Zyklone.

Um diese Energieumsetzung quantitativ zu untersuchen, stellen wir uns die in der Abb. 139 dargestellte thermodynamische Maschine vor, die in schematischer Weise das Wesentliche bei den in den jungen Polar- und Arktikfrontzyklonen stattfindenden Umwandlungen potentieller Energie in kinetische nachahmen kann. Eine geschlossene Röhre führt auf der warmen Seite der Frontfläche bis zu deren diffusem oberem Ende, das wir in etwa 8 km Höhe wählen, hinauf und auf der kalten Seite der Frontfläche wieder herunter. Der unterste Teil der Frontfläche soll frontolytisch verwischt sein, so daß die Röhre in sich zurücklaufen kann, ohne daß die in ihr enthaltene Luft Diskontinuitäten aufweist. Solche Verhältnisse findet man, wie schon bemerkt, dicht hinter dem Zentrum der Wellenzyklone, wo frühzeitig Frontolyse eintritt, und wo auch ein Teil der abgestiegenen Kaltluft an der Occlusionsfront wieder aufsteigt (s. Abb. 134). Wenn wir den Anfangszeitpunkt nach Eintritt der Frontolyse am Boden wählen, dürfen wir voraussetzen, daß die Vertikalzirkulation, die zur Frontolyse führte, schon eine gewisse kinetische Energie geschaffen hat, die sich zu der später hinzukommenden addiert. Wenn diese anfängliche Zirkulationsenergie aus praktischen Gründen nicht mitgerechnet wird, wissen wir, daß unser Resultat auf jeden Fall nicht zu hoch ausfallen wird.

Abb. 139. Thermodynamische Umlaufsmaschine mit Kalt- und Warmluft in je einem Schenkel. Frontfläche (gestrichelt) unten frontolysiert und oben diffus endend.

Wenn wir jetzt die in der geschlossenen Röhre enthaltene Luft sich selbst überlassen, wird die Luft im warmen Schenkel steigen und im kalten Schenkel sinken, so daß kinetische Energie gewonnen wird. Die eventuelle lokale adiabatische Abkühlung im aufsteigenden und die immer vorhandene lokale adiabatische Erwärmung im absteigenden Teil wird aber, nachdem nur ein Bruchteil eines vollen Umlaufes durchgeführt ist, die Temperaturdifferenz beider Säulen zum Verschwinden bringen. Im allgemeinen Fall verschwindet allerdings die Temperaturdifferenz beider Röhrenschenkel nicht gleichzeitig in allen Niveaus, und man bekommt eine Zeitlang ein Solenoidfeld teils positiven, teils nega-

tiven Vorzeichens. Solange die zirkulierende Substanz innerhalb fester Röhrenwänden enthalten ist, wird aber die Zirkulation weiter beschleunigt bis zu dem Moment, wo gleichviel positive und negative Solenoide umschlossen sind. Die in diesem Moment erreichte maximale kinetische Energie werden wir für ausgewählte Fälle berechnen.

In der Atmosphäre, wo wir keine festen Röhrenwände voraussetzen dürfen, würde die Vertikalzirkulation am ehesten in den Niveaus aufhören, wo die Temperaturdifferenz auf- und absteigender Luft am schnellsten beseitigt wird, und am spätesten aufhören, wo die Temperaturdifferenz sich am längsten behauptet. Die durch die Vertikalzirkulation erzeugte kinetische Energie wird sich dann auch nicht gleichmäßig auf die Luft der verschiedenen Niveaus verteilen, so daß teils mehr, teils weniger als die im folgenden Beispiel ausgerechnete mittlere kinetische Energie zum Vorschein kommt. Bei Fortnahme der festen Röhrenwände wird die an der Vertikalzirkulation teilnehmende Luft durch die Erddrehung auch Geschwindigkeitskomponenten transversal zur ursprünglichen vertikalen Zirkulationsebene bekommen. Die Arbeit der ablenkenden Kraft der Erddrehung ist aber bekanntlich immer Null, so daß sie die folgende Berechnung der kinetischen Energie nicht fälschen kann.

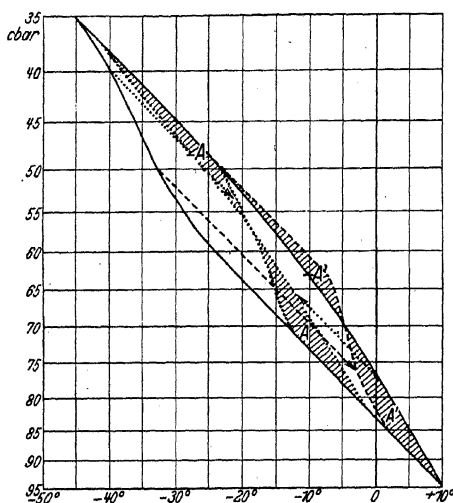



Abb. 140. Beispiel der Berechnung der zu gewinnenden kinetischen Energie in der Umlaufmaschine Abb. 139. *Ausgezogen:* anfängliche Temperaturverteilung in beiden Schenkeln. *Gestrichelt:* Temperaturverteilung im Schenkel des Absteigens nach 0,225 Umlauf. *Punktiert:* Temperaturverteilung beider Schenkel nach 0,117 Umlauf ohne Kondensationsvorgänge.

Wir nehmen der Einfachheit halber an (Abb. 140), daß die Temperatur im ganzen Schenkel mit aufsteigender Bewegung längs einer Feuchtadiabaten sich verteilt, so daß das feuchtadiabatische Durchströmen der Röhre von unten nach oben die Temperaturverteilung unverändert läßt. Die Voraussetzung muß dann natürlich sein, daß die Temperatur und Feuchtigkeit der unten aus dem Röhrenschenkel mit absteigender Bewegung eintretenden Luft konstant bleibt. Die Konstanz der Temperatur in diesem untersten Punkt des Kreislaufes wird durch die Wahl eines trockenadiabatischen Temperaturgefälles im untersten Teil des

Schenkels mit absteigender Bewegung erreicht. (Die Konstanz der Feuchtigkeit muß dagegen durch künstliches Anfeuchten der abgestiegenen Luft erreicht werden.) Im oberen Teil dieses Schenkels besteht ein unteradiabatisches Gefälle, und dort wird deshalb die Temperatur lokal steigen, während die Luft von oben nach unten trockenadiabatisch hindurchströmt.

Im Anfangszustand der Abb. 140 umschließt die Röhre $N = 1816$ Solenoide [bez. Berechnungsmethode vgl. **41** (7)]. Ein voller Umlauf in der Röhre würde die anfangs unten befindlichen Teilchen um eine Höhe entsprechend 60 cbar aufwärts und 60 cbar wieder abwärts führen. Folglich entspricht z. B. ein Zehntel Umlauf einem Aufstieg um 12 cbar in dem einen und einem Abstieg um 12 cbar in dem anderen Schenkel, denn dabei passiert jedem beliebigen Punkte ein Zehntel der ganzen zirkulierenden Masse. Nach 27 cbar Abstieg, d. h. nach 0,225 Umlauf, ist die Temperaturverteilung im Schenkel mit absteigender Bewegung durch die gestrichelte Kurve gegeben, welche die Temperaturkurve des Schenkels mit aufsteigender Bewegung etwa bei 70 cbar kreuzt. Die Areale A' und $-A'$ heben sich dann gegenseitig auf und die Anzahl umschlossener Solenoide im Sinne des Zirkulationssatzes ist Null.

Die in diesem Moment erreichte mittlere kinetische Energie pro Masseneinheit ist:

$$\tfrac{1}{2} v^2 = 0{,}225 \frac{N}{2} = 0{,}225 \frac{1816}{2} = 204\,\mathrm{m^2/sec^2},$$

woraus sich weiter ergibt $v = 20$ m/sec. Die in diesem Falle maximal erreichbare kinetische Energie entspricht also einem starken, aber doch nicht so stürmischen Wind, wie er in den größten Zyklonen vorkommt.

Berücksichtigen wir aber, daß die individuellen Warmluftelemente in die Zyklone von hinten einströmen und beim Gleiten entlang der Frontfläche ständig in Nachbarlage zu neuer noch nicht abgesunkener Kaltluft kommen, so sehen wir ein, daß die gleichen Warmluftelemente weiter hinaufgleiten können, als wenn sie, so wie im Rechenbeispiel, dauernd neben demselben Teil der Kaltluft liegen. Im Rechenbeispiel gleitet die Warmluft um eine 27 cbar Druckunterschied entsprechende Vertikaldistanz aufwärts, während in starken Zyklonen die Aufgleithöhe vielleicht zweimal so groß werden kann. Die resultierende kinetische Energie pro Masseneinheit der Warmluft wäre dann $2 \,.\, 204 = 408\,\mathrm{m^2/sec^2}$ und die entsprechende Windgeschwindigkeit $v = 29$ m/sec, was einem orkanartigen Sturm entspricht.

Die berechnete, aus der potentiellen Energie stammende kinetische Energie addiert sich zu der schon zu Anfang existierenden kinetischen Energie der Grundströmungen, und zwar hat diese kinetische Energie, was die warme Grundströmung betrifft, dank der unter (I) besprochenen

Energiekonzentration durch die Wellenbewegung, ihre Maximalwerte bei den Zyklonen. In den zwei numerischen Beispielen in (I) wurden diese Maximalwerte der kinetischen Energie pro Masseneinheit in der Warmluft zu 112 bzw. 450 m^2/sec^2 angenommen. Wird hierzu die gemäß obiger Berechnung aus der potentiellen Energie geschöpfte Bewegungsenergie pro Masseneinheit von 408 m^2/sec^2 addiert, so ergibt sich 520 m^2/sec^2 bzw. 958 m^2/sec^2. Die entsprechenden maximalen Windgeschwindigkeiten in der Warmluft sind 32 m/sec bzw. 44 m/sec. Durch die Addition extrem großer Beträge aus potentieller Energie geschöpfter und aus bestehender kinetischer Energie konzentrierter Bewegungsenergie ergeben sich also Windgeschwindigkeiten von der Größenordnung der allerstärksten beobachteten Winde in den außertropischen Zyklonen.

Die Erreichung großer Sturmgeschwindigkeiten ist also davon abhängig, daß eine schon einigermaßen schnellbewegte Luftmasse an einem arbeitserzeugenden Umlauf in einem starken Solenoidfelde teilnehmen kann. Dieses Solenoidfeld kann entweder das der Polarfront (bzw. der Arktikfront) selbst sein oder auch das Solenoidfeld des zurückgebogenen Occlusionsendes, wo arbeitserzeugende interne Kaltluftzirkulationen stattfinden können. Je größer die Anzahl umkreister Solenoide und je größer der Bruchteil eines vollen Umlaufes ist, der durchgeführt werden kann, um so größer wird die resultierende kinetische Energie sein.

Wie wichtig die Anwesenheit des Wasserdampfes im Kreislauf ist, sehen wir durch eine Wiederholung des Rechenbeispiels mit denselben Temperaturverteilungen, aber mit überall trockener Luft als zirkulierender Substanz. Die anfängliche Solenoidzahl bleibt voraussetzungsgemäß dieselbe, nämlich $N = 1816$, aber die in trockener Luft eintretende Abkühlung in dem Schenkel mit aufsteigender Bewegung führt zu viel schnellerer Vernichtung des Solenoidfeldes, als wenn dieser Schenkel unveränderte Temperatur beibehielt. In der Tat werden nach Aufsteigen um 14 cbar in dem einen und Absteigen um 14 cbar im anderen Schenkel (0,117 Umlauf) die Temperaturverteilungen durch die beiden punktierten Kurven vertreten, die sich bei etwa 57,6 cbar kreuzen. Die beiden Areale A und $-A$ heben sich dann auf, die Zahl der umschlossenen Solenoide ist Null, und die kinetische Energie pro Masseneinheit passiert ihr Maximum: $\frac{1}{2}v^2 = 0{,}117\frac{N}{2}$, woraus $v = 14{,}6$ m/sec sich ergibt. Im gewählten Beispiel wurde also dank der Anwesenheit des Wasserdampfes eine etwa doppelt so große kinetische Energie aus der potentiellen gewonnen, als mit trockner Luft möglich gewesen wäre.

Wenn die aufsteigende Luft teilweise gesättigt, teilweise ungesättigt ist, ergibt die Rechnung (unter Voraussetzung derselben anfänglichen

Solenoidzahl $N = 1816$) Windgeschwindigkeiten zwischen den Grenzen 14,6 und 20 m/sec. Das Fehlen der zur Sättigung ausreichenden Feuchtigkeit im ganzen unteren Teil des Schenkels mit aufsteigender Bewegung, welches allerdings nur in sehr trockenen Klimaten vorkommt, reduziert die verfügbare Energie am meisten. In den maritimen Klimaten der gemäßigten Zone bleibt der aufsteigende Schenkel nur unterhalb etwa 500 m Höhe wolkenlos, d. h. nur unterhalb des niedrigsten Punktes der betrachteten Zirkulationsmaschine.

Die Wahl der anfänglichen vertikalen Temperaturgradienten in der Zirkulationsröhre ist natürlich von großer Bedeutung für die verfügbare Energie. Je stabiler die Schichtung beider Luftmassen, ein um so kleinerer Bruchteil eines Umlaufes genügt, um das Solenoidfeld zu vernichten. Bei einer Front mit der früheren Solenoidzahl $N = 1816$, aber mit Luftmassen, die im Mittel in der Vertikalen isotherm sind, wird schon nach 0,025 Umlauf (unter trockenadiabatischen Bedingungen) das Solenoidfeld verbraucht sein. Die maximal erreichbare Windgeschwindigkeit in der vertikalisothermen Atmosphäre wäre also nur $v = \sqrt{0{,}025 \cdot 1816} = 6{,}7$ m/sec, statt $v = 14{,}6$ m/sec im Falle der mit der Höhe abnehmenden Temperatur. *Etwaige Frontflächen in der Stratosphäre verfügen also über viel kleinere Energie als Frontflächen entsprechender Solenoidzahl in der Troposphäre.*

Die in Abb. 140 gewählten Temperaturgradienten entsprechen ungefähr den mittleren Verhältnissen in den Polarfrontzyklonen. Die Temperaturabnahme vertikal nach oben ist allerdings im Mittel sowohl in der Polarluft als in der Tropikluft etwas stabiler als in der Abb. 140, aber die Temperaturabnahme mit der Höhe in einer nordwärts, tangential zur Polarfrontfläche, verlaufenden Röhre, deren Neigung nur etwa $^1/_{100}$ beträgt, ist notwendigerweise größer, und zwar gleich:

$$\delta_{PF} = \delta - 100 \frac{\partial \theta}{\partial y} .$$

$\partial\theta/\partial y$, der immer negative meridionale Temperaturgradient, kann in der Polarluft dicht nördlich der Polarfront -2 bis $-3 \cdot 10^{-5}$ betragen. Daher die Berechtigung für die Wahl einer trockenadiabatischen Temperaturverteilung im unteren Teil des Schenkels mit absteigender Luftbewegung. In der an die Polarfront grenzenden Tropikluft hat $\partial\theta/\partial y$ kleinere Werte, höchstens $-1 \cdot 10^{-5}$. Immerhin wird

$$\delta_{PF} = \delta + 0{,}001 ,$$

so daß z. B. einem δ in der Tropikluft, das um 0,1 °/100 m kleiner als der feuchtadiabatische Gradient δ_{pa} ist, trotzdem ein feuchtadiabatisches δ_{PF}, so wie in der Abb. 140 vorausgesetzt, entsprechen kann.

In einigen Fällen kommt sogar feuchtlabile Tropikluft ($\delta > \delta_{pa}$) in den Polarfrontzyklonen vor, und δ_{PF} ist dann desto mehr über-

adiabatisch. Die verfügbare Energie wird in diesem Falle besonders groß, denn große Bruchteile von Umläufen um das Solenoidfeld sind dann möglich, ohne daß das Solenoidfeld vernichtet wird.

REFSDAL[1] hat gezeigt, daß Zyklonen mit feuchter und feuchtlabiler Warmluft schnell an kinetischer Energie zunehmen. Auch Zyklonen, die schon occludiert sind, können eine durch die unten sichtbaren horizontalen Temperaturgegensätze unerklärbare plötzliche Wiederbelebung erfahren, wenn eine größere, geordnete, feuchtlabile Vertikalzirkulation im Bereich der Zyklone in Gang kommt. So z. B. verstärken sich die Zyklonen, die im Winter vom kalten trocknen Kontinent auf das Meer hinausziehen, fast ausnahmslos, selbst wenn sie beim Übertritt von Land auf See schon alt und occludiert waren. Durch die Erwärmung von unten her wird nämlich die Zyklonenluft labil und gleichzeitig durch den regen vertikalen Luftaustausch feucht gemacht, so daß sie beim Aufgleiten an den Frontflächen der betreffenden Zyklone teilweise als gesättigte feuchtlabile Luftmasse auftritt und reichliche kinetische Energie erzeugt. Ähnliche Verstärkungen von alten Zyklonen, die vom Meer ans Land kommen, werden bisweilen im Sommer beobachtet, und die Ursache ist wohl wiederum die Labilität, welche durch die verstärkte Erwärmung von unten her erzeugt wird.

181. Die Umgestaltung der quasipermanenten Zirkulationen durch die Frontalstörungen. Bei der Aufsuchung der Frontalzonen der Erde gingen wir von der mittleren Luftdruckverteilung aus und fanden die Lage der Frontalzonen unter der Voraussetzung, daß die mittlere Luftdruckverteilung einige Tage unverändert bleibt. Die Wellenstörungen der Fronten bewirken ihrerseits je nach der Intensität, die sie erreichen, kleinere oder größere vorübergehende Umgestaltungen der mittleren Luftdruckverteilung. Am besten bekannt ist das ständig wechselnde Bild der Störungen in der Gegend der atlantischen Polarfront, und für dieses Gebiet gilt deshalb die folgende Beschreibung in erster Linie. Sie läßt sich aber auch auf die anderen Frontalstörungsgebiete der gemäßigten Zone in entsprechender Weise übertragen.

Die atlantischen Polarfrontzyklonen bewegen sich im normalen Fall ost- bis nordostwärts mit dem quasipermanenten Islandstief zur Linken und dem ebenfalls quasipermanenten Azorenhoch und dessen Fortsetzung durch Europa zur Rechten. Entwickelt sich die Polarfrontzyklone nur mäßig stark, so wird sie nicht tiefer als die quasipermanente isländische Zyklone und bewegt sich als „Sekundärzyklone“ um diese herum, bis sie schließlich in der Gegend der Arktikfront ankommt, wo ihre Occlusion sich dieser Front anschmiegt. Entwickelt sich irgendeine Polarfrontzyklone dagegen sehr stark, so wird ihr Druckzentrum bald

[1] REFSDAL: l. c. S. 693.

tiefer sein als das quasipermanente Islandstief, und wenn die Polarfrontzyklone dann schließlich stationär wird, ersetzt sie das Islandstief. Solche aus Polarfrontzyklonen entstandenen quasipermanenten Zyklonen können sich tagelang irgendwo im nordöstlichen Atlantischen Ozean festsetzen, zum Teil auch über den angrenzenden Teilen Europas.

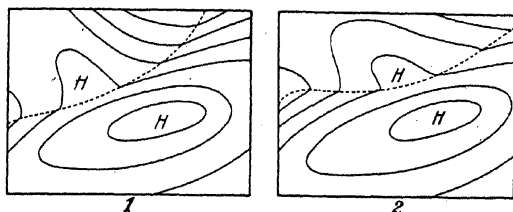



Abb. 141. Wandernder, aus Polarluft bestehender Hochdruckkeil an der Nordseite eines stationären Tropiklufthochs.

Je tiefer die Polarfrontzyklone wird, um so stärker wird der Polarluftstrom auf ihrer Rückseite, und um so weiter verschiebt dieser die Polarfront nach Süden. Es gibt jetzt die zwei in den Abb. 141 und 142 dargestellten Möglichkeiten: a) Entweder (Abb. 141) sind das Azoren-

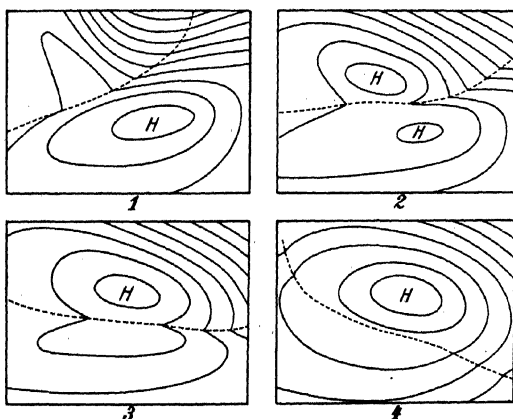



Abb. 142. Bildung eines Polarlufthochs und gleichzeitiger Abbau des Tropiklufthochs.

hoch und die SW-Strömung von Tropikluft auf seiner Nordseite genügend gut entwickelt, um diese Polarluftströmung „aufzufangen". Die Polarfront bleibt dann nördlich des Azorenhochs liegen, erfährt bald eine neue Wellenstörung und geht wieder nach Norden als Warmfront einer neuen Polarfrontzyklone. Die Polarluftzunge zwischen den beiden Polarfrontzyklonen *fällt dann mit einem wandernden Hochdruckkeil oder (seltener) mit einer kleinen wandernden Antizyklone zusammen.* b) Oder

das Azorenhoch nebst SW-Strömung ist nicht stark genug, um die NW-Strömung von Polarluft aufzufangen. Dies wird dann meistens folgendermaßen vor sich gehen (Abb. 142). Die präfrontale warme Antizyklone (das Azorenhoch) wird „abgebaut" und etwas nach Süden verschoben, während gleichzeitig ein immer intensiveres Hoch sich in der Polarluft hinter der Front aufbaut. Schließlich ist dann das warme Hoch so weit eingeschrumpft, das kalte so angeschwollen, daß jenes nur einen kleinen Ausläufer von diesem darstellt — und *die Polarluft hat freie Bahn in das Passatgebiet.*

Im Falle b wird also das alte warme subtropische Hoch durch ein kälteres Hoch auf etwas höherer geographischer Breite ersetzt. In der weiteren Entwicklung verliert bald dieses neue Hoch seine direkte Zufuhr von Polarluft und beginnt sich zu erwärmen. Gleichzeitig tritt das nächste, gewöhnlich nordwestlich des Hochs gelegene Deformationsfeld in Wirksamkeit, und bald existiert wieder eine Polarfront nördlich des neuen Hochs. Nach der Passage einiger Polarfrontwellen auf derselben wird das Hoch gewöhnlich nach Süden verschoben und nimmt seine natürliche Lage bei den Roßbreiten ein. Die ursprüngliche Polarluft des Hochs erwärmt sich dabei immer weiter bis zur normalen Temperatur der betreffenden Breitenzone.

Diese Erneuerung des subtropischen Hochdruckgürtels mittels wandernder Polarlufthochs, die schließlich stationär werden und sich erwärmen, zeigt eine gewisse Tendenz zur regelmäßigen Wiederkehr, ohne daß man jedoch von einer wirklichen Periodizität sprechen kann. Dieselbe Quasiperiodizität sieht man natürlich auch im Wechsel der Bahnen der Polarfrontzyklonen, die jedesmal auf abnorm hoher Breite liegen, wenn das Hoch nördlich seiner natürlichen Lage in den Roßbreiten sich befindet. Während des Südwärtswanderns des Hochs verlagern sich die Zyklonenbahnen auch allmählich südwärts, bis schließlich nach einer Zyklone ein neues wanderndes Polarlufthoch kommt. Durch das neue Hoch werden die Zyklonenbahnen sprunghaft wieder nordwärts verlegt an die neue Polarfront, die sich nördlich des Hochs bildet. Immer dann, wenn so eine sprunghafte Nordwärtsverlegung der Zyklonenbahnen beobachtet wird, setzt man den Beginn einer neuen „Zyklonenfamilie" an. Die mittlere Dauer des Vorbeizuges einer solchen Zyklonenfamilie der atlantischen Polarfront beträgt in Europa ungefähr $5^1/_2$ Tage.

Ostwärtslaufende *Arktikfrontstörungen* können entweder auf hoher Breite bleiben und den Pol umkreisen, oder sie werden durch die permanenten stationären Zyklonen der gemäßigten Zone beeinflußt und bewegen sich auf deren Westseite nach niedrigeren Breiten hinunter. In dieser Weise ziehen oft die Störungen auf der europäischen Arktikfront nach dem Stillen Ozean nördlich von Japan und die Störungen der

amerikanischen Arktikfront durch Kanada nach dem Atlantischen Ozean. Dies erklärt, warum man auf den atlantischen bzw. pazifischen Wetterkarten oft Zyklonen ankommen sieht, die keinerlei Verbindung mit der Polarfront des betreffenden Ozeans haben, indem sie allseits von Polarluft umgeben sind. Auf dem betreffenden Ozean angekommen, gliedern sie sich aber bald in die Reihe der Polarfrontzyklonen ein.

Die Struktur der wandernden und stationären Hochs. Die zwischen den aufeinanderfolgenden Polarfrontzyklonen eingeschalteten Polarluftzungen[1], innerhalb deren die wandernden Hochdruckkeile oder gar abgeschlossene wandernde Hochs sich befinden, können von Fall zu Fall verschiedene Struktur aufweisen, aber die folgenden Eigenschaften finden sich ziemlich allgemein bei ihnen.

Die frisch herangeführte Polarluft auf der Vorderseite der Polarluftzunge ist kälter als die zurückfließende Polarluft auf der Rückseite. Der Temperaturübergang zwischen kalter Vorderseite und warmer Rückseite ist aber immer kontinuierlich; es findet dort keine Frontenbildung statt. Auf der kalten Vorderseite ist die Luft kälter als die Unterlage und empfängt deshalb Wärme von unten her, so daß die untersten Kilometerstufen ein starkes vertikales Temperaturgefälle bekommen. Innerhalb der wärmeren Rückseite verschwindet diese Wärmeübertragung vom Erdboden, und das starke vertikale Temperaturgefälle der untersten Schichten wird nicht mehr aufrechterhalten.

Im größten Teil der Polarluftzunge ist die Luftbewegung divergent, und es findet ein systematisches Sinken der Luft statt (Subsidenz). Diese Erscheinung steht in engem Zusammenhang mit der Regel, daß alle Zyklonen occludieren. Wenn nämlich die Tropikluftzungen ständig eingeengt und schließlich vom Erdboden abgehoben werden, müssen die dazwischengeschalteten Polarluftzungen gleichzeitig an Areal zunehmen und in vertikaler Richtung schrumpfen. Es entstehen deshalb eine oder mehrere Temperaturinversionsflächen innerhalb der Polarluftzunge. An einer jeden solchen Schrumpfungsfläche ist die Luft unmittelbar darüber wärmer als unmittelbar darunter, weil sie weiter abgestiegen und mehr erwärmt worden ist als diese. Unterhalb der untersten Schrumpfungsfläche findet man meistens das durch die vertikale Durchmischung unterhaltene normale Temperaturgefälle mit Temperaturzunahme nach unten.

Wie schon bemerkt, verwandeln sich die wandernden Hochs oft in stationäre, wenn die Zufuhr frischer Polarluft an der Vorderseite abgeschnitten worden ist. Die sich ergebende Strukturänderung vom wandernden zum stationären Stadium eines Hochs besteht deshalb in einer Erwärmung des bisher kalten vorderen Teiles, so daß er nur noch

[1] Oder im Falle der Arktikfront die Zungen arktischer Polarluft.

wenig kälter als der Rest des Hochs bleibt. Das systematische Absinken dauert überall an, so daß die ganze antizyklonische Luftmasse bis auf die Bodenschicht warm und trocken wird. Bei genügender Strahlungserwärmung am Boden wird auch die Bodenschicht durchwärmt in gleichem Maße wie die freie Atmosphäre, sonst bleibt die Bodenschicht relativ kalt und durch eine deutliche Temperaturinversion von der darüberliegenden warmen Luft getrennt.

Das ursprüngliche wandernde Hoch bestand aus Polarluft, die aber beim Stationärwerden des Hochs sich weit über die gewöhnliche Temperatur frisch herangeführter Polarluft erwärmt. In vielen Fällen steigt die Temperatur der freien Atmosphäre über einem stationären Hoch bis zur charakteristischen Temperatur frisch herangeführter Tropikluft und wird von jener thermisch nicht zu unterscheiden sein. *Die stationär werdenden Hochs sind deshalb Umbildungsstellen der Polarluft in Tropikluft.*

Durch das Hinzutreten der Polarfront- und Arktikfrontstörungen ist das Bild der *allgemeinen atmosphärischen Zirkulation* recht kompliziert geworden. Das Wesen der Meridionalzirkulation der gemäßigten Zone erkennen wir aber in dem charakteristischen „Lebenslauf" eines Luftelementes aus der Tropikluft, das sich nach beendetem Aufsteigen in einer occludierenden Zyklone in ein Polarluftelement umwandelt und nach Absteigen und Äquatorwärtswandern innerhalb eines der obenerwähnten langsambewegten Hochs schließlich wieder ein Tropikluftelement wird. Den Teilchen, die im Laufe der Zeit diese Umwandlungen von Polarluft in Tropikluft und wieder zurück durchmachen, wird in niedriger Höhe, d. h. unter hohem Druck, Wärme zugeführt und in größerer Höhe, d. h. unter niedrigem Druck, Wärme entzogen. Sie durchlaufen also im großen und ganzen einen thermodynamischen Kreisprozeß, bei dem Wärme in Arbeit umgesetzt wird, so wie in der idealisierten Meridionalzirkulation vorausgesetzt. Unterwegs kann das Teilchen jedoch lange, komplizierte Bahnen durchlaufen. Während seiner Tropikluftphase kann das Teilchen ein oder mehrere Male in stationären oder beweglichen subtropischen Antizyklonenzellen herumlaufen, bevor es in die Nähe einer Polarfront kommt, wo es dann aufsteigt und schließlich oberhalb einer occludierenden Zyklone in ein Polarluftteilchen umgewandelt wird. Während der folgenden Polarluftphase desselben Teilchens kann es ein- oder mehrmals in stationären oder beweglichen Zyklonen, außerdem evtl. einmal oder mehrmals in beweglichen Polarluftantizyklonen herumlaufen, bis es schließlich irgendwo in einer langsambewegten, sich erwärmenden Antizyklone wieder ein Tropikluftteilchen wird.

Man darf sich natürlich nicht wundern, daß die Momentanbilder der *Stromlinien* im Meridionalschnitt betrachtet, auch in der gemäßigten

Zone keine systematische Polwärtsströmung in der Höhe und Äquatorwärtsströmung unten zeigen. Das entgegengesetzte Bild wird ebensooft gefunden werden. Nichtsdestoweniger können die *Bahnen der Teilchen* in mehr oder weniger systematischer Weise oben polwärts und unten äquatorwärts verlaufen. Dies ist im Abschnitt **173** für die relativ einfache Meridionalzirkulation im subtropischen Hochdruckgürtel nachgewiesen worden, und dasselbe wird sicher im großen und ganzen auch für die komplizierte Meridionalzirkulation der gemäßigten Zone gelten.

182. Die Struktur der außertropischen atmosphärischen Störungen nach den statistisch-aerologischen Beobachtungen. In der gemäßigten Zone ist die Troposphäre am wärmsten, wenn der troposphärische Lufttransport von den Subtropen kommt. Absteigende Luftbewegung trägt auch zur Erwärmung der gesamten Troposphäre mit Ausnahme der Bodenschicht bei. Die allerhöchsten Troposphärentemperaturen findet man deshalb, wenn ein Hochdruckgebiet mit Tropikluft sich dicht östlich neben der Beobachtungsvertikale ausgebildet hat. Es wirken dann Horizontaltransport und Absteigen beide in erwärmendem Sinne. Die Troposphäre der gemäßigten Zone ist entsprechend am kältesten, wenn eine Luftzufuhr aus polaren Gegenden stattgefunden hat. Aufsteigende Luftbewegung trägt auch zur Abkühlung bei, und die allertiefsten Troposphärentemperaturen findet man deshalb, wenn ein großes, allseits von arktischer Polarluft umflossenes Tief in nächster Nähe östlich von der Beobachtungsvertikale lagert.

Am häufigsten findet man die stationären Tropiklufthochs bei den Azoren bzw. die stationären Polarlufttiefs bei Island (oder im Pazifischen Ozean: Hawai bzw. Aleuten), aber zeitweise bauen sie sich auch über den kontinentalen Gebieten mit aerologischen Observatorien auf, und aus solchen Wetterlagen stammen die extrem warmen bzw. extrem kalten Troposphärentemperaturen der aerologischen Statistik.

Die Polarfrontzyklonen wandern zwischen einem südlichen, annähernd stationären Tropiklufthoch und einem nördlichen, annähernd stationären Polarlufttief hindurch und ziehen die Luft von der Westseite des Tropiklufthochs und der Westseite des Polarlufttiefs an sich heran. Indem sie somit ihre Luft aus Quellengebieten mit höchster und tiefster Temperatur beziehen, werden die Polarfrontzyklonen auf jeden Fall im jungen Stadium durch die größtmögliche Temperaturasymmetrie gekennzeichnet. Eine Statistik der mittleren Temperatur der Polarfrontzyklonen hat deshalb wenig Sinn, wohl aber sind Vertikalschnitte durch sie sowohl meridional, als auch zonal von großem Interesse. Die meridionalen Schnitte sind schwierig zu erhalten, weil keine aerologischen Observatorien nördlich der gewöhnlichen Zyklonenbahnen dauernd in Betrieb sind. So viel weiß man aber, daß mit wachsender

Höhe der Polartiefdruck immer mehr zur Geltung gelangt (s. die statistischen Meridionalschnitte Abb. 110 und 111), so daß die Zyklonen der gemäßigten Zone in der Höhe nur als Ausbuchtungen des Polartiefs erscheinen. Nur die sehr tiefen Zyklonen behalten ein geschlossenes Isobarensystem bis zur Tropopause hinauf. Westöstliche Vertikalschnitte durch die Zyklonen lassen sich leichter herstellen, und zwar bisher am besten auf indirekter Weise mittels der aerologischen Statistik.

Die Untersuchung SCHEDLERS[1], aus der wir die Abb. 143 wiedergeben, ordnet die aerologischen Aufstiege in Gruppen je nach der Lage des Aufstiegsortes in bezug auf die Fall- und Steiggebiete des Luftdruckes am Boden und gibt für jede Gruppe die mittlere Anomalie der Temperatur in den verschiedenen Höhen an. Die Fallgebiete des Druckes sind einfach die Vorderseiten der beweglichen Zyklonen (auch solcher Zyklonen, die kein geschlossenes Isobarensystem aufweisen), und die Steiggebiete sind ihre Rückseiten. Da ferner die Zyklonenbahnen gewöhnlich weit nördlich der europäischen aerologischen Observatorien liegen, gibt die SCHEDLERsche Statistik die mittleren Temperaturanomalien der südlichen Zyklonenvorderseite und der südlichen Zyklonenrückseite. Eine graphische Darstellung dieser statistischen Resultate gibt dann ein Bild (Abb. 143), das als westöstlicher Vertikalschnitt durch den südlichen Teil einer Serie wandernder Zyklonen mit dazwischengeschalteten Hochdruckkeilen aufgefaßt werden kann.

Die Grenze zwischen Fallgebiet und Steiggebiet des Druckes verläuft im südlichen peripheren Teil der Zyklonen gewöhnlich an der Occlusionsfront oder im Falle einer Warmsektorzyklone an der Kaltfront[2]. Die Aufstiege im Fallgebiet sondieren also die zurückfließende erwärmte Polarluft und darüber die Tropikluft, oder auch die Tropikluft schon vom Erdboden an. Die Aufstiege im Steiggebiet erfassen die mehr oder weniger direkt herantransportierte Polarluft und darüber evtl. noch die Tropikluft, falls der Polarlufteinbruch nicht bis zur Tropopause hinaufgereicht hat. Scharfe Übergänge im Verlauf der Temperaturkurven findet man nirgends, denn einmal liegt es in der Natur der Statistik, alle Diskontinuitäten auszugleichen, dann sind ja auch die Frontendiskontinuitäten durch Frontolyse verwischt.

Am Boden (Kurven p_0, t_0) finden wir die Maxima der Temperaturkurve etwas vor (d. h. östlich von) den Druckminima, mit anderen Worten gerade dort, wo die Tropikluftzungen liegen (oder im Falle

[1] „Die Beziehungen zwischen Druck und Temperatur in der freien Atmosphäre", Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. IX, S. 181, 1921. (Die betreffende Abb. 143 ist von EXNER auf Grundlage mehrerer Einzelabbildungen bei SCHEDLER zusammengestellt; s. EXNER: Dynamische Meteorologie, zweite Aufl., S. 372.)

[2] Dies ist nicht immer der Fall nahe südlich der Zyklonenbahn, denn dort fällt der Druck gewöhnlich bis zur Passage der zurückgebogenen Occlusionsfront.

occludierter Zyklonen die zurückfließende erwärmte Polarluft). Die tiefste Temperatur fällt mit dem Druckmaximum, d. h. mit der Mitte der Polarluftzunge, zusammen. Eigentlich wäre zu erwarten gewesen, daß der Vorderteil der Polarluftzunge mit der direkt zugeführten Polarluft die kälteste Stelle sei. Dies ist sicher auch der Fall schon in geringer Höhe über dem Erdboden, aber am Erdboden selbst haben die vielen Fälle mit Bodeninversionen im windschwachen Schönwettergebiet des Druckmaximums die dortige mittlere Temperatur herabgesetzt (die meisten Aufstiege wurden außerdem in den frühen Morgenstunden ausgeführt, zur Zeit wenn die Bodeninversionen ihr Häufigkeitsmaximum haben).

In 2,5 km Höhe ($p_{2,5}\, t_{2,5}$) liegt das Temperaturmaxi‘, .m mitten im Fallgebiet des Luftdruckes und das Temperaturminimum mitten im Steiggebiet des Luftdruckes. Weiter oben verlegen sich die Maxima und Minima der Temperatur immer mehr vorn, während die Amplitude der Temperaturschwankung wächst. Diese große Temperaturschwankung in der höchsten Troposphäre beruht nicht nur auf den Temperaturunterschieden zwischen Polarluft und Tropikluft, denn sie ist auch da in Fällen, wo die Polarlufteinbrüche nicht genügende Mächtigkeit haben, um die ganze Troposphäre zu erfüllen. Es ist vielmehr im festen Punkt der oberen Troposphäre eine große Veränderlichkeit der Temperatur der Tropikluft zu konstatieren, auf die wir gleich zu sprechen kommen[1].

Es folgt direkt aus der barometrischen Höhengleichung, daß das Minimum des Luftdruckes mit wachsender Höhe nach der kalten Seite hin verlegt wird, d. h. der Trog der Luftdruckkurve verschiebt sich mit der Höhe immer weiter rückwärts. Der Wellenrücken der Luftdruckkurve verschiebt sich aus analogen Gründen auch rückwärts. Mit wachsender Höhe nähern sich folglich die Druckextreme an die mit wachsender Höhe vorwärts verschobenen Temperaturextreme. Die mit p_h bzw. t_h bezeichneten Kurven, die sich auf ein Niveau dicht unterhalb der Tropopausenwellentäler beziehen, zeigen ein fast vollständiges Zusammenfallen der Extreme, und zwar so, daß *die Tiefdruckrinne kalt und der Hochdruckrücken warm* ist. Diese Tiefdruckrinnen und Hochdruckrücken im Niveau der Tropopause liegen etwa um $^1/_8$ Wellenlänge relativ zu den entsprechenden Druckgebilden am Boden nach Westen verschoben.

---

[1] Diese, wie wir gleich sehen werden, durch Advektion hervorgerufenen Temperaturänderungen in den verschiedenen Niveaus erzeugen auch Schwankungen des vertikalen Temperaturgradienten δ. Der Wert desselben nimmt vom Hoch gegen das folgende Tief zu, denn die obere Troposphäre kühlt sich dort ab, bevor die entsprechende Abkühlung unten beginnt. Vom Tief gegen das folgende Hoch hin nimmt δ wieder ab. Die bevorzugte Stelle der Feuchtlabilität liegt also im Tief, und zwar auf dessen Vorderseite wesentlich in der oberen Troposphäre und auf dessen Rückseite hauptsächlich in der unteren Troposphäre.

Die obersten Kurven der Abb. 143 zeigen noch die sehr bemerkenswerte Tatsache, daß *die Höhenlage der Tropopause (h) im selben Takt schwingt wie der Luftdruck in festem Niveau in der obersten Troposphäre*[1] *(p_h)*, und weiterhin, daß die Temperatur an der Tropopause, welche auch annähernd *die Temperatur der Stratosphäre* ist, *mit einer Phase entgegengesetzt der der troposphärischen Temperatur schwingt*. Die Schluß-

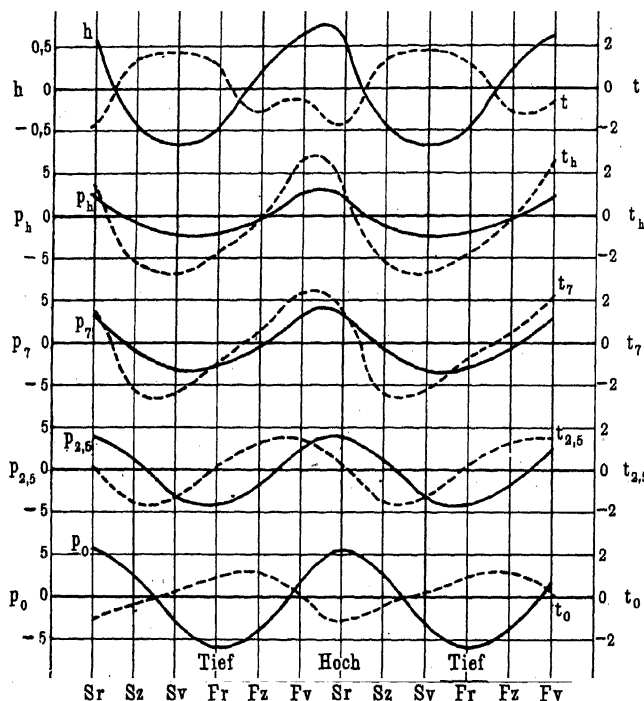



Abb. 143. Druck- und Temperaturverteilung längs zonaler, in verschiedenen Höhen gelegener Horizontallinien durch eine Reihe ostwärts wandernder Hochs und Tiefs, nebst zugehöriger Höhe (h) und Temperatur (t) der Tropopause. Skalenwerte links: h Abweichung der Tropopausenhöhe in km vom mittleren Wert, p Abweichung des Druckes in mm Hg von dem für das betreffende Niveau geltenden Mittelwert. Skalenwerte rechts: t Abweichung der Temperatur in Graden von dem für das betreffende Niveau geltenden Mittelwert. (Aus EXNER, F. M.: Dynamische Meteorologie, 2. Aufl. Wien: Jul. Springer 1925.)

folgerung liegt nahe, daß das Wesentliche an den Störungen der oberen Atmosphäre gerade die Wellenbewegung der Tropopause sein muß, denn die Druckschwankungen direkt unterhalb sind ja anscheinend von nichts anderem abhängig. Wir werden deshalb diese Tropopausenwellen näher untersuchen, um nachher ihre Rolle in der Gesamtheit der hohen und niedrigen Störungen der Atmosphäre zu beurteilen.

[1] Die Korrelation zwischen der Höhe der Tropopause und dem Luftdruck in 9 km Höhe beträgt nach DINES 0,83. (Geoph. Mem. No 2. London 1912). PALMÉN, l. c. S. 745, findet sogar 0,92.

Wie wir früher gesehen haben (Abschnitt **163**), zeigt die Tropopausenfläche über der temperierten Zone ein stetes Abfallen nach dem Pole hin. Die Wellenberge der Tropopausenfläche, die man über der gemäßigten Zone beobachtet, sind deshalb gewöhnlich nur Ausläufer der hochliegenden Tropopause über den Tropen. Entsprechend sind die Wellentäler meistens mit der zentralen Vertiefung der Tropopausenfläche über dem Polgebiet verbunden.

Die Amplituden der Tropopausenwellen wechseln von Fall zu Fall sehr. Bei normaler Zyklonentätigkeit beobachtet man über dem festen Punkt etwa 2 km Höhenunterschied zwischen Wellenberg und Wellental, aber bei starken Störungen der Atmosphäre können mitunter Höhenunterschiede von 5 km vorkommen. In solchen Fällen werden die Tropopausenvertiefungen über der betreffenden Zyklone der gemäßigten Zone tiefer als die zentrale Tropopausenvertiefung über dem Pol[1]. Solche „Tropopausentrichter" tendieren meistens zum Stationärwerden genau so wie die großen Zyklonen, über denen sie gebildet worden sind, und füllen sich schließlich aus, wenn die Zyklone stirbt. Die folgende Beschreibung der Tropopausenwellen gilt nur dort, wo die Tropopausenhöhe polwärts abnimmt, und sie ist deshalb ungültig auf der Polarseite eventueller Tropopausentrichter.

Die Abb. 144 bringt einen im Niveau 10 dyn. km gelegten Horizontalschnitt durch eine Tropopausenwelle der gemäßigten Zone. Am oberen Rand der Abbildung findet man auch einen Zonalschnitt und am linken Rand einen Meridionalschnitt durch dieselbe Tropopausenwelle. Alle Schnitte sind in schematischer Weise auf Grund der schon besprochenen statistischen Resultate gezeichnet. Im Horizontalschnitt zeigt die dick ausgezogene Linie die Schnittlinie der gewellten Tropopausenfläche mit der Niveaufläche 10 dyn. km. Südlich dieser „Tropopausenfront" befindet sich die Niveaufläche innerhalb der Troposphäre und nördlich derselben innerhalb der Stratosphäre.

Die dünnen vollausgezogenen Linien stellen die Isobaren dar. Sie beruhen auf folgenden statistischen Tatsachen: a) der Luftdruck im Niveau 10 dyn. km nimmt überall in der gemäßigten Zone gegen den Pol ab (s. Abschnitt **164**); b) in einem festen Punkt des Niveaus 10 dyn. km beobachtet man bei jedem Wellenberg der Tropopause ein Druckmaximum und bei jedem Wellental ein Druckminimum (vgl. Abb. 143). Die Druckmaxima sind also bewegliche Hochdruckkeile des permanenten subtropischen Hochdruckgürtels und die Druckminima sind bewegliche Tiefdruckausläufer des permanenten Poltiefs.

[1] Siehe diesbezüglich Palmén: „Die Beziehung zwischen troposphärischen und stratosphärischen Temperatur- und Luftdruckschwankungen." Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. XVII, H. 2, 1931.

Die gestrichelten Kurven stellen die Isothermen dar. Sie beruhen auf folgenden statistischen Tatsachen: a) die Temperatur in gegebenem Niveau innerhalb der Troposphäre nimmt polwärts ab, während sie innerhalb der Stratosphäre polwärts zunimmt (s. Abschnitt **163**); b) zu jedem Wellenberg der Tropopause gehört ein Temperaturmaximum der Troposphäre und ein Temperaturminimum der Stratosphäre, und zu

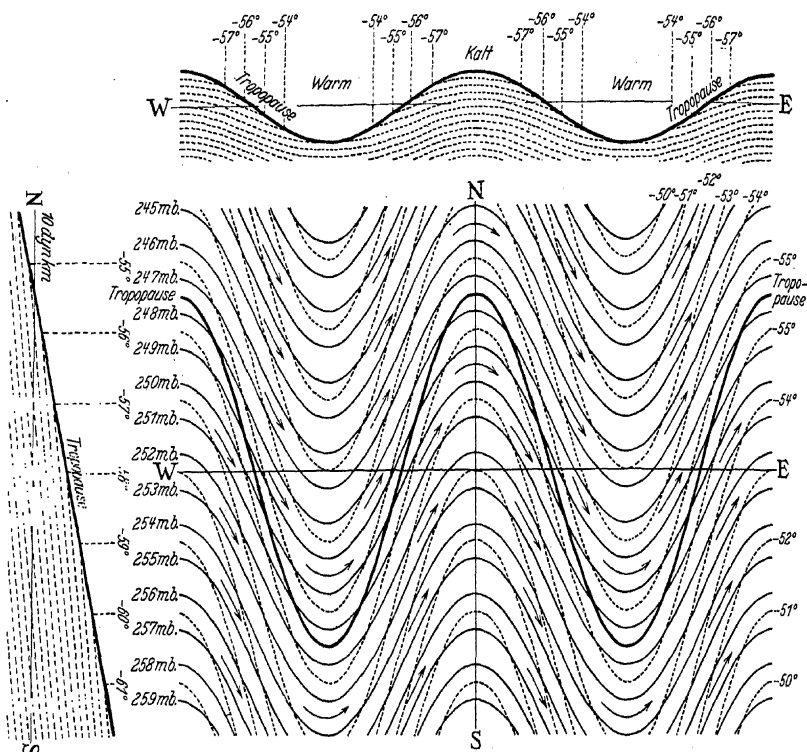



Abb. 144. Struktur der Tropopausenwellen, dargestellt mittels eines schematischen Horizontalschnittes im Niveau 10 dyn. km, Isobaren ausgezogen, Isothermen gestrichelt. Am linken Rande vertikaler Meridionalschnitt, oben vertikaler Zonalschnitt.

jedem Wellental der Tropopause gehört ein Temperaturminimum der Troposphäre und ein Temperaturmaximum der Stratosphäre (vgl. Abb. 143).

Im zonalen und meridionalen Vertikalschnitt ist wiederum die dick ausgezogene Linie die Schnittlinie mit der Tropopause, und die gestrichelten Linien sind die Schnittlinien mit den Isothermenflächen. Die Schnittlinien mit den Isobarenflächen sind weggelassen, da ihre Neigung bei dem relativ geringen Überhöhungsverhältnis der Abb. 144

verschwindend klein werden würde. Bei der gewählten Amplitude der Druckschwankung 6 mb würden die Isobarenflächen im Tropopausenwellenberg nur etwa 160 dyn. m höher liegen als im Tropopausenwellental.

Das dreidimensionale Bewegungsfeld innerhalb der Tropopausenwelle kennt man nur unvollständig durch direkte Beobachtung, aber das zweidimensionale horizontale Bewegungsfeld kennen wir auf jeden Fall annähernd durch die Gradientwindbeziehung (vgl. **127** (18)). Demgemäß strömt die Luft annähernd parallel zu den Isobaren des Horizontalschnittes der Abb. 144, wie das mit Pfeilen angedeutet worden ist. Die Geschwindigkeit der horizontalen Luftbewegung ist in der Nähe der Tropopause viel größer als in der unteren Troposphäre (s. Abb. 114 und 115, Abschnitt **166**), und zwar bewegt sich die Luft der obersten Troposphäre schneller gegen Osten als die wandernden Zyklonen. Den besten Beweis hierfür liefern die Wolken der obersten Troposphäre, die Cirren, die oberhalb der Zyklonen gebildet werden und so schnell vorwärtsströmen, daß sie meistens nur auf der Zyklonenvorderseite beobachtet werden. Da die Tropopausenwelle mit der Zyklone gekoppelt ist, geht sie also auch *langsamer ostwärts als die Luftbewegung* des Niveaus von 10 dyn. km.

Die vertikale Bewegungskomponente innerhalb der Tropopausenwellen ist natürlich nicht direkt beobachtbar, und wir wissen deshalb nicht, wie sie sich verteilt. Man könnte versucht sein anzunehmen, daß die Tropopausenwellen in Analogie mit Wasserwellen aus gehobenen Massen in den Wellenbergen und aus gesenkten Massen in den Wellentälern beständen, und wahrscheinlich ist es auch teilweise so. Die Vertikalamplituden der Luftteilchen können aber nicht groß sein, wie man aus dem Temperaturfelde der Troposphäre ersieht. Hätte man nämlich unter den Wellenbergen gehobene und unter den Wellentälern gesenkte troposphärische Luftmassen, so müßte die adiabatische Temperaturänderung bewirkt haben, daß die Temperatur unter den Wellenbergen relativ tief und unter den Wellentälern relativ hoch sei. Gerade das entgegengesetzte ist der Fall, und wir können deshalb schließen, daß die Vertikalkomponenten so schwach sein müssen, daß die mit ihnen verbundene adiabatische Erwärmung und Abkühlung durch andere stärkere temperaturändernde Prozesse überkompensiert werden.

Eine Betrachtung der horizontalen Luftbewegung im Niveau der Tropopause liefert dagegen die richtige Erklärung des vorhandenen Temperaturfeldes innerhalb der Tropopausenwellen[1]. Auf ein Koordinatensystem bezogen, das die Ostwärtsbewegung der Tropopausenwellen mitmacht, sind die Stromlinien Sinusoiden von ungefähr derselben Form wie die Niveaukurven der Tropopause (s. Abb. 145). Wären

[1] Schon in SCHEDLERS Arbeit enthalten.

sie das nicht, so würden bedeutende Aufgleit- oder Abgleitkomponenten an den Tropopausenhängen vorhanden sein, die, wie schon bemerkt, unwahrscheinlich sind. Nehmen wir jetzt an, daß das Temperaturfeld in der Umgebung der Tropopausenwelle in bezug auf das mitbewegte Koordinatensystem zeitlich unverändert bleiben soll, so müssen die Isothermen mit den Stromlinien auf der Abb. 145 zusammenfallen. Dies setzt allerdings voraus, daß die Wärmestrahlung keine schnellen individuellen Temperaturänderungen der bewegten Luftteilchen hervorbringt — eine Voraussetzung, die wahrscheinlich erfüllt ist. Man überzeugt sich leicht, daß Isothermen von der Form der Stromlinien auf der Abb. 145, und zwar mit steigenden Temperaturwerten äquatorwärts

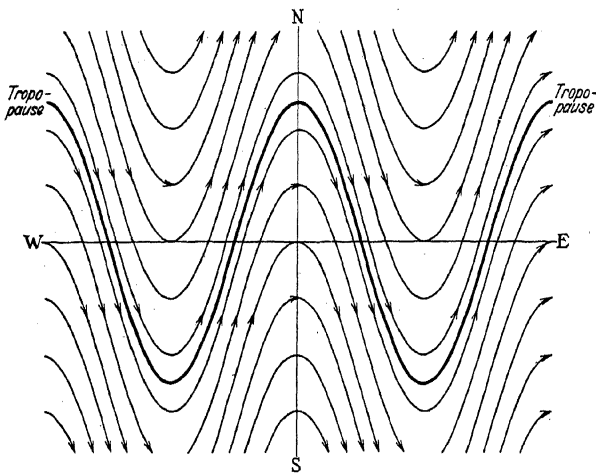



Abb. 145. Horizontale Stromlinien, relativ zu den ostwärts bewegten Tropopausenwellen.

und polwärts von der Schnittlinie mit der Tropopause aus, mit den Beobachtungstatsachen der Abb. 143 und 144 übereinstimmen.

Die Tropopausenwellen können also in erster Linie als die Auswirkung einer horizontalen Oszillation der Atmosphäre angesehen werden. Die meridionale Komponente dieser Oszillation verschiebt die geneigte Tropopause derart, daß Wellenrücken in den Gebieten mit Elongation polwärts und Wellentäler in den Gebieten der Elongation nach dem Äquator zu entstehen. Auf gegebener geographischer Breite ist die Troposphäre unter den Wellenrücken relativ warm, weil dort die Luftmassen ihre größte Elongation polwärts haben, und unter den Wellentälern kalt, weil dort die Luftmassen ihre größte Elongation äquatorwärts haben. Für die Stratosphäre kehren sich die Verhältnisse um, weil das meridionale Temperaturgefälle dort entgegengesetzt dem der Troposphäre ist.

Diese Ergebnisse über Tropopausenwellen bestätigen ein theoretisches Resultat, das wir früher (vgl. S. 518) abgeleitet haben: *in den großzügigen langperiodischen Wellen muß die Luftbewegung als Folge der Erddrehung überwiegend horizontal sein.* In diesem Punkte verhalten sich die Tropopausenwellen qualitativ ganz wie die früher betrachteten Zyklonenwellen.

Die Theorie, die wir für Zyklonenwellen entwickelt haben, indem wir die aufeinanderlagernden Schichten isotherm voraussetzten, gilt mit gleicher Annäherung auch für die Tropopausenwellen. In einem wie im anderen Falle blieben die Erscheinungen, welche von dem Vorhandensein der internen vertikalen und horizontalen Temperaturgradienten und der damit zusammenhängenden Änderung des Windes mit der Höhe abhängen, unberücksichtigt. Aber trotzdem dürfte es berechtigt sein, die abgeleiteten theoretischen Instabilitätskriterien auf die in der Natur auftretenden atmosphärischen Wellen mit Vorsicht anzuwenden. Insbesondere muß ein Stabilitätskriterium, ähnlich dem in **160 (II)** entwickelten, für Zyklonen- und Tropopausenwellen gelten; mit anderen Worten: ist das Gefälle der Diskontinuitätsfläche unter einem gewissen, kritischen Wert (für den theoretisch behandelten Fall ist dieser kritische Wert $\frac{1}{95}$, in der Natur $<\frac{1}{95}$), so sind alle langen Wellen stabil. Das Gefälle der Polarfrontfläche ist größer als der mutmaßliche kritische Wert, und lange Polarfrontwellen müssen deshalb meistens instabil sein. Das Gefälle der Tropopause ist bedeutend kleiner, und deswegen sind wahrscheinlich *alle langen Tropopausenwellen stabil.* Ist dieser Schluß richtig, so können die langen Tropopausenwellen sich nie spontan bilden, und die atmosphärischen Störungen können nicht in den Tropopausenwellen ihren primären Ursprung haben.

183. Theorie der Koppelung der Polarfront- und der Tropopausenwellen. Die gleichzeitige Wellenbewegung in der Polarfrontfläche und in der Tropopause führt zu sehr schwierigen mathematischen Aufgaben. Wir wissen schon, zu welchen Schwierigkeiten der eine keilförmige Raum in der vereinfachten Zyklonentheorie führt, wo man nur zwei übereinandergelagerte Schichten behandelt. Die vollständige Theorie muß sich aber auf drei übereinanderlagernde Schichten beziehen, getrennt durch zwei verschieden geneigte Diskontinuitätsflächen, die zusammen mehrere keilförmige Räume begrenzen. Die *exakte* Theorie der in diesem Systeme auftretenden gekoppelten Wellen wird deshalb nicht leicht zu entwickeln sein.

Wir werden aber im folgenden versuchen, eine *elementare* Theorie der Koppelung zu entwickeln, die vorläufig als Arbeitshypothese dienen kann, bis die mathematische Meteorologie die vollständige und exakte Integration des betreffenden Störungsproblemes bringt.

Wir denken uns als Anfangszustand eine in allen Höhen genau von West nach Ost strömende Atmosphäre, die in der Abb. 146 oben in meridionalem und zonalem Vertikalschnitt dargestellt ist. Die polwärts abfallende Tropopause schneidet den Zonalschnitt längs einer horizontalen Linie. In der unteren Troposphäre befinde sich eine stationäre

Abb. 146. Die Wirkung neugebildeter Polarfrontwellen auf die Tropopause.

zonale Polarfrontfläche, die ebenfalls den Zonalschnitt längs einer Horizontalen schneidet. Die Westkomponente des Windes nimmt sprunghaft zu von der Polarluft zur darüberliegenden Tropikluft. Innerhalb der Tropikluft nimmt die Westkomponente stetig zu bis zur Tropopause, darüber nimmt der Westwind wieder ab. Es findet nirgends Vertikalbewegung statt, auch nicht an der Polarfrontfläche, denn sowohl

die Polarluft als die Tropikluft strömen parallel zu den Höhenkurven der Fläche.

Es bilden sich jetzt Wellen kleiner Amplitude an der Polarfrontfläche, so daß ihre Schnittlinie mit dem zonalen Vertikalschnitt sich in eine sinusoidenähnliche Kurve umwandelt (Abb. 146, Mitte). Die Tropikluft gleitet an der Westseite aller Wellenberge aufwärts und an ihrer Ostseite abwärts. Diese erzwungene Vertikalbewegung muß mit der Höhe abklingen, und wir wissen, daß sie an der Tropopause fast verschwunden ist. Es findet also über der Westseite der Polarfrontwellenberge vertikales Schrumpfen und entsprechende horizontale Divergenz der Tropikluft statt, über der Ostseite umgekehrt vertikale Dehnung und horizontale Konvergenz. Die unmittelbare Folge horizontaler Divergenz ist antizyklonische Zirkulationsbeschleunigung, die Folge horizontaler Konvergenz ist zyklonische Zirkulationsbeschleunigung (s. S. 482). Die ursprünglich rein west-östliche Tropikluftströmung wird also über den Westhängen der Wellenberge antizyklonische und über den Osthängen der Wellenberge zyklonische Krümmung annehmen (vgl. Abb. 68b, S. 492), so daß die Stromlinien in Horizontalprojektion sinusoidenähnliche Form bekommen (in Abb. 146 unten eingezeichnet). Eine solche sinusoidale Weströmung in der oberen Troposphäre läßt die Luft eine ebensolche horizontale *meridionale Oszillation* ausführen, die wir in den Tropopausenwellen konstatierten. Die Wellenrücken der Tropopause entstehen dabei an der Stelle mit größter Elongation polwärts, d. h. über dem Westhang der Polarfrontwellenberge, die Wellentäler der Tropopause entstehen an der Stelle mit größter Elongation äquatorwärts, d. h. über dem Osthang der Polarfrontwellenberge.

Wir haben hiermit nur die Initialwirkung neu entstandener Polarfrontwellen auf die darüberliegende, anfangs wirbelfreie Tropikluftströmung abgeleitet. Wir müssen noch kontrollieren, wie die Verteilung der Vertikalbewegung wird, nachdem wir nicht mehr eine geradlinige, sondern sinusoidale Tropikluftströmung haben. Zu dem Zwecke haben wir in der Abb. 147 unten die schematische Topographie der gewellten Polarfrontfläche zusammen mit der sinusoidalen Tropikluftstromlinie dargestellt, und zwar diesmal nicht die Stromlinie in bezug auf die Erde, sondern in bezug auf die ostwärtswandernden Polarfrontwellen[1]. Wie man sieht, finden sich die Scheiden zwischen Auf- und Abgleiten nicht mehr genau bei den Wellenrücken und Wellentälern der Polarfrontfläche, sondern etwas westlich davon gelegen. Die schattierte Aufgleitzone umfaßt also nun einen schmalen Streifen westlich des Wellentales, aber dafür hat sie einen entsprechenden Streifen westlich des Wellen-

[1] Die Abbildung setzt voraus, daß die Tropikluft schneller ostwärts vorrückt als die Polarfrontwelle. Dies trifft zu für alle Wellen, die über das erste Anfangsstadium hinweggekommen sind.

rückens verloren. Dies stimmt auch mit der Erfahrung bezüglich der Erstreckung der Aufgleitbewölkung überein. Deren Ostrand ist immer etwas westlich von dem Scheitel der Polarluftzunge, während der Westrand etwas westlich von dem Wellental der Polarfrontfläche liegt.

Wiederholen wir nun die obige Betrachtung über die Bildung von Wirbeln verschiedenen Rotationssinnes oberhalb der Auf- und Abgleitgebiete usw., so bekommen wir das Resultat, daß die Tropopausenwellen auch etwas weiter westlich als auf der Abb. 146 mit den Polarfrontwellen gekoppelt sein sollten.

Diese Rückwärtsverschiebung der Tropopausenwellen relativ zu den Polarfrontwellen wird durch den folgenden Vorgang wettgemacht und

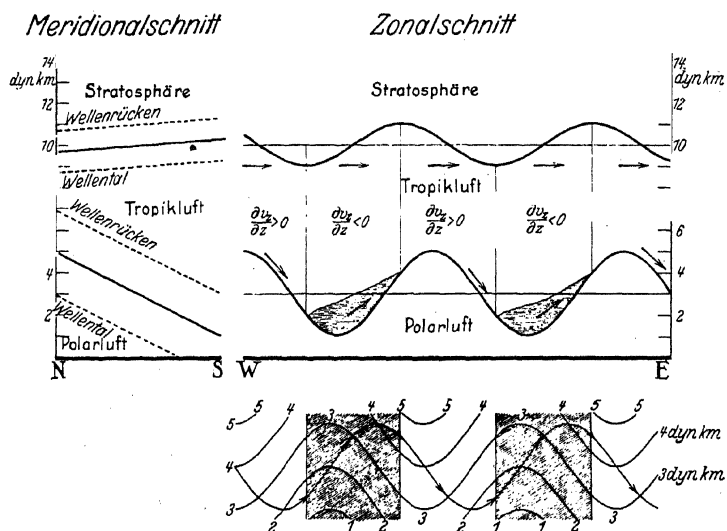



Abb. 147. Gegenseitige Koppelung von wandernden Polarfront- und Tropopausenwellen. Unten: Topographie der Polarfrontfläche nebst Tropikluftstromlinie relativ zu den ostwärts wandernden Polarfrontwellen. Aufgleitzonen schraffiert.

sogar überkompensiert. Der zyklonische (antizyklonische) Curl entsteht allerdings im ersten Augenblick im Gebiet der horizontalen Konvergenz (Divergenz). Die Luft, die diesen zyklonischen (antizyklonischen) Curl erhält, bleibt aber nicht in fester Lage relativ zu den Polarfrontwellen, sondern strömt vorwärts relativ zu ihnen. Es wird dadurch allmählich ein Zustand erreicht, wo der größte zyklonische Curl an der Ostgrenze des Bildungsgebietes zyklonischen Curls (das Abgleitgebiet) und der größte antizyklonische Curl an der Ostgrenze des Bildungsgebietes antizyklonischen Curls (das Aufgleitgebiet) liegen. Mit anderen Worten, bei alternden Zyklonen sind die Tropopausenwellen

relativ zu den Auf- und Abgleitgebieten weiter östlich gekoppelt als bei jungen Zyklonen. Nimmt man die vordere Grenze der Aufgleitbewölkung als identisch mit der Vordergrenze des Aufgleitens an, so könnte man die zu erwartende Koppelungsregel für *alternde Zyklonen* folgendermaßen ausdrücken (s. Abb. 147): „*der Tropopausenwellenrücken liegt über der Vordergrenze der Aufgleitbewölkung.*“ Nimmt man ebenso die Hintergrenze der Aufgleitbewölkung als die hintere Grenze des Aufgleitens, so bekäme man entsprechend: „*das Tropopausenwellental liegt über der Westgrenze der Aufgleitbewölkung*“.

Der empirische Beweis dieser Koppelungsregeln steht noch aus. Die Übereinstimmung mit der SCHEDLERschen Statistik ist aber befriedigend. Wir brauchen nur die Wellenrücken und Wellentäler der Polarfrontfläche durch die entsprechenden Luftdruckgebilde am Erdboden, den Hochdruckkeil und den Tiefdrucktrog zu ersetzen, und sehen dann, daß die Abb. 146 mit den neuentstandenen Polarfrontwellen und zugehörigen Tropopausenwellen schon angenähert dasselbe Koppelungssystem wie das SCHEDLERsche in der Abb. 143 liefert. Die SCHEDLERschen Tropopausenwellen liegen aber etwas weiter voraus und passen deshalb noch besser mit dem Koppelungssystem der Abb. 147 für ältere Zyklonen zusammen, die ja auch in Europa viel häufiger sind als die neugebildeten.

Es ist keine wesentliche Beschränkung unserer Theorie, daß sie hier nur für einen bahnparallelen Vertikalschnitt nördlich der Zyklonenbahnen abgeleitet worden ist. Es ist nämlich leicht ersichtlich, daß qualitativ dasselbe Koppelungssystem südlich der Zyklonenbahnen zustande kommen würde. Dasselbe Aufgleiten an den Westhängen der Wellenrücken und Abgleiten an den Osthängen derselben findet ja notwendigerweise statt, auch wenn die Wellentäler der Polarfrontfläche bis zum Erdboden hinabreichen. Die occludierte Zyklone schließlich ist ja auch von einem Wellental in der Polarfrontfläche, ähnlich denen der Abb. 147, begleitet, und auch für diese müßte dasselbe Koppelungssystem mit den Tropopausenwellen gelten.

Die Abb. 146 und 147 geben auch einen Einblick in den *Mechanismus der Vertiefung des Druckminimums*. Die Tropopausenwellen sind, wie schon erwähnt, in der oberen Troposphäre von Druckwellen begleitet, deren Wirkung sich auf die Druckwellen der Polarfrontwellen superponieren, und am Erdboden beobachtet man auf der Barographenkurve die Summe der Wirkungen beider Wellensysteme. Im Anfangsstadium der Zyklone haben beide Wellensysteme kleine Amplituden, und dazu liegt das Tropopausenwellental mit einem Phasenwinkel von etwa 90° hinter dem Wellental der Polarfrontfläche, so daß die Amplitude der resultierenden Druckwelle am Boden noch klein ist. Später wachsen die Amplituden beider Wellensysteme und der Phasenunterschied

zwischen Tropopausenwellental und Polarfrontwellental nimmt ab. Dadurch wächst die Amplitude der resultierenden Druckwelle am Boden. oder mit anderen Worten, die Zyklone vertieft sich. Der Vertiefungseffekt der Tropopausendruckwelle liegt also immer hinter dem ursprünglichen Druckzentrum, das am Erdboden an der Spitze der Tropikluftzunge sich gebildet hat. Dies trägt bei zur Bildung der hinteren Fortsetzung des Druckzentrums, in welchem die „zurückgebogene Occlusionsfront" liegt (s. Abschnitt **178**). Diese hintere Ausbuchtung des Druckminimums ist schon ziemlich früh im Lebenslauf der Zyklone sichtbar, und in vielen Fällen entwickelt sie sich zum tiefsten Teil des gesamten Druckminimums, während gleichzeitig die in Abschnitt **178** besprochene obere Welle sich an der Kaltfrontfläche bildet.

In allen tiefen Zyklonen bildet sich aus dem Wellental der Tropopause ein „Tropopausentrichter", und der reine Wellencharakter des Vorganges geht damit verloren[1]. Dem Tropopausentrichter fehlt die schnelle Beweglichkeit der Tropopausenwelle, und der Trichter wird allmählich stationär, genau so wie die große tiefe Zyklone, zu der er gehört.

Das schließliche *Absterben der Zyklone* wird dadurch eingeleitet, daß das Wellental der Polarfrontfläche durch Occludieren „gefüllt" wird. Erst viel später füllt sich der Tropopausentrichter, und die Zyklone kann lange bestehen bleiben und sogar einige Zeit auch tiefer werden ohne untere Polarfrontstörung. Das Absterben der Zyklone ist überhaupt ein so langsamer Vorgang, daß meistens vor seiner Beendigung eine neue lebenskräftige Zyklone ankommt und die alte absterbende Zyklone absorbiert. Währenddessen steigt die Tropopause andauernd, denn es nähert sich der Tropopausenwellenberg, der oberhalb des Aufgleitgebietes mit der neuen Zyklone gekoppelt ist.

Gleichzeitig mit dem oben besprochenen Aneinanderrücken der beiden Wellentäler werden auch die Wellenberge der Tropopause näher an die Wellenberge der Polarfrontfläche heranrücken mit dem Erfolg, daß sehr hoher Druck am Erdboden entsteht. Dies ist dann die Ursache der *Bildung der großen stationärwerdenden Hochs* aus einem ursprünglich beweglichen Hochdruckkeil. Bei diesem Vorgang bildet sich aus dem Tropopausenwellenberg eine stationärwerdende große Erhöhung der Tropopause. Diese Tropopausenerhöhungen über den großen Hochs der gemäßigten Zone erreichen nie dieselbe Höhe wie die dauernd hochliegende Tropopause der Tropen, aber es wird immerhin vorkommen, daß sie wie isolierte „Tropopausenberge" emporragen, während sich südlich davon ein Tropopausensattel befindet. Das schließliche Abziehen oder der *Verfall eines großen Hochs* tritt ein, wenn eine Kalt-

[1] Ein Beispiel, wo der Boden des Tropopausentrichters bis 5 km Höhe herunterkam, ist von PALMÉN l. c. S. 745 beschrieben worden.

front sich nähert (s. Abschnitt **181**, S. 737). Dieser Vorgang ist immer von einem Herabsinken der Tropopause begleitet, denn es nähert sich das Tropopausenwellental, das dicht hinter der erwähnten Kaltfront gekoppelt ist.

Die hier skizzierte Theorie der gegenseitigen Koppelung von Polarfront- und Tropopausenwellen ist, wie ersichtlich, nur ein erster Versuch. Es sollten lediglich die bisherigen bruchstückweise gesammelten Beobachtungstatsachen unter einen einheitlichen theoretischen Gesichtspunkt gebracht und dadurch das Problem der Dynamik der atmosphärischen Störungen für die zukünftige mathematische Behandlung zurechtgelegt werden.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die wichtigen empirischen Tatsachen bezüglich der Tropopausendruckwellen und deren Rolle für den Aufbau der Zyklonen und Antizyklonen durch die „österreichische Schule" zuerst gefunden worden sind (außer SCHEDLER, der hier vielfach zitiert ist, hat besonders FICKER dazu beigetragen mit dem Studium der „primären" und „sekundären" Druckwellen). Die Koppelungstheorie der Tropopausen- und Polarfrontwellen in der hier gegebenen Form ist in der Meteorologie wahrscheinlich neu, aber V. WALFRID EKMAN[1] hat schon früher ein ähnliches ozeanographisches Problem — das Strömen des Meereswassers über gewelltem Boden — in analoger Weise gelöst.

184. Der meridionale Wärmetransport durch die gemäßigte Zone. Die SCHEDLERsche Statistik (Abb. 143) liefert auch Daten von Interesse für die Beurteilung des meridionalen Wärmetransportes durch die gemäßigte Zone. Sie zeigt, daß im größten Teil der Troposphäre die polwärts gerichteten Winde der Zyklonenvorderseiten deutlich wärmer sind als die äquatorwärts gerichteten Winde der Zyklonenrückseiten, so daß ein Nettowärmestrom polwärts resultiert. Je mehr man sich der oberen Grenze der Troposphäre nähert, um so symmetrischer wird aber die Temperaturverteilung relativ zur Troglinie des Tiefdruckes, und dicht unterhalb der Tropopause sind die Winde mit Komponente polwärts vor dem Tiefdrucktrog praktisch genommen von der gleichen Temperatur wie die Winde mit Komponente äquatorwärts dahinter. *Die oberste Troposphäre allein liefert also nur einen geringen Wärmestrom gegen den Pol.*

Das fehlende Gleichgewicht zwischen zu- und abgeführter Wärme verschiedener Breitenzonen ist die ursprüngliche Ursache aller meridionalen Massen- und Wärmetransporte in der Atmosphäre, die ja sonst

[1] „Über Horizontalzirkulation bei winderzeugten Meeresströmungen." Arkiv f. Mat., Astr. o. Fysik, No. 26. Stockholm 1923. Vollständigere Theorie in „Gerlands Beiträge" Bd. 36 (1932) S. 385.

eine reine Zonalzirkulation haben würde. Die Störungen der unteren $^2/_3$ der Troposphäre, mit deren Hilfe der meridionale Wärmetransport durch die gemäßigte Zone durchgeführt wird, muß deshalb als der primär arbeitende Teil der atmosphärischen Störungen der gemäßigten Zone angesehen werden. Die damit gekoppelten Störungen der oberen Troposphäre und der Stratosphäre, die für den meridionalen Wärmetransport ziemlich belanglos sind, deuten wir deshalb als ein sekundäres Mitschwingen der oberen Atmosphäre. Diese Auffassung steht natürlich nicht in Widerspruch zu der Tatsache, daß die Störungen der oberen Atmosphäre oft ziemlich große Energie haben und in ihrer Rückwirkung auf die Störungen der unteren Atmosphäre indirekt von großer Bedeutung sein können.

185. Die Wellen- und Wirbelbildungen der Intertropikfront. Die tropischen Zyklonen. Die tropischen Wirbelstürme entstehen erfahrungsgemäß an der Intertropikfront oder in deren nächster Nähe. Nicht alle Teile der Tropikfront sind in gleichem Maße als Brutstätten der tropischen Zyklonen wirksam. Die Tropikfrontstrecken über Land scheiden alle als Zyklonenerzeuger aus. Ebenfalls können sich keine Orkane auf den Teilstrecken der Tropikfront bilden, die sich zwischen 3° N und 3° S befinden, weil die Corioliskräfte hier sehr klein sind, und deshalb die Intertropikfrontfläche fast horizontal, also, nach den Bemerkungen auf S. 749, sehr stabil sein muß. Die bevorzugte Jahreszeit der tropischen Zyklonen ist der Spätsommer (oder Herbst) der betreffenden Erdhalbkugel, denn zu dieser Zeit entfernt sich die Tropikfront am meisten vom Äquator. Im Winter kommen die eigentlichen tropischen Zyklonen nicht vor, wohl aber dann und wann schwächere Zyklonenbildungen auf den Polarfrontästen, die dann bis in die Tropen hinunterreichen (z. B. im Mexikanischen Golf und bei den Philippinen).

Zyklonenauslösende Teile der Tropikfront befinden sich im Südsommer (Abb. 132, S. 715) über dem Südindischen Ozean und über dem westlichen Teil des tropischen Südpazifiks. Die Tropikfront über dem östlichen Teil des Pazifiks sowie über dem Atlantik sind zu nahe am Äquator, um Zyklonen erzeugen zu können. Im Nordsommer (Abb. 133, S. 715) bilden sich tropische Zyklonen über dem Atlantik, im Nordindischen Ozean, über dem westlichen Pazifik und zuweilen auch an der zentralamerikanischen Pazifikküste. Im Nordindischen Ozean fehlen die eigentlichen tropischen Zyklonen um die Mitte des Sommers, weil die Tropikfront dann über Asien liegt. Es gibt also dort eine Frühlings- und eine Herbstperiode mit Zyklonentätigkeit.

Über die verschiedenen Stadien des Bildungsvorganges der tropischen Zyklonen ist man wenig unterrichtet. Die tropischen Zyklonen sind

nämlich im Anfang von sehr kleiner Ausdehnung (etwa 100 bis 300 km Durchmesser), und es wäre also notwendig, über ein dichtes Stationsnetz zu verfügen, um die Struktur der Zyklonen in ihren verschiedenen Lebensstadien zu untersuchen. In den Tropen und zumal über dem Meer läßt sich dies schwerlich realisieren.

Wahrscheinlich hat die tropische Zyklone zuerst ein Wellenstadium analog dem der außertropischen Zyklonen, aber erlangt währenddessen noch keine große Intensität und wird nicht als Orkan erkannt. Die fertig ausgebildete tropische Zyklone, der tropische Orkan, ist immer verwirbelt, daher ziemlich symmetrisch und kann keine deutlichen Fronten zeigen. Dagegen zeigt sie oft ein kleines schwachwindiges Gebiet in der Mitte ringsherum vom Sturm umgeben, dessen Grenze gegenüber den schwachen Winden diskontinuierlich ist.

Die Frage, woher die große Energie der tropischen Orkane stammt, ist naturgemäß noch nicht auf Grund direkter aerologischer Beobachtungen gelöst worden. Sehr viel spricht aber dafür, daß die Atmosphäre an der Bildungsstelle ziemlich stark feuchtlabil ist, daß aber eine geordnete Auslösung besonderer Art notwendig ist, um eine großzügige Vertikalumwälzung mit Gewinn kinetischer Energie hervorzurufen. Ist die Intertropikfrontfläche dynamisch instabil, und ist zu gleicher Zeit Feuchtlabilität in genügendem Maße vorhanden, so liegen Bedingungen der großzügigen Umwälzungen vor (vgl. S. 736). Die Seltenheit der dynamischen Instabilität und die relative Seltenheit hinreichender Feuchtlabilität erklärt dann die Seltenheit der sich zu Orkanstärke entwickelnden tropischen Zyklonen.

Nachdem die *feuchtlabile Vertikalzirkulation* irgendwie durch eine Wellenstörung der Tropikfront in Gang gesetzt worden ist, arbeitet sie nachher mit sozusagen unzerstörbarem Solenoidfeld. Wahrscheinlich liegen dann die Solenoide in horizontalen Kreisen um die Achse der Zyklone orientiert und müssen von solchem Vorzeichen sein, daß eine Vertikalzirkulation mit Aufsteigen an der Zyklonenachse und Absteigen ringsherum arbeitserzeugend ist. Mit anderen Worten, längs den Isobarenflächen gemessen muß die Luftdichte gegen die Achse der Zyklone abnehmen. Nur die Radialkomponente gegen das Zentrum der tropischen Zyklone hin ist primär durch die feuchtlabile Vertikalzirkulation erzeugt. Die auf der Erddrehung beruhende, das Zentrum umkreisende Bewegung fängt schwach an und wächst quadratisch mit der Zeit, vorausgesetzt, daß die primär erzeugte Radialkomponente linear mit der Zeit zunimmt (vgl. die quadratisch mit der Zeit wachsende „Transversale Geschwindigkeit“ in der Tabelle S. 690). Der so entstehende intensive Horizontalwirbel, der die Haupterscheinung der tropischen Zyklone ist, braucht zu seinem Fortbestehen nur

so viel Energiezufuhr, wie zur Überwindung des Reibungswiderstandes nötig ist.

Das Solenoidfeld der tropischen Zyklone ist sicher sehr viel schwächer als das der außertropischen Zyklonen, aber Messungen, die zu seiner quantitativen Berechnung benutzt werden können, fehlen vollständig. Die beim Umlauf um das schwache Solenoidfeld der tropischen Zyklone erzeugte Arbeit genügt z. B. häufig nicht, um die beim Übertreten der Zyklone vom Meer auf hügeliges Land plötzlich vergrößerte Reibung zu überwinden. Die vom Meer aufs Land kommenden tropischen Zyklonen werden deshalb abgeschwächt oder können sogar schnell vernichtet werden.

Damit das Solenoidfeld der tropischen Zyklone fortbestehen kann, ist es wichtig, daß das Aufsteigen in einem engen Gebiet und das Absteigen in einem weiten Gebiet ringsherum stattfindet (s. Abschnitt **175**). Selbst dann führt aber eine langandauernde adiabatische Vertikalzirkulation zur Schwächung der Feuchtlabilität und zur asymptotischen Annäherung an eine feuchtadiabatische Schichtung. In Wirklichkeit vollzieht sich jedoch die Vertikalzirkulation in der tropischen Zyklone *nicht genau adiabatisch*, denn unten herrscht immer der tropische Strahlungsüberschuß und oben das Strahlungsdefizit der Emissionsschicht (vgl. Abb. 118 und 119, S. 666). Dadurch wird es eben möglich, daß die Feuchtlabilität trotz langandauernder Vertikalzirkulation aufrechterhalten wird, und dadurch wird erst die Langlebigkeit der tropischen Zyklone verständlich.

Die tropischen Zyklonen bewegen sich anfangs westwärts mitgeführt durch den äquatorialen Oststrom. Durchweg findet man aber, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Zyklone, die ungefähr 15 km/st (4 m/sec) beträgt, kleiner als die mittlere Geschwindigkeit der umgebenden Oströmung ist. Weiterhin zeigen die tropischen Zyklonen die Tendenz etwas nach rechts (Südhalbkugel links) relativ zur äquatorialen Oströmung abzutreiben (sog. Poltendenz der Zyklonen). Es liegt nahe, dieses Phänomen als ein Rotoreffekt zu erklären (Abschnitt **73**). Eine zyklonisch rotierende Luftmasse, die relativ zur umgebenden Luftströmung ostwärts treibt, muß nämlich auf der Nordhalbkugel nordwärts, auf der Südhalbkugel südwärts beschleunigt werden.

Beim Westwärtswandern kommt die tropische Zyklone notwendigerweise früher oder später zu dem Westende einer subtropischen Hochdruckzelle (s. Abschnitt **173**), wo die äquatoriale Oströmung polwärts abzweigt, und sie folgt dann dieser Abzweigung vom Äquator weg. Etwa *bei den Wendekreisen angekommen, biegen die Zyklonen um*, so daß sie von dort an Komponenten nach Osten haben. In dieser Weise fügen sich die tropischen Zyklonen in die Reihe der ostwärts bewegten Polarfrontzyklonen ein, die das Gebiet nördlich der Wende-

kreise beherrschen. Gleichzeitig wird die aus den Tropen ankommende Zyklone schneller bewegt, größer in Ausdehnung und weniger intensiv in ihren Windstärken, so daß sie schließlich von einer occludierten Polarfrontzyklone kaum zu unterscheiden ist.

Die bevorzugten Einbruchsöffnungen der tropischen Zyklonen nach der gemäßigten Zone sind schon aus den Mittelwertkarten Abb. 108 und 106 zu ersehen. Auf der Nordhalbkugel sind sie an der ostamerikanischen und der ostasiatischen Küste, und auf der Südhalbkugel östlich von Südafrika und östlich von Australien gelegen. An allen diesen Stellen bestehen ziemlich beständige Abzweigungen des äquatorialen Ostwindes durch den Subtropenhochdruckgürtel nach der gemäßigten Zone.

Neunzehntes Kapitel.

Das Wetter.

186. Die Wolken- und Niederschlagsbildung. Die Kondensation des atmosphärischen Wasserdampfes kann entweder herbeigeführt werden durch turbulente Mischung, die der betrachteten Luftschicht Wasserdampf zuführt, oder durch Abkühlung wasserdampfhaltiger Luft bis zur Erreichung des Taupunktes[1].

Die Aufnahme des Wasserdampfes in die Luft erfolgt durch Verdampfung flüssigen Wassers bzw. durch Sublimation von Schnee und Eis an der Erdoberfläche oder aus dem fallenden Niederschlag. Die Verteilung des aufgenommenen Wasserdampfes innerhalb der Atmosphäre wird durch die *turbulente Mischung* übernommen. Diese sucht der ganzen durchmischten Atmosphäre ein überall gleiches Mischungsverhältnis zwischen Wasserdampf und Luft zu geben. Folglich geht ein unsichtbarer Strom von Wasserdampf von den Orten, wo er aufgenommen wird, nach den wasserdampfärmeren Teilen der Atmosphäre. Der horizontale Wasserdampftransport durch turbulente Mischung ist ohne Interesse, da er viel kleiner als der advektive Wasserdampftransport durch horizontale Luftströmungen ist. Dagegen ist der vertikale Wasserdampftransport durch turbulente Mischung ungefähr von derselben Größenordnung wie die vertikale Konvektion von Wasserdampf in den großzügigen Luftströmungen.

Die Herstellung eines nach der Höhe unveränderlichen Mischungsverhältnisses von Wasserdampf und Luft in einer Atmosphäre mit Temperaturabnahme nach oben führt notwendigerweise zu einem Zu-

[1] Sowohl Übersättigung als auch Kondensation vor Erreichung von 100% relative Feuchte kommen in der Atmosphäre vor, ersteres bei sehr reiner Luft, letzteres bei Anwesenheit hygroskopischer Verunreinigungen (besonders Meeressalz). Auf diese Erscheinungen wird hier nicht eingegangen.

stand, wo die relative Feuchte nach oben zunimmt. Von dem Niveau an, wo die relative Feuchte 100% erreicht, bildet sich dann eine Wolkenschicht mit nach oben wachsendem Gehalt an flüssigem Wasser. Sollte das Mischungsverhältnis $\frac{\text{Wasserdampf} + \text{Wasser}}{\text{Luft}}$ bis hoch hinauf weiter konstant bleiben, so würde von einem gewissen Niveau an der Wassergehalt der Wolke so groß werden, daß Niederschlag ausfällt. Von jenem Niveau an kann also das erwähnte Mischungsverhältnis auch bei intensiver Mischung nicht mehr nach der Höhe konstant sein, sondern muß mit der Höhe abnehmen. Das mit der Höhe konstante Mischungsverhältnis kann also z. B. nicht durch die ganze Troposphäre bestehen bleiben, wohl aber für intensiv durchmischte Teilschichten derselben von 1 oder vielleicht 2 km Dicke.

Etwaige Temperaturinversionen sperren die turbulente Mischung in vertikaler Richtung fast vollständig ab und bilden deshalb meistens Diskontinuitäten in der vertikalen Verteilung des Wasserdampfes. Direkt oberhalb der Sperrschicht ist die relative Feuchte gewöhnlich klein infolge der einseitigen Mischung mit den oberen Luftmassen. Direkt unterhalb der Sperrschicht ist die relative Feuchte dagegen gewöhnlich groß wegen der einseitigen Mischung der dortigen Luft mit der unten angrenzenden. Viele Wolkenschichten liegen deshalb direkt unterhalb der Sperrschichten für die vertikale Mischung. Als Sperrschichten in schwächerem Grade wirken dabei auch alle Schichten mit einer vertikalen Temperaturabnahme, die kleiner ist als die für die Troposphäre normale.

Die *Abkühlung wasserdampfhaltiger Luft bis zur Erreichung des Taupunktes* verläuft nach der Gleichung **50** (4), die in voll entwickelter Form lautet:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{c_p}\frac{dw}{dt} + \frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y} + v_z\frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

Das erste Glied rechts vertritt die temperaturändernde Wirkung der Strahlung und der turbulenten Wärmeleitung. Am wichtigsten ist wahrscheinlich die Strahlung. Beispielsweise wird warme Luft über kalter Erdoberfläche durch Strahlung gegen die kalte Unterlage gekühlt, wodurch bei genügender Abkühlung Bodennebel entsteht. Die gebildete Nebeloberfläche strahlt selbst Wärme nach oben aus, und zwar strahlt sie während der Nacht mehr Wärme aus, als sie empfängt, wodurch die Nebelmasse durch fortgesetzte Kondensation nach oben wächst. Ähnlich verhalten sich auch die Oberseiten beliebiger Wolkenschichten in der freien Atmosphäre.

Das zweite Glied rechts — die adiabatische Temperaturänderung — ist gemäß der in Abschnitt **50** durchgeführten Diskussion wesentlich eine Folge der Vertikalverschiebung des Teilchens, und zwar sind es

die aufsteigenden Teilchen, die sich abkühlen. Diese adiabatische Abkühlung durch aufsteigende Bewegung $\frac{R}{c_p}\frac{\theta}{p} v_z \frac{\partial p}{\partial z}$ scheint die wichtigste Bildungsursache für die Mehrzahl aller Wolken zu sein[1].

Die Auflösung der Wolken erklärt sich einfach durch die Umkehrung der wolkenbildenden Prozesse, d. h. durch Mischung mit wasserdampfarmer Luft (meistens oberhalb der Wolke), durch Strahlungserwärmung oder vor allem durch adiabatische Erwärmung bei absinkender Bewegung.

Niederschlag tritt ein, sobald einige der Wolkenteilchen (feste oder flüssige) genügend anwachsen, um aus der Wolke herausfallen zu können. Auf die näheren Umstände des Anwachsens der Wolkenteilchen kann hier nicht eingegangen werden. Viele der diesbezüglichen Fragen kolloidchemischer Natur sind noch ungeklärt. Elektrische und hydrodynamische Fernkräfte spielen auch mit nach dem in Abschnitt **69**, S. 252, skizzierten Schema.

Es sei hier nur auf die anscheinend sehr *wichtige Rolle der festen Wolkenteilchen* für die Bildung des Niederschlages aufmerksam gemacht. In Wolken ohne Schnee- und Eisteilchen scheint das Anwachsen der Tröpfchen, durch direkte Kondensation bzw. Zusammenfließen, sehr langsam vor sich zu gehen, und der Niederschlag wird schwach oder bleibt ganz aus. Bestehen die Wolken aber aus einem Gemisch von Wasser- und Eisteilchen, so werden bei *Temperaturen über 0° C* die Eisteilchen vermöge des Effekts der kalten Wand Wasserdampf auf sich kondensieren, und zwar auf Kosten der Wasserteilchen. Bei *Temperaturen unter 0° C*, wo alle Teilchen annähernd dieselbe Temperatur haben, wird der Prozeß trotzdem in derselben Richtung vor sich gehen, und wahrscheinlich sogar schneller wegen des höheren Sättigungsdruckes über unterkühltem Wasser derselben Temperatur. Die somit vergrößerten Eisteilchen erlangen größere Fallgeschwindigkeit als die

[1] Dieses seit langem anerkannte Resultat ist neulich von A. GIÃO in: „Essai d'hydrométéorologie quantitative" Köppen-Band III von Gerlands Beiträgen 1931, angefochten worden, indem er zu beweisen sucht, daß $v_z \frac{\partial p}{\partial z}$ in den großzügigen Bewegungen von kleinerer Größenordnung als $\partial p/\partial t$ sei. Der entscheidende Fehler seiner Beweisführung liegt in der Vernachlässigung des Gliedes $\frac{1}{2\Omega\sin\varphi}\,\mathrm{rot}\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ in seiner Gleichung (13), die zur Bestimmung der Größenordnung der Vertikalbewegung dient. Durch die Berücksichtigung dieses in der Tat größten Gliedes der rechten Seite der Gleichung (13) von GIÃO ergeben sich die schon zitierten Resultate von BRUNT und DOUGLAS (Abschnitt **179**), die zu einem v_z von der Größenordnung 10^{-2} m/sec führen. Den besten Beweis für diese Größenordnung von v_z liefern die von BRUNT und DOUGLAS durchgeführten Berechnungen der sich ergebenden Regenintensitäten. Diese stimmen mit der Wirklichkeit sehr gut überein, während die auf Grundlage der Theorie GIÃOs zu berechnenden Regenintensitäten höchstens etwa ein Fünftel der richtigen Werte ergeben können.

übrigen Wolkenteilchen und fallen aus der Wolke heraus. Es entsteht somit Niederschlag, und zwar sind die Niederschlagsteilchen um so größer, je größer die vertikale Mächtigkeit der Wolke ist.

Beim Durchfallen durch trockene Luft verdampft der Niederschlag teilweise. Schwacher Niederschlag von relativ hochliegenden Wolken reicht deshalb nicht bis zum Boden hinunter.

187. Die genetische Wolkenklassifikation. Die Wolken lassen sich in zwei genetische Hauptgruppen einteilen: (I) die internen Wolken einer einheitlichen Luftmasse, welche ohne Mitwirkung der Fronten entstehen und deshalb in beliebig großen Abständen von diesen auftreten, und (II) die Frontwolken an oder nahe der Grenzfläche zweier Luftmassen.

(I) *Die internen Wolken.* Es existieren zwei Haupttypen der internen Wolken, je nachdem, ob die Luftmasse, in der sie schweben, eine „Warmmasse" ist, die Wärme an den Erdboden abgibt, oder eine „Kaltmasse", die Wärme von dem Erdboden empfängt. Die Einteilung „Warmmasse"-„Kaltmasse" deckt sich nicht mit der Einteilung Tropikluft-Polarluft. Eine Polarluftmasse, die zuerst nach niedrigen Breiten vorgestoßen ist und sich wieder polwärts zurückzieht, kann z. B. oft wärmer als die Unterlage werden und deshalb als „Warmmasse" auftreten und Wärme an den Erdboden abgeben. Ebenfalls kann zurückfließende Tropikluft, die in außertropischen Breiten abgekühlt worden ist, als „Kaltmasse" auftreten, wie das z. B. in den äquatorwärts strömenden Teilen des Passates der Fall ist. Der über See angekommene Wintermonsun und der über Land angekommene Sommermonsun sind weitere Beispiele von „Kaltmassen". In der gemäßigten Zone ist natürlich die kurz zuvor angekommene Tropikluft immer eine „Warmmasse" und die auf direktem Wege zugeführte Polarluft immer eine „Kaltmasse", so daß die beiden Einteilungen sich dort in der Mehrzahl der Fälle decken.

Die für die Warmmasse charakteristischen internen Wolkenformen sind die *stratiformen Wolken,* die für die Kaltmasse charakteristischen die *cumuliformen.*

Die *stratiformen* internen Wolken sind flache Schichtwolken innerhalb der untersten 2 km (darunter auch Bodennebel). Sie bilden sich durch die Kondensation, welche eintritt, wenn die Warmmasse genügend Wärme an die kältere Unterlage verliert. Die erste Kondensation kann entweder an der Erdoberfläche beginnen, wo die Abkühlung gewöhnlich den höchsten Betrag erreicht, oder es kann auch, wenn im voraus die turbulente Mischung eine mit der Höhe zunehmende relative Feuchte geschaffen hat, bei eintretender Abkühlung die erste Kondensation in einigen hundert Metern Höhe anfangen. Der erste Fall führt zu einem

Bodennebel, der zweite zu einem Stratus. Interne Schichtwolken mit mehr oder weniger ausgeprägter Wellenstruktur werden Stratocumulus genannt, sind aber genetisch meistens Stratusschichten.

Die internen Schichtwolken haben ein sommerliches Häufigkeitsmaximum über See und ein winterliches über Land, denn die Kombination: „Luft wärmer als Erdoberfläche" ist über See besonders im Sommer und über Land besonders im Winter vorhanden. Über Land haben die internen Schichtwolken ein ausgesprochenes Morgenmaximum, denn zu der Zeit ist ja der Erdboden, und damit auch die unterste Luftschicht, am stärksten abgekühlt.

Die stratiformen internen Wolken geben keinen oder nur schwachen Niederschlag, der aus zahlreichen, sehr kleinen, langsam fallenden Tröpfchen besteht: *Nieseln*. Die Kondensation des Wasserdampfes geht nämlich hier, im Vergleich mit den Verhältnissen in den später zu besprechenden Wolken, sehr langsam vor sich, und dazu haben die internen Schichtwolken nur geringe vertikale Mächtigkeit (meistens nur einige hundert Meter).

Die *cumuliformen* internen Wolken sind Haufenwolken auf flacher Basis, die sich mehrere Kilometer hoch auftürmen können, während sie voneinander durch einen wolkenfreien Raum getrennt sind. Ihre Erklärung liegt in den intensiven vertikalen Luftströmungen kleinen Querschnittes, die in den Kaltmassen durch die Erwärmung von unten her entstehen[1]. Die Kondensation tritt als Folge der adiabatischen Abkühlung in den aufsteigenden Zweigen der Konvektionsströme auf, während die absteigenden Zweigströme wolkenfrei bleiben. Da die aufsteigenden Luftströme alle nahe der Erdoberfläche beginnen, erreichen sie alle ungefähr in der gleichen Höhe — der Kondensationshöhe — den Taupunkt der Erdbodenluft. Diese Basishöhe der Cumuli befindet sich in Europa meistens 1 bis 1,5 km über flachem Erdboden. Etwas niedrigere Kondensationshöhen ergeben sich in maritim-polaren und etwas höhere in trockenen kontinental-tropischen Klimaten.

Über Land haben die cumuliformen internen Wolken ein Maximum ihrer Entwicklung etwas nach dem Zeitpunkt des täglichen Temperaturmaximums am Erdboden. Abends sinken sie schnell zusammen, wahrscheinlich weil die Wolkengipfel durch Ausstrahlung kälter als die umgebende Luft in gleichem Niveau werden.

Die gewöhnlichen Cumuli geben keinen Niederschlag, weil sie keine Eisteilchen enthalten. Die Wassertröpfchen der Wolkenmassen bleiben dann klein und gleichmäßig und werden durch die aufsteigende Luftbewegung getragen. Wenn die Haufenwolke jedoch hoch genug hinaufwächst, um im oberen Teil Kondensationsprodukte in fester

[1] Bezüglich der Dynamik dieser Luftströmungen siehe Abschnitt **175** „Feuchtlabile Zirkulationen".

Form zu enthalten, fallen diese durch die Wolke herunter, wachsen unterwegs und verlassen schließlich die Wolke als Niederschlag. Solche, mit dem Namen Cumulonimbus (Cunb) bezeichnete Haufenwolken haben infolge des Eisgehaltes im oberen Teil eine streifige, faserige, cirrusähnliche Struktur, die sich deutlich abhebt gegen die scharf umrandeten Quellformen des nur aus Wasserteilchen bestehenden Unterteiles derselben Wolke. Da der Cumulonimbusgipfel sich von den unteren feuchtlabilen Schichten nach den oberen stabileren emporarbeitet, breitet er sich meistens amboßförmig aus. Der Cumulonimbus liefert die typischen *Schauer*, in ihrer stärksten Entwicklung evtl. auch *Gewitter*.

Unter gewissen Umständen kann eine Art von cumuliformen internen Wolken auch unabhängig von der Erdbodenerwärmung entstehen, und zwar scheint diese Art besonders typisch zu sein für die Tropikluft beim Herannahen einer Kaltfront, die aber noch Hunderte von Kilometern entfernt sein kann. Die Cumulusköpfe wachsen in diesem Falle aus irgendeinem Wolkenstreifen im 3—4—5-Kilometerniveau auf: *Altocumulus castellatus* oder *Altostratus castellatus*, oder sie erscheinen auch isoliert ohne solche Basiswolke. Die Bildungsursache ist wiederum in vertikalen Luftströmungen kleinen Querschnitts zu suchen, die durch eine feuchtlabile Schichtung der Atmosphäre ermöglicht werden. Solche starke Temperaturabnahme mit der Höhe in hohen Schichten kommt als Folge der Tropopausestörungen zustande, und zwar findet man diese feuchtlabilen Verhältnisse beim Herannahen der Wellentäler der Tropopause, was unten mit dem Herannahen einer Kaltfront gleichbedeutend ist (vgl. Abschnitt **182**). Wenn solche Feuchtlabilität der hohen Schichten der Tropikluft zusammen mit gleichzeitiger Feuchtlabilität der unteren Schichten vorkommt, können zahlreiche große Gewitterwolken gebildet werden, deren Fortbestehen von der Tageszeit unabhängig ist (système orageux[1]). Wie zu erwarten, sind diese Tropikluftgewitter in der gemäßigten Zone an das Sommerhalbjahr gebunden, denn sonst sind die unteren Schichten der Tropikluft zu stabil.

(II) *Die Frontwolken.* Die Frontwolken bilden sich, wenn eine Luftmasse auf eine andere aufgleitet. Die Bedingung für dieses Aufgleiten ist in der Formel **140** (1) für die Differenz der beiderseitigen horizontalen frontnormalen Bewegungskomponenten $v'_y - v_y$ gegeben. Wenn wir mit θ_d den Neigungswinkel der Frontfläche bezeichnen, können wir aus derselben Formel die Vertikalkomponente der Warmluft v'_z relativ zur benachbarten Kaltluft ableiten:

$$v'_z - v_z = (v'_y - v_y)\,\mathrm{tg}\,\theta_d = \frac{-(s' - s)\,G_x + (j'_x - j_x)}{2\,\Omega_z}\,\mathrm{tg}\,\theta_d\,.$$

[1] SCHERESCHEWSKY et WEHRLÉ: „Les Systèmes Nuageux." Mémorial de l'Office National Météorologique de France, No. 1. 1923.

Auf Grundlage dieser Formel läßt sich die Größenordnung von $v'_z - v_z$ zu einigen cm/sec errechnen. Wenn die im kalten Keil enthaltene Luft horizontale Konvergenz aufweist, ist v_z positiv, und zwar gewöhnlich ebenfalls von der Größenordnung cm/sec. Wenn außerdem Aufgleiten der Warmluft relativ zur Kaltluft, $v'_z - v_z > 0$, stattfindet, erhält also v'_z und damit auch die Niederschlagsbildung ihre höchsten Werte. Dies trifft zu bei den meisten Warmfrontflächen, denn vor der Warmfront liegt immer ein Fallgebiet des Druckes, wo gemäß der Gleichung **179** (3) horizontale Windkonvergenz vorhanden ist. Bei den Kaltfrontflächen dagegen ist der kalte Keil gewöhnlich zusammensinkend, denn er fällt meistens mit einem Steiggebiet des Luftdruckes zusammen. Es kann also hier vorkommen, daß die Warmluft relativ zur Erde sinkt, selbst wenn sie auf den kalten Keil hinaufgleitet. In diesem Falle, und auch im Falle des Abgleitens der Warmluft relativ zur Kaltluft, müssen sich die Frontwolken an der betreffenden Stelle auflösen.

Die Abb. 148 stellt einen schematischen Vertikalschnitt mit etwa 50facher Überhöhung durch das in vollem Umfange ausgebildete Wolkensystem einer Front dar. Die untere Begrenzung der Frontwolke fällt vom Kondensationsniveau an mit der geneigten Frontfläche zusammen, deren Gefälle gewöhnlich von der Größenordnung 1/100 ist. Nahe der Front an der Erdoberfläche hat die Wolkenmasse ihre größte vertikale Erstreckung, vielleicht 4 bis 6 km, und wird dort „*Nimbostratus*" genannt. Weiter weg von der Bodenfront keilt die Wolkenmasse in eine immer höher und dünner werdende „*Altostratus*"-Schicht aus. Die horizontale Erstreckung des Wolkenschildes quer zur Frontrichtung beträgt mehrere hundert Kilometer. Längs der Frontrichtung kann dieselbe Wolke je nach der Länge der Front bis über 1000 km lang sein.

Abb. 148. Breites Wolkensystem einer Warmfront.

Dieses Frontwolkensystem reicht, soweit man weiß, immer hoch genug, um in den höheren Teilen Schnee- und Eisteilchen zu enthalten. Diese fallen in der schon besprochenen Weise durch die Wolke hindurch und kommen an ihrer Unterseite als Niederschlag zum Vorschein. Der Niederschlag aus dem dünnen Teil des Altostratus ist schwach und verdunstet auf dem Wege zum Erdboden. Der Niederschlag vom dickeren Nimbostratusteil der Wolke ist stärker und hat auch einen kürzeren Weg durch wolkenfreien Raum nach dem Erdboden zurückzulegen. Die Bedingungen für ergiebigen Niederschlag am Boden werden also günstiger, je näher man sich an der Front befindet. Ausnahmen von dieser Regel kommen vor, wenn die Warmluft ziemlich trocken ist und

erst nach längerem Aufgleiten zum Kondensieren gebracht werden kann. Der untere Teil der Aufgleitfläche wird dann in vielen Fällen sogar wolkenlos sein.

Wenn die Front sich als Warmfront bewegt (also von links nach rechts auf der Abb. 148), sind die Wolken präfrontal. Man sieht vom festen Beobachtungspunkt zuerst den dünnen cirrostratusähnlichen Rand des Altostratus, dann allmählich dichteren und niedrigeren Altostratus, der kontinuierlich in Nimbostratus übergeht, während der anfangs schwache Niederschlag allmählich den Boden erreicht und bis zur Frontpassage mit wachsender Intensität andauert[1]. Wenn diese Front sich dagegen als Kaltfront bewegt (von rechts nach links in der Abb. 148), ist dasselbe Wolkensystem „postfrontal". Man beobachtet dann die umgekehrte Entwicklung: zuerst niedrige Wolken mit Niederschlag, dann ein allmähliches Höherrücken der zusammenhängenden Wolkendecke und allmähliches Aufhören des Niederschlages, wonach der dünne hinterste Teil des Altostratus den Himmel noch eine Zeitlang bedeckt, bevor er vollständig wegzieht.

Abb. 149. Schmales Wolkensystem einer schnellbewegten Kaltfront.

Die Dauer des Vorbeizuges eines vollständigen, schnellbewegten Frontwolkensystems beläuft sich auf mehrere Stunden, die langsambewegten quasistationären Fronten können sogar tagelang über dem Beobachtungsort hin und her pendeln. Andererseits beobachtet man bei sehr vielen Kaltfronten eine wesentliche Verschmälerung des Frontwolkensystems, so daß sich ihr Vorbeizug auf eine Stunde oder noch weniger reduzieren kann.

Ein solches verschmälertes Frontwolkensystem ist in der Abb. 149 in schematischem, 50fach überhöhtem Vertikalschnitt dargestellt. Wegen des mit der Höhe zunehmenden Windes im kalten Luftkeil ist die Frontfläche im unteren Teil ziemlich steil geworden. In der Reibungsschicht, wo die Windzunahme mit der Höhe besonders stark ist, kann die Kaltfrontfläche bisweilen sogar nach vorn überhängen. Das Aufgleiten der warmen Luft an der Frontfläche reicht bei dieser Art von Kaltfronten meistens nur bis etwa 3 km Höhe, weiter oben auf der Frontfläche gleitet die Warmluft abwärts, denn sie bewegt sich schneller vorwärs als die Front selbst. Unter diesen Umständen wird der ganze oberhalb 3 km liegende Teil der Frontfläche wolkenlos, und das postfrontale Wolkensystem reduziert sich auf einen rudimentären Altostratusstreifen, bisweilen nur 10 km breit. Die aufsteigende Warmluft und ihre kompakten Wolkenmassen müssen aber irgendwo hinziehen,

[1] Im obenerwähnten Fall, wenn das Wolkensystem am niedrigsten Teil der Gleitfläche schwach ausgebildet ist oder gar fehlt, hört der Niederschlag natürlich früher auf.

denn von unten her kommt ständig neue wolkenbeladene Luft nach. Diese Art von Kaltfronten haben deshalb eine nach vorn sich ausbreitende Wolkenschicht in etwa 3 km Höhe. Dieses präfrontale Kaltfrontwolkensystem besteht in der Nähe der Front aus einem dichten regnerischen Altostratus oder Nimbostratus, der aber weiter nach vorn ständig dünner wird und sich in durchbrochene Schichten von *Altocumulus*[1] auflöst. Der Altocumulus, in regelmäßig angeordneten frontparallelen Bänken, oft ganz typischer „Altocumulus lenticularis", ist deshalb der charakteristische Vorläufer der meisten Kaltfronten.

Die hier besprochenen Frontwolkensysteme entsprechen den einfachen Warm- und Kaltfronten. Mehr oder weniger komplizierte Kombinationen dieser Wolkensysteme kommen an den Occlusionsfronten vor. Noch komplizierter wird das Wolkensystem, wenn es aus der Verschmelzung zweier oder mehrerer nacheinanderfolgender Frontsysteme hervorgegangen ist. Kombinationen von Frontwolken mit den Castellatusbildungen hochliegender instabiler Schichten sind besonders im Sommerhalbjahr recht häufig. Es kommen dabei Schauerregen und Gewitter in Verbindung mit dem gewöhnlichen Altostratus-Nimbostratus-Niederschlag der Warm-, Kalt- und Occlusionsfronten vor.

Schwach ausgebildete oder in Auflösung geratene Frontwolkensysteme bestehen wesentlich aus dünnen durchbrochenen Altocumulusschichten mit mehr oder weniger ausgeprägter Wellenstruktur, wie oben für die Kaltfrontvorläufer beschrieben.

Bei der *Konvergenz innerhalb einer einheitlichen Luftmasse* drängen sich die internen Wolken in dichten Schichten mit wachsender vertikaler Mächtigkeit zusammen. Wie die weitere Entwicklung verläuft, bleibt der direkten Beobachtung verborgen, aber wahrscheinlich bilden sich kompakte Wolkenmassen von mindestens ein paar Kilometern vertikaler Mächtigkeit, aus denen der Niederschlag fällt. Diese durch Konvergenz gebildeten Wolkensysteme treten besonders in den feuchten warmen Luftströmungen beim Herannahen einer Kaltfront auf und bilden eine Verbreiterung des normalen Frontwolkensystems ein paar hundert Kilometer in die warme Luftmasse hinein. Genetisch sind also diese Konvergenzwolkensysteme sowohl mit den Frontwolken als auch mit den internen Wolken verwandt.

Die hohen Wolken. Die höchsten Troposphärenwolken, Cirrus, Cirrostratus und Cirrocumulus, sind die Begleiter der bisher besprochenen Frontwolken, schweben aber meistens einige Kilometer über diesen und bestehen immer aus Eisteilchen. Die hohen Wolken hängen genetisch sicher mit den Frontwolken zusammen, aber die genaue Bildungsweise

[1] Der Name „Altocumulus" ist irreführend, insofern als die betreffende Wolke gar nicht die vertikale Mächtigkeit eines Cumulus besitzt (außer im Falle Acu cast.), sondern eher mit einem dünnen durchbrochenen Stratus vergleichbar ist.

dieser höchsten Frontwolkenbegleiter ist noch nicht klargelegt, besonders weil die Bildungsstelle oberhalb der geschlossenen Frontwolkendecken verborgen liegt. Die vom Erdboden sichtbaren Cirruswolken befinden sich meistens auf der Vorderseite eines Frontwolkensystems. Sie bewegen sich nämlich schneller als die betreffende Front, über der sie gebildet wurden, und entfernen sich Hunderte von Kilometern von ihr nach vorn, bevor sie sich auflösen.

Gewisse Arten von hohen Wolken entstehen auch als Beiprodukte der Cumulonimben und können fortleben, nachdem der Unterteil des Cumulonimbus verschwunden ist. Solche Wolken sind genetisch zu den internen Wolken zu rechnen, vorausgesetzt natürlich, daß die Cumulonimben nicht zu einem Frontwolkensystem gehörten.

188. Die Wolkenverteilung innerhalb der wandernden Polarfront-Zyklonen. Mit der Kenntnis der Wolkenbildung wird die Wolkenverteilung innerhalb der Zyklonen leicht verständlich. Hier sei als Beispiel die typische Wolkenverteilung in einer teilweise occludierten Polarfrontzyklone über dem Ozean gebracht, die in der Abb. 150 in der Form einer Karte und dreier Vertikalschnitte dargestellt ist.

Vor der Zyklone befinden sich die hohen Wolken. Dahinter folgen die Frontwolken der Warmfront bzw. der Occlusionsfront in einer mehrere hundert Kilometer breiten Zone. Der vordere Rand dieser Zone bedeckten Himmels ist noch ohne Niederschlag, im hinteren und größten Teil derselben fällt kontinuierlicher Niederschlag. Nach Süden zu (außerhalb der Abb. 150) endet das Altostratus-Nimbostratus-System in durchbrochene Schichten von Altocumulus[1]. Längs der Kaltfront befindet sich ein postfrontales Frontwolkensystem, schmal und schwach entwickelt dort, wo die Kaltluft zyklonisch, breiter und stärker entwickelt, wo die Kaltluft antizyklonisch strömt (vgl. Abb. 136, S. 722). Vor der Kaltfront befindet sich das präfrontale Konvergenzwolkensystem mit entsprechendem Niederschlag. Ähnliche Konvergenz findet wahrscheinlich auch dicht vor der Warmfront bzw. der Occlusionsfront statt, aber dort fällt sie mit dem normalen Frontwolkensystem zusammen, und der Niederschlag durch kontinuierliche Konvergenz kann dann nicht von dem Aufgleitniederschlag getrennt werden.

Die internen stratiformen Wolken innerhalb der warmen Luftströmung sind in der Nähe der Fronten dicht genug, um Nieseln zu erzeugen, weiter gegen den südlichen Rand der Zyklone hin werden sie dünner und spärlicher. Auch die nordwärts zurückkehrende Polarluft im Niederschlagsgebiet vor der Warmfront bzw. der Occlusionsfront hat gewöhnlich stratiforme interne Wolken aufzuweisen. Im übrigen tritt

[1] „Ciel de marge.“ SCHERESCHEWSKY und WEHRLÉ, l. c. S. 764. Später im Atlas International „Ciel pénédepressionnaire“ genannt.

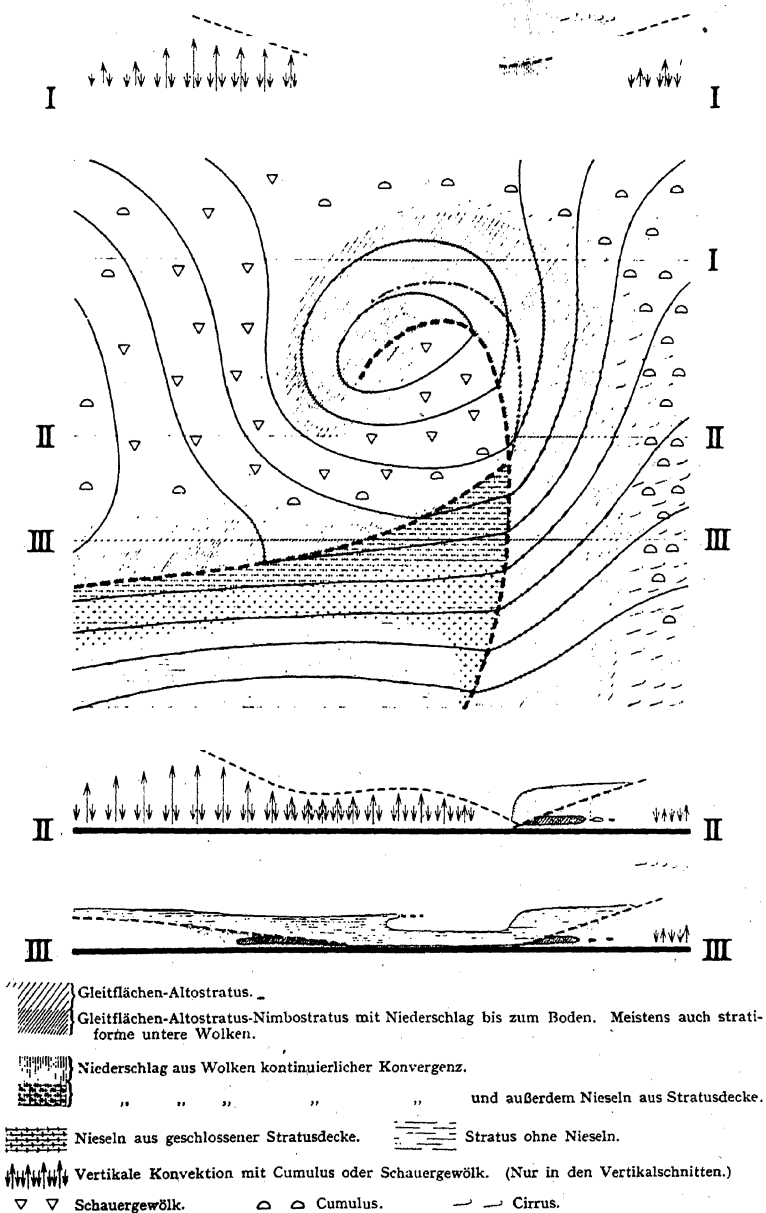



Abb. 150. Schematische Darstellung der Verteilung von Wolken und Niederschlag in einer teilweise occludierten Polarfrontzyklone über dem Ozean.

die Polarluft als „Kaltmasse" auf und hat cumuliforme interne Wolken, die wiederum am kräftigsten hinter der Zyklone entwickelt sind, wo normalerweise Schauerregen auftritt.

Die hier gegebene schematische Wolkenverteilung innerhalb einer Polarfrontzyklone über dem Ozean tritt natürlich in mancherlei Modifikationen auf, je nach der Lage der Fronten und je nach dem gegenseitigen Dichteunterschied und internen Eigenschaften der beteiligten Luftmassen. Über Land weit von den Küsten bewirkt der kleinere Feuchtegehalt der Luft ein mehr oder weniger vollständiges Verschwinden des Nieselniederschlages und ebenfalls ein Einschrumpfen des präfrontalen Kaltfrontniederschlages. Andererseits bewirken im Sommer die erwärmten Landflächen eine erhöhte Tendenz zur Feuchtlabilität, die besonders längs der Kaltfront, aber auch weit vor ihr innerhalb der Tropikluftzunge, zur Bildung von Schauerwolken mit Gewittererscheinungen führt (vgl. S. 764).

189. Die Witterungszonen der Erde. Mit der Kenntnis der Bildungsweise der Wolken ist es auch leicht auf ihre geographische Verteilung im großen zu schließen. Wir werden dies nur an Hand eines idealen Beispieles zeigen und wählen dazu die mittlere winterliche Wetterlage über dem nördlichen Atlantik, die in der Abb. 130, S. 708, dargestellt wurde. Die beistehende Abb. 151 bringt zwei Meridionalschnitte dieses atmosphärischen Zustandes, bzw. bei 50° W und 10° W, in denen die sich ergebenden frontalen und internen Wolken eingetragen sind. Bei der benutzten 100fachen Überhöhung erscheinen die Frontflächen mit einer Neigung von etwa 45°, die aber mit wachsender Höhe abnimmt. Die vertikal nach oben gerichteten Pfeile deuten die Aufwärtsbewegung in den Cu und Cunb, und die kleineren abwärts gerichteten Pfeile das langsame Sinken der Luft zwischen diesen Wolken an. Die ungefähren Vertikaldimensionen dieser internen Wolken sind durch die Länge der aufwärts gerichteten Pfeile angegeben. Ihre richtigen Horizontaldimensionen im Maßstab der Abb. 151 wären etwa 1/10 der Dicke der Pfeile, und ihre richtigen gegenseitigen Abstände dürften 10- bis 50mal kleiner sein, als es in der Abbildung hat durchgeführt werden können. Die internen Stratuswolkendecken sind mit ihren richtigen Dimensionen eingetragen.

Im westatlantischen Schnitt reicht die Polarluft normalerweise ziemlich weit gegen Süden (vgl. Abb. 130), und die Polarfront bei etwa 33° N bildet die einzige permanente Grenzfläche zwischen Pol und Äquator. Der arktische Teil der Polarluft ist ohne Cumuluswolken (mit lokalen Ausnahmen über etwaigen offenen Meeresrinnen). Sobald aber diese Luft das offene Meer erreicht, wird sie in ihrer Eigenschaft als „Kaltmasse" von unten erwärmt, und es beginnen typische feuchtlabile

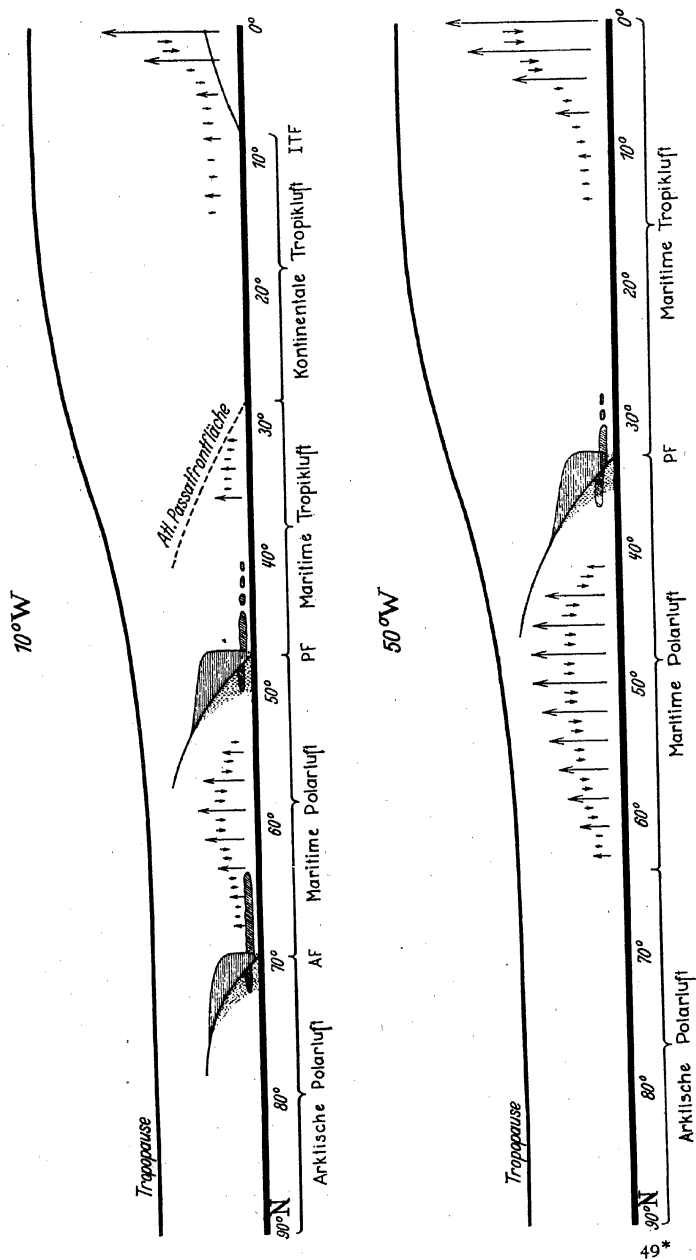



Abb. 151. Meridionalschnitte durch die Witterungszonen im Winter über dem Nordatlantik.

Vertikalumwälzungen mit Schauerniederschlag, zuerst in den untersten Schichten, dann immer höher sich emporarbeitend. Im Polarluftkeil unterhalb der Polarfrontfläche wird der vertikale Temperaturgradient wieder kleiner, und die Vertikalumwälzungen klingen ab. Zum Teil findet hier auch ein deutliches Zusammensinken der Luft statt mit der Folge, daß eine Aufheiterungszone zwischen den Schauern und den südlich angrenzenden Frontwolken der Polarfront entsteht. Die südlichste keilförmige Spitze der Polarluft wird durch den andauernden Regen so feucht gemacht, daß sich niedrige Stratuswolken bilden.

Die Tropikluft nahe der Polarfront ist eine typische „Warmmasse", verliert Wärme an die Unterlage und bildet Stratus oder unter Umständen gar Nebel. Nieselniederschlag stellt sich auch meistens ein. Weiter südlich hört das Nieseln auf, der Stratus wird dünner und spärlicher und verschwindet schließlich. Die südlich anschließende Schönwetterzone fällt mit dem subtropischen Hochdruckgürtel zusammen, wo die Luft für Vertikalumwälzungen überm Meere zu stabil ist. Mit Annäherung an den Äquator wird die Schichtung wieder feuchtlabil, so daß hochreichende Schauerwolken emporwachsen. In denselben Gegenden kommen auch zeitweise Frontwolken vor beim Vorüberzug tropischer Zyklonen und anderer schwächerer Störungen.

Im ostatlantischen Schnitt reicht die Polarluft nicht so weit südlich wie im westatlantischen, und ihre arktische und maritime Abart sind durch die Arktikfront getrennt. Das Wolkensystem der Arktikfront ist dem der Polarfront ähnlich, auch in bezug auf die Stratusbildung im kalten Keil. Die südlich anschließende maritime Polarluft hat den Ozean südlich des Islandtiefs überquert und befindet sich im ostatlantischen Schnitt, aus SW strömend, wieder unterwegs nach kälteren Gegenden. Ihre Kaltmasseneigenschaften sind deshalb in den unteren Schichten mehr oder weniger verlorengegangen. In der Nähe der Arktikfront wird sie gewöhnlich sogar wärmer als die Unterlage sein und entwickelt Stratus. Weiter südlich hat sie ihre ursprünglichen Kaltmasseneigenschaften besser beibehalten und enthält mehr oder weniger ausgeprägtes Schauergewölk. Überlagerung von Schauergewölk und Stratus, so wie in der Abbildung angedeutet, kann auch mitunter vorkommen.

Innerhalb der Tropikluft befindet sich noch die Passatfrontfläche (über deren Eigenschaften im Winter jedoch wenig bekannt ist). Unterhalb derselben strömt die maritime Tropikluft als Kaltmasse gegen SW und entwickelt Cumuluswolken, die aber wegen der meistens vorhandenen Subsidenzflächen sehr selten Gelegenheit finden, sich zu wirklichen Schauerwolken zu entwickeln. Oberhalb der Passatfrontfläche

und südlich derselben (wo unser Schnitt Westafrika durchschneidet) befindet sich die trockene und meistens wolkenlose kontinentale Tropikluft. Erst etwas südlich der Intertropikfront, wo der feuchte SW-Monsun genügende Mächtigkeit erreicht, entwickeln sich hochreichende Cumulus- und Cumulonimbuswolken.

Die hier beschriebenen winterlichen west- und ostatlantischen Meridionalschnitte sind mit kleinen Modifikationen auch für den West- bzw. Ostpazifik gültig.

In ganz ähnlicher Weise kann auch die Verteilung von frontalen und internen Wolken im Sommer abgeleitet werden. Wie die Karte Abb. 131 zeigt, liegen die Fronten und damit auch die Witterungszonen im Sommer zum Teil in ganz anderer Lage als im Winter. So z. B. verlegt sich die Intertropikfront überall nordwärts und der südlich anschließende feuchte SW-Monsun bringt die Regenzeit nach Gebieten, die im Winter wüstenhaft trocken waren.

Zur Charakterisierung der Witterung der Erde genügt natürlich nicht die dem mittleren Strömungsfelde entsprechende Verteilung der Wolken, denn die geographische Lage der Fronten und damit die der Witterungszonen wechselt ständig. Am raschesten beweglich sind die Witterungszonen um die Polarfront und die Arktikfront herum, gerade wegen der großen Wellenbildungen dieser Fronten. Die ganze gemäßigte Zone hat deshalb ein sehr wechselvolles Klima. Nahe dem Pol ist das Wetter weniger veränderlich, denn die Fronten kommen seltener dorthin. Gegen den subtropischen Hochdruckgürtel hin werden die Frontpassagen auch seltener, und zwar gilt dies besonders im Sommer, wenn die Polarluftausbrüche ihre kleinste Energie haben. Die durch Absinken ausgetrocknete Luft in den zentralen und östlichen Teilen der subtropischen Hochdruckzellen[1] liefert selbst während der Frontpassagen oft keinen Niederschlag. Vorausgesetzt, daß auch kein Anlaß für orographischen Regen (s. unten) vorhanden ist, herrscht dort das typische Wüstenklima. Die Westseiten der großen subtropischen Hochdruckzellen beziehen aber von den Tropen her feuchte und aufgestiegene Luft, die, wenn sie in die Nähe einer vorstoßenden Polarfront kommt, leicht Niederschlag liefert[2]. Die Westseiten der subtropischen Hochdruckzellen bewirken deshalb Lücken in dem Gürtel des subtropischen Wüstenklimas. Äquatorwärts grenzt der Wüstengürtel an die tropische Regenzone, welche dieselbe jährliche Meridionalschwankung wie die Tropikfront aufweist, sonst aber von Tag zu Tag nur wenig hin und her rückt.

[1] Vgl. Abschnitt **173**.

[2] Gemäß C.-G. Rossby: "Thermodynamics Applied to Air Mass Analysis" (Massachusetts Institute of Technology, Meteorological Papers, Vol. I, No. 3, 1932), ist diese Art von Tropikluft normalerweise feuchtlabil.

Zur erschöpfenden Behandlung des Wetters der Erde gehört noch die allseitige Berücksichtigung der Wirkung der Orographie auf die Wolkenbildung. Eine jede Luftströmung, die gegen ein Hindernis stößt, wird zum Aufsteigen gezwungen, und falls dies Aufsteigen genügend hoch reicht, bilden sich *orographische Wolken*, auch wenn die Luftströmung über ebenem Gelände wolkenlos war. Wenn die betreffende Luftströmung schon vorher Wolken frontaler oder interner Herkunft enthält, verstärken sich diese über der Luvseite der Gebirge. Auf der Leeseite der Gebirge werden dieselben Wolken durch das erzwungene Absteigen geschwächt oder vernichtet. Hohe und zusammenhängende Gebirgszüge haben in dieser Weise eingreifende Bedeutung für das Klima der benachbarten Gegenden, und auch kleinere Geländeerhöhungen haben nachweisbare Wirkung. Diese orographische Beeinflussung des Wetters bietet zahlreiche interessante Probleme mehr oder weniger lokaler Natur, auf deren Besprechung hier nicht weiter eingegangen werden kann.

Tabellenanhang.

Tabelle I. Potentielle Temperatur als Funktion von Temperatur und Luftdruck [vgl. Gleichung **25** (8a)].

p \ $\theta_{abs.}$ / θ °C	213 −60°	223 −50°	233 −40°	243 −30°	253 −20°	263 −10°	273 0°	283 10°	293 20°	303 30°
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	503,5	527,1	550,7	574,4	598,0	620,7	645,3	668,9	692,6	716,2
10	413,0	432,4	451,8	471,2	490,6	510,0	529,4	548,8	568,1	587,5
15	367,0	384,3	401,5	418,7	435,9	453,2	470,4	487,6	504,9	522,1
20	338,2	354,1	369,9	385,8	401,7	417,6	433,5	449,3	465,2	481,1
25	317,2	332,1	347,0	361,9	376,8	391,7	406,5	421,4	436,3	451,2
30	300,9	315,0	329,1	343,2	357,4	371,5	385,6	399,7	413,9	428,0
35	287,9	301,4	315,0	328,5	342,0	355,5	369,0	382,5	396,1	409,6
40	277,1	290,1	303,1	316,1	329,1	342,1	355,2	368,2	381,2	394,2
45	268,0	280,6	293,1	305,7	318,3	330,9	343,5	356,0	368,6	381,2
50	259,9	272,1	284,3	296,5	308,7	320,9	333,1	345,3	357,5	369,7
55	252,9	264,8	276,7	288,5	300,4	312,3	324,1	336,0	347,9	359,8
60	246,8	258,3	269,9	281,5	293,1	304,7	316,3	327,9	339,4	351,0
65	241,0	252,3	263,7	275,0	286,3	297,6	308,9	320,2	331,6	342,9
70	235,9	247,0	258,1	269,2	280,2	291,3	302,4	313,5	324,5	335,6
75	231,3	242,1	253,0	263,8	274,7	285,5	296,4	307,3	318,1	329,0
80	227,0	237,7	248,3	259,0	269,6	280,3	291,0	301,6	312,4	322,9
85	223,2	233,7	244,1	254,6	265,1	275,6	286,1	296,5	307,0	317,5
90	219,6	229,9	240,2	250,5	260,8	271,1	281,4	291,7	302,1	312,4
95	216,2	226,3	236,5	246,6	256,8	266,9	277,1	287,2	297,4	307,5
100	213,0	223,0	233,0	243,0	253,0	263,0	273,0	283,0	293,0	303,0
105	209,8	219,7	229,5	239,4	249,2	259,1	268,9	278,8	288,6	298,5

Beispiel: $\theta = 243$, $p = 45$ cbar, potentielle Temperatur $\vartheta = 305{,}7$.

Tabelle II. Solenoidanzahl einer geschlossenen Kurve, bestehend aus einer Isobare $p = 100$ cbar und einer Isobare $p = p_1$ samt zweier Vertikalen mit der gegenseitigen mittleren Temperaturdifferenz $\theta - \theta_b$ [vgl. Gleichung **41** (9)].

p_1 \ $\theta_a - \theta_b$	1°	5°	10°	20°	30°	40°
10	660,8	3304	6608	13217	19825	26434
20	461,9	2310	4619	9238	13857	18476
30	345,5	1728	3455	6910	10365	13820
40	262,9	1315	2629	5258	7887	10518
50	198,9	995	1989	3978	4967	7958
60	146,9	735	1469	2938	4407	5876
70	102,5	513	1025	2050	3075	4100
80	63,0	315	630	1260	1890	2520
90	30,1	151	301	602	903	1204
100	0	0	0	0	0	0

Beispiel: $p_1 = 70$ cbar, $\overline{\theta}_a - \overline{\theta}_b = 5°$, Solenoidanzahl: 513.

Tabelle III. Erdrotationstabelle [vgl. Gleichungen **42** (1) und **42** (2)].

φ	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
90°	0,292	0,583	0,875	1,168	1,46	1,75	2,04	2,34	2,63	$2{,}92 \cdot 10^{-3}$
85°	0,291	0,581	0,871	1,162	1,45	1,74	2,03	2,32	2,61	2,90
80°	0,287	0,574	0,862	1,149	1,44	1,73	2,02	2,30	2,59	2,87
75°	0,282	0,563	0,845	1,126	1,41	1,69	1,97	2,26	2,54	2,82
70°	0,274	0,548	0,822	1,096	1,37	1,64	1,92	2,19	2,47	2,74
65°	0,264	0,528	0,793	1,057	1,32	1,58	1,85	2,11	2,38	2,64
60°	0,252	0,505	0,757	1,010	1,26	1,51	1,76	2,02	2,27	2,52
55°	0,239	0,478	0,716	0,955	1,19	1,43	1,67	1,90	2,14	2,39
50°	0,223	0,447	0,670	0,894	1,12	1,34	1,57	1,79	2,02	2,24
45°	0,206	0,412	0,619	0,825	1,03	1,24	1,44	1,65	1,85	2,06
40°	0,187	0,375	0,562	0,750	0,94	1,13	1,32	1,50	1,69	1,87
35°	0,167	0,334	0,502	0,669	0,84	1,01	1,18	1,34	1,52	1,67
30°	0,146	0,292	0,437	0,583	0,73	0,88	1,02	1,17	1,31	1,46
25°	0,123	0,246	0,370	0,493	0,62	0,74	0,87	0,99	1,12	1,23
20°	0,100	0,199	0,299	0,399	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
15°	0,076	0,151	0,226	0,302	0,38	0,46	0,53	0,61	0,68	0,76
10°	0,051	0,101	0,152	0,203	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,51
5°	0,026	0,052	0,078	0,104	0,13	0,16	0,18	0,21	0,23	0,26
0°	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Beispiel 1: Horizontale Geschwindigkeit des Längenelementes senkrecht zu seiner Richtung 12 m/sec, geographische Breite 50°. Es ergibt sich eine Coriolisbeschleunigung längs des Längenelementes von $1{,}34 \cdot 10^{-3}$ m/sec².

Beispiel 2: Horizontale Verschiebung des Längenelementes senkrecht zu seiner Richtung 10^5 m, geographische Breite 30°. Es ergibt sich eine Coriolisgeschwindigkeit längs des Längenelementes von 7,3 m/sec.

Das Vorzeichen der tabulierten Größe ist immer derart zu wählen, daß die resultierende Bewegung relativ zur primär gegebenen Bewegung auf der Nordhalbkugel nach rechts, auf der Südhalbkugel nach links abbiegt.

Tabelle IV. Radius des Trägheitskreises als Funktion der geographischen Breite φ und der Geschwindigkeit v des materiellen Punktes [vgl. Gleichung **124** (4)].

v \ φ	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
1	78,7	39,5	20,1	13,7	10,6	9,0	7,9	7,3	7,0	$6{,}9 \cdot 10^3$
1,5	118,0	59,3	30,1	20,6	16,0	13,9	11,9	11,0	10,4	10,3
2	157,3	79,0	40,1	27,4	21,3	17,9	15,8	14,6	13,9	13,7
2,5	196,9	98,8	50,1	34,3	26,6	22,4	19,8	18,3	17,4	17,2
3	236,0	118,5	60,2	41,2	31,9	26,9	23,8	21,9	20,9	20,6
4	314,6	158,0	80,2	54,9	42,6	35,8	31,7	29,2	27,8	27,4
5	393,3	197,6	100,3	68,6	53,2	44,8	39,6	36,5	34,8	34,3
6	471,9	237,1	120,3	82,3	63,8	53,7	47,5	43,8	41,7	41,2
7	550,5	276,6	140,4	96,0	74,5	62,6	55,4	51,1	48,6	48,0
8	629,2	316,1	160,4	109,7	85,1	71,6	63,4	58,4	55,6	54,9
9	707,8	355,6	180,5	123,5	95,8	80,5	71,3	65,7	62,5	61,7
10	786,5	395,1	200,5	137,2	106,4	89,5	79,2	73,0	69,5	68,6

Beispiel: $\varphi = 40°$, $v = 15$ m/sec, Radius des Trägheitskreises 160 km.

Bibliographie mit historischen Erläuterungen.

Von

V. Bjerknes.

Dies Buch knüpft an einen Gedankenfaden an, an dem unter wenig Wechselwirkung mit der zeitgenössischen Wissenschaft bald ein Jahrhundert im stillen gesponnen worden ist. Da in Lehrbüchern oder in Sammelwerken fast nichts darüber zu finden ist, soll hier eine Bibliographie gegeben werden, die nicht Vollständigkeit bezweckt, sondern nur mit kurzen historischen Erläuterungen den Entwicklungsgang beleuchten soll.

Wie in meiner Biographie von C. A. Bjerknes berichtet worden ist[1], fing die Gedankenkette in den vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts an, als C. A. Bjerknes, noch Schulknabe oder ganz junger Student, durch das Lesen von Eulers Briefen an eine deutsche Prinzessin oppositionell gegen die herrschende Fernwirkungslehre gestimmt wurde. Die äußeren Umstände seines Lebens gestatteten ihm aber erst viel später, seinen geplanten Angriff auf das Fernwirkungsproblem zu beginnen, und zu spät, um ihm gestatten, mit seiner Arbeit fertig zu werden. Von seiner Hand liegen nur vorläufige Mitteilungen und Anfänge größerer Abhandlungen vor, von denen die folgenden als die historisch wichtigsten hier genannt werden sollen:

(1) C. A. Bjerknes: Om de indre Tilstande i et inkompressibelt ubegränset Fluidum, hvori en Kugle bevӓger sig, idet den forandrer Volum. Christiania (Oslo) Videnskabsselskabs Forhandlinger 1863.

(2) C. A. Bjerknes: Om den samtidige Bevägelse av kugleformige Legemer i et inkompressibelt Fluidum. De skandinaviske Naturforskeres tiende Möde, Christiania 1868.

(3) C. A. Bjerknes: Sur le mouvement simultané de Corps sphériques variables dans un fluide infini et incompressible. Premier Mémoire. Christiania Videnskabsselsk. Forhand. 1871.

(4) C. A. Bjerknes: Forelöbige Meddelelser om de Kräfter der opstaa, naar kugleformige Legemer, idet de udföre Dilatations- og Kontraktionssvingninger bevӓge sig i et inkompressibelt Fluidum. Ibid. 1875.

(5) C. A. Bjerknes: Hydrodynamiske Analogier til de statisk elektriske og de magnetiske Kräfter. „Naturen“, Christiania 1880.

(Diese Arbeiten sind sämtlich in „Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften“ Nr. 195, in deutscher Übersetzung: „Hydrodynamische Fernkräfte von C. A. Bjerknes“, zugänglich. Leipzig 1915.)

[1] C. A. Bjerknes, Sein Leben und seine Arbeit. Berlin: Julius Springer 1933.

(6) C. A. BJERKNES: Über die Druckkräfte, die durch gleichzeitige, mit Contractionen und Dilationen verbundene Bewegungen von mehreren kugelförmigen in einer inkompressiblen Flüssigkeit befindlichen Körpern entstehen. Erster Aufsatz. Göttinger Nachrichten 1876.

Eine systematische Darstellung von C. A. BJERKNES' Resultaten erschien erst in dem Buche

(7) V. BJERKNES: Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. BJERKNES' Theorie, Band I, Theorie, Band II, Versuche. Leipzig 1900—02,

wo jedoch nur die über kugelförmige Körper gefundenen Resultate berücksichtigt sind. Was zugleich über Körper von Zylinderform vorlag, ist unberücksichtigt geblieben, aus Gründen, die man in der Biographie entwickelt findet.

C. A. BJERKNES' Methode bestand in der expliziten Lösung der Probleme über die Bewegung kugelförmiger, später auch zylindrischer Körper, in einer homogenen und inkompressiblen Flüssigkeit, und in einer anschließenden Diskussion der gefundenen Lösungen von seinem speziellen Gesichtspunkte aus. Die direkt-geometrische und inversdynamische Analogie der hydrodynamischen Erscheinungen mit den elektrischen und magnetischen, die er fand, war aber in dieser Weise nur für Körper dieser bestimmten Formen bewiesen. Während ich mich in den Jahren 1893—1901 mit der Ausarbeitung des Buches (7) beschäftigte, suchte ich nach allgemeineren Methoden, diese Art von Untersuchungen durchzuführen. Ich vermutete, daß es dazu vorteilhaft sein würde, die als fremde Körper auftretenden Kugeln oder Zylinder durch *flüssige Körper* zu ersetzen. Und wenn die Analogie dann in den durch die Abb. 15 und 16, S. 142, dargestellten Fällen bestehen bleiben sollte, so schloß ich, daß für den Vektor spez. Bewegungsgröße in der Übergangsschicht zwischen umgebender Flüssigkeit und flüssigem Körper eine *Tendenz zur Wirbelbildung* vorhanden sein mußte. Die analytische Untersuchung führte mich dann sogleich zu dem Wirbelbildungssatz **40** (5B), S. 138. Später ergab sich von selbst der parallele und viel einfachere Satz **40** (5A) oder (7A) für Geschwindigkeitswirbel. Diese Wirbelbildungsgesetze bezogen sich auf vollkommene Flüssigkeiten allgemeinster Art: das Gebiet der *physikalischen Hydrodynamik* war betreten. Ich fand die Sätze im März 1897 und teilte sie in meinen Vorlesungen an der Hochschule Stockholm am 9. und 10. April desselben Jahres mit. Nach einer anschließenden Untersuchung der zweifach lamellaren Vektoren, die bei allen Anwendungen der Sätze auftreten, publizierte ich die beiden zusammengehörigen Abhandlungen:

(8) V. BJERKNES: Zur Theorie gewisser Vektorgrößen,

(9) V. BJERKNES: Über die Bildung von Zirkulationsbewegungen und Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten, — beide in Videnskabsselskabets Skrifter, Kristiania (Oslo) 1898.

Es schien mir von Anfang an höchst überraschend, daß nicht wenigstens der überaus einfache Satz über Geschwindigkeitswirbel schon längst bekannt war. Denn er ist ja ebenso leicht schon durch Intuition zugänglich, wie analytisch schwierig zu vermeiden, wenn man den HELMHOLTZschen Erhaltungssatz ableitet, sei es in der ursprünglich HELMHOLTZschen oder in der späteren KELVINschen Form. Denn der direkte Weg zu den Erhaltungssätzen führt über den allgemeinen Wirbelbildungssatz. Ob man auf ihn aufmerksam wird oder nicht, hängt nur davon ab, ob man etwas später oder etwas früher die einschränkende Barotropiebedingung einführt. Dennoch hat, soviel ich habe finden können, nur einer früher auf den Satz aufmerksam gemacht[1], aber auffälligerweise, ohne irgendwelche selbständige Anwendung des Satzes zu machen, von der selbstverständlichen Rückkehr zu dem Erhaltungssatze abgesehen. Noch überraschender scheint es aber, daß man jetzt noch, nach mehr als dreißig Jahren, durchweg nur die Erhaltungssätze und nur noch ausnahmsweise die Wirbelbildungssätze in der hydrodynamischen Lehrbücherliteratur findet: es scheint eine allgemeine Scheu vorhanden gewesen zu sein, die Grenzen der klassischen Hydrodynamik zu überschreiten.

Verallgemeinerte Theorie der hydrodynamischen Kraftfelderscheinungen.

Der Zirkulationssatz für die spez. Bewegungsgröße gestattete wichtige Schlüsse, aber gab keine vollständige Theorie der hydrodynamischen Kraftfelderscheinungen. In den Arbeiten:

(10) V. BJERKNES: Om en speciel form av de hydrodynamiske bevägelsesligninger, Videnskabsselskabets Forhandlinger, Kristiania 1904;

(11) V. BJERKNES: Recherches sur les champs de force hydrodynamiques, Acta Mathematica, Bd. 30, Stockholm 1905;

(12) V. BJERKNES: Fields of Force, Lectures given at Columbia University 1905, New York 1906,

gelang es, die Transformation der hydrodynamischen Gleichungen eines flüssigen Systems größter Allgemeinheit zu geben, die zu der *ersten* Reihe hydroelektrischer oder hydromagnetischer Erscheinungen führt (Kap. V)[2].

Bei Beginn der Vorlesungen (12) hatte ich noch die irrige Vorstellung, daß es nur *eine* Reihe hydroelektrischer oder hydromagnetischer Erscheinungen gab. Und ich wollte eben die für die erste Reihe entwickelte Transformation auch auf den Spezialfall der permanenten

[1] L. SILBERSTEIN: Über die Entstehung von Wirbelbewegungen in einer reibungslosen Flüssigkeit. Berichte der Universität Krakau, 1896.

[2] Eine andere Methode, um sehr allgemeine Resultate über die hydrodynamischen Fernkräfte abzuleiten, ist von Herrn ALMANZI gegeben worden: „Sulle attrazione Newtoniana di origine idrodinamice", Rendiconti dei Lincei, Roma 1914.

Bewegung anwenden, als ich zu meiner Überraschung sah, daß es zu Widerspruch führte, und daß hier eine selbständige *zweite* Reihe hydroelektrischer oder hydromagnetischer Erscheinungen mit ganz anderer Zuordnung der hydrodynamischen Größen zu den elektrischen oder magnetischen vorliegen müßte. Mein damaliger Hörer, Professor A. P. Wills, übernahm es dann, die neue Transformation zu suchen, die jetzt in Kap. VI gegeben ist und die zu der zweiten Reihe dieser Erscheinungen führt:

(13) A. P. Wills: A Variation of the Bjerknes Analogy between Hydrodynamic and Electric or Magnetic Fields. Physical Review, Vd. 26, New York 1906.

Eine zusammenfassende Darstellung beider Analogien gab ich nachher in dem Buche:

(14) V. Bjerknes: Die Kraftfelder. Serie „Die Wissenschaft", Heft 28. Braunschweig 1909.

Die Möglichkeit, auf Grund der hydrodynamischen Analogie neue elektromagnetische Erscheinungen zu suchen, wird in der Abhandlung

(15) V. Bjerknes: On the absolute Measurement of Electromagnetic quantities. Phys. Review, New York 1909, französisch Journal de Physique, Paris 1909,

diskutiert.

Technische Anwendungen der Hydrodynamik hatten nie meiner Interessensphäre noch der meines Vaters angehört; die seit dem Anfang des Fliegens aufblühende technisch-hydrodynamische Literatur war mir deshalb völlig unbekannt. Meine Teilnahme an der Hydrodynamikertagung in Innsbruck 1922 bereitete mir deshalb eine große Überraschung: in den in der Tragflügeltheorie grundlegend gewordenen Kräften erkannte ich alte Bekannte aus der Theorie der hydroelektrischen und hydromagnetischen Erscheinungen. Dies führte mich zu der Abhandlung:

(16) V. Bjerknes: Zur Berechnung der auf Tragflächen wirkenden Kräfte. Kármán und Levi-Civita: Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik, Innsbruck 1922,

und zu verschiedenen weiteren Ausführungen Abschnitt **73**, S. 263 bis 275.

Die Richtung der geophysischen und kosmisch-physischen Aufgaben.

Die allseitige Verwendbarkeit der Zirkulationssätze liegt nicht am wenigsten darin, daß sie ganz allgemein gelten, in welcher Weise auch die Solenoidsysteme gebildet sind, welche die Zirkulationsbeschleunigungen bestimmen. In der Atmosphäre kann Temperatur und Feuchtigkeit, im Meere Temperatur und Salzgehalt die Ursache sein. Alles weist auf eine Diskussion der großen atmosphärischen und ozeanischen Zirkulationsbewegungen hin. Der Anfang wurde in den folgenden Abhandlungen gemacht:

(17) V. BJERKNES: Über einen hydrodynamischen Fundamentalsatz und seine Anwendung besonders auf die Mechanik der Atmosphäre und des Weltmeeres. Vetenskapsakademiens Handlingar, Stockholm 1898.

(18) V. BJERKNES: Das dynamische Prinzip der Zirkulationsbewegungen in der Atmosphäre. Meteorol. Zeitschrift 1900.

(19) V. BJERKNES: Zirkulation relativ zu der Erde, Öfversikt av Vetenskapsakademiens Förhandlingar, Stockholm 1901. Meteorol. Zeitschrift 1902.

Mit FRIDTJOF NANSEN, der damals die wissenschaftlichen Resultate seiner Nordpolar-Expedition ausarbeitete, kam ich in diesen Jahren vielfach in Berührung. Bei der Diskussion seiner ganz rätselhaft erscheinenden Erlebnisse mit dem Totwasser sprach ich die Vermutung aus, daß innere Schwerewellen dahinter stecken könnten, und auf seine Veranlassung forderte ich meinen damaligen Schüler an der Hochschule Stockholm, V. WALFRID EKMAN, auf, die Erscheinung (s. S. 387) theoretisch und experimentell zu untersuchen. Die Ergebnisse erweckten bei mir ein lebhaftes Interesse für innere ozeanische und atmosphärische Diskontinuitätsflächen und deren möglichen Wellenbewegungen, was unserer Arbeit später zugute kam. — Bei einem Besuch NANSENS in Stockholm 1900 wurden die während seiner Fahrt beobachteten Windtriftströme[1] diskutiert, und ich schlug vor, auch diese durch EKMAN theoretisch genauer untersuchen zu lassen. Er wurde gerufen, bekam NANSENS Auseinandersetzung des Problems und hatte schon am selben Abend die Stromverteilung nach der *Ekmanspirale* gefunden (S. 496), die sich später in der Ozeanographie wie in der Meteorologie so grundlegend gezeigt hat.

Ich hätte mich aber kaum länger mit den mir fremden Wissenschaften der Meteorologie und Ozeanographie befaßt, wenn nicht ein anderer meiner damaligen Schüler an der Hochschule Stockholm, J. W. SANDSTRÖM, bereit gewesen wäre, anschließende praktische Arbeiten in dieser Richtung aufzunehmen, und die numerischen und graphischen Hilfsmittel für die praktischen Anwendungen auszuarbeiten. Ich erwähne von dieser Zeit besonders die folgenden Arbeiten von seiner Hand, in denen er auch die ersten diagnostischen Anwendungen des Zirkulationssatzes machte.

(20) J. W. SANDSTRÖM: Über die Beziehung zwischen Temperatur und Luftbewegung in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen. Öf. Svensk. Vet. Ak. Förh. 58, Stockholm 1901.

(21) J. W. SANDSTRÖM: Über die Beziehung zwischen Luftbewegung und Druck in der Atmosphäre unter stationären Verhältnissen. Ibid. 59, 1902.

(22) J. W. SANDSTRÖM: Anwendung von Prof. Bjerknes' Theorie. Svensk. Vet. Ak. Handl. 33, Stockholm 1902.

(23) J. W. SANDSTRÖM: Über die Temperaturverteilung in den allerhöchsten Luftschichten. Ark. för Mat., Astr. och Fysik 3. Stockholm 1907.

---

[1] FRIDTJOF NANSEN: The Oceanography of the North Polar Basin, p. 369. — The Norwegian North Polar Expedition. Vol. III, Kristiania (Oslo) 1902.

Im Anschluß an diese Arbeiten planten wir ein Buch über die Anwendung des Zirkulationssatzes in der Meteorologie und Hydrographie. Für dieses Buch berechnete SANDSTRÖM umfangreiche Tabellenwerke zur quantitativen Bestimmung der Solenoidsysteme im Meere nach den hydrographischen Beobachtungen und in der Atmosphäre nach den damals allmählich in Organisation begriffenen aerologischen Beobachtungen.

Ehe aber die Arbeit abgeschlossen war, stellte sich eine außerordentliche Erweiterung unserer Aufgabe ein. Es ließ mich der Gedanke nicht los, daß die dynamische Meteorologie letzten Endes nur eine einzige Aufgabe bietet, die der Lösung wert ist, die aber auch alle anderen in sich einschließt: die Aufgabe der Vorhersage der künftigen Zustände der Atmosphäre. Dabei hatte ich nicht die Schnellarbeit der praktischen Wettervorhersage im Auge, sondern eine Diskussion des Geschehens in der Atmosphäre auf Grund der Gleichungen der Hydrodynamik und der Thermodynamik. Dabei sollte das Problem der Wettervorhersage als ein mathematisch bestimmtes Problem aufgefaßt werden: Zu einer gegebenen Zeit sollte der Anfangszustand der Atmosphäre auf Grund einer genügenden Anzahl von Beobachtungen, in möglichst vollständiger und übersichtlicher Form dargestellt werden, das Problem der *Diagnose*; und dann sollte das *Hauptproblem* der *Prognose* durch Integration der Gleichungen der Hydrodynamik und der Thermodynamik gelöst werden, und zwar, wenn durch analytische Methoden nicht möglich, so durch Methoden der mechanischen Quadratur. Dabei kann man sich die mechanischen Quadraturen nach einem einfachen Programm ausgeführt denken, indem man die Aufgabe in zwei Teilaufgaben zerlegt, eine dynamische und eine thermodynamische, die für passend kurze Zeiträume nacheinander ausgeführt werden können:

(1) Die dynamische Teilaufgabe: *die Ortsveränderungen der bewegten Luftmassen während eines kurzen Zeitraumes zu berechnen.*

(2) Die thermodynamische Teilaufgabe: *die Zustände zu berechnen, in denen die bewegten Luftmassen an ihren neuen Örtern ankommen.*

Dieser Plan wurde in der Abhandlung

(24) V. BJERKNES: Das Problem von der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkt der Mechanik und der Physik. Meteorol. Zeitschrift 1904,

entwickelt. Ich hatte zwar keine große Hoffnung, die Aufgabe in endgültig befriedigender Form zu lösen; das Programm aber gab einen Forschungsplan, der einen sicheren Weg vorwärts zeigte. Herr SANDSTRÖM fand die Aufgabe ebenso verlockend wie groß, die Arbeit wurde angefangen, zunächst mit dem einleitenden und absolut grundlegenden Problem der *Diagnose*, für welches sich SANDSTRÖMS Tabellenwerk sogleich als sehr nützlich erwies. Wir stellten uns vor allem die Aufgabe,

mit Hilfe der damals durch HERGESELL international organisierten aerologischen Aufstiege möglichst vollständige Diagnosen wirklicher atmosphärischer Zustände auszuarbeiten. Als erstes Resultat erschien

(25) V. BJERKNES und J. W. SANDSTRÖM: Hilfsgrößen zur Berechnung der Druckverteilung in der Atmosphäre an den internationalen Tagen 1900—1903. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, 1906.

Als uns die Carnegie Institution of Washington die Unterstützung unserer weiteren Arbeit zugesagt hatte, wurde ein größeres Werk geplant:

(26) V. BJERKNES and different Collaborators: Dynamic Meteorology and Hydrography,

wo sowohl für die Atmosphäre wie für das Meer das Diagnosen- und Prognosenproblem so vollständig wie möglich behandelt werden sollte. Zwei einleitende Bände, beide dem Diagnosenproblem gewidmet, erschienen bald:

(26, I) Part I. Statics, by V. BJERKNES and J. W. SANDSTRÖM, Washington 1910. Deutsche Ausgabe, Braunschweig 1911.

(26, II) Part II. Kinematics, by V. BJERKNES, TH. HESSELBERG, O. DEVIK, Washington 1911. Deutsche Ausgabe, Braunschweig 1912.

Der dritte Band, „Dynamics", der abschließend sowohl das Diagnosenproblem wie das Prognosenproblem behandeln soll, ist immer noch in Vorbereitung.

Die Bedingungen für die Arbeit über die Probleme dieses dritten Bandes schienen sich außerordentlich günstig zu stellen, als ich von Anfang des Jahres 1913 an eine Professur an der Universität Leipzig hatte, mit dem Auftrage, ein Geophysikalisches Institut eben für diese Forschungsrichtung zu begründen.

Das unter tätiger Mitwirkung des ersten Assistenten Dr. R. WENGER schnell organisierte Institut begann sogleich mit Publikationen in dieser Forschungsrichtung:

(27) „Veröffentlichungen des Geophysikalischen Instituts der Universität Leipzig."

(27, I) Erste Serie: Synoptische Darstellungen atmosphärischer Zustände über Europa (10 Hefte erschienen, 1913—19).

(27, II) Zweite Serie: Spezialarbeiten aus dem Geophysikalischen Institut (immer noch erscheinend).

Durch Vorträge in den Kolloquien suchten wir einen Überblick über die älteren Arbeiten über die großen meteorologischen Probleme zu gewinnen und uns in der neuen Literatur auf dem laufenden zu halten. Dabei betrachteten wir, wie es damals ganz allgemein war, die Theorien DOVES als veraltet und erledigt, besonders durch die synoptischen Karten, die durchweg Kontinuität vortäuschten, wie wir jetzt wissen wegen des zu offenen Beobachtungsnetzes. Der Name BLASIUS war und blieb uns unbekannt. Unser Aufsehen erregten damals die von

v. FICKER in „Die Ausbreitung kalter Luft in Rußland und Nordasien", Sitzungsberichte der Wiener Akademie 119, 1910, gezeichneten „Polarfronten", wie wir sie jetzt nennen würden. Gegenüber der Fülle der täglichen Wetterkarten, die alle auf Kontinuität hinzudeuten schienen, vermochten wir aber selbst in diesen Zeichen der Diskontinuität nur interessante Ausnahmeerscheinungen zu sehen, und machten keinen Versuch, diese wichtige Spur weiter zu verfolgen. Eine wichtige Folge hatte es dagegen, daß HELMHOLTZ' meteorologische Abhandlung aus dem Jahre 1888[1] in den Kolloquien referiert, und zwar mehrmals referiert wurde. HELMHOLTZ gelangt hier auf theoretischem Wege zu einer als Parallelkreis verlaufenden „Polarfront", und läßt am Schlusse der Abhandlung dunkle Worte fallen, die, wenn man sie jetzt liest, so gedeutet werden könnten, als hätte er im Geiste die Wellentheorie der Zyklonen gesehen. Angesichts der Tatsache, daß er sonst immer, und besonders auch in dieser Abhandlung, von Zyklonen und Antizyklonen als selbständigen Bildungen spricht, ohne sie mit Wellenbewegung und Polarfront in Verbindung zu setzen, und in seinen nachfolgenden bedeutungsvollen Arbeiten über Wellenbewegungen nur Anwendungen auf Wogenwolken und Kleinmeteorologie macht, nicht aber auf die großen atmosphärischen Störungen, lasse ich es dahingestellt, ob dies wirklich der Fall war. Aber wie es auch damit sei, jedenfalls haben diese Worte, wie sogleich unten entwickelt werden soll, große Bedeutung für unsere weitere Arbeit gehabt.

Die Serie II der Veröffentlichungen des Instituts enthält Vorstöße in verschiedenen Richtungen, um aufzuklären, wo gangbare Wege zu finden seien: von meinen damaligen Carnegieassistenten TH. HESSELBERG und H. U. SVERDRUP, von dem ersten Institutsassistenten R. WENGER (mein Nachfolger in Leipzig, 1922 gestorben), A. FRIEDMANN (als Direktor des Geophysikalischen Zentralinstituts in Leningrad 1925 gestorben). Ich nenne besonders HESSELBERGS und SVERDRUPS Arbeit über die Reibung, denen H. SOLBERG schon damals weitergehende Integrationsarbeiten hinzufügte, die jedoch erst viel später zur vorläufigen Publikation kamen:

(28) H. SOLBERG: Sur le frottement dans les couches basses de l'atmosphère. Förh. 17de skand. naturforskarmöte. Göteborg 1923,

und erst in diesem Buche vollständig publiziert werden (Abschnitt **134**, **135**). Weiter SVERDRUPS Arbeit über den Nordatlantischen Passat, und verschiedene Arbeiten HESSELBERGS, die mich zu der Abhandlung:

(29) V. BJERKNES: Ein prognostisches Prinzip der dynamischen Meteorologie, Berichte der math.-phys. Klasse der sächsischen Gesellsch. der Wiss. Leipzig 1917,

[1] H. HELMHOLTZ: Über atmosphärische Bewegungen, Berl. Sitzungsber. 1888, Werke Bd. III, S. 289.

veranlaßten, deren Hauptergebnis im Abschnitt **136** wiedergegeben ist. Gleichzeitige Arbeiten von SANDSTRÖM[1], die in Schweden Gegenstand scharfer, aber unberechtigter Kritik gewesen waren, veranlaßten meinerseits die Abhandlung

(30) V. BJERKNES: Über thermodynamische Maschinen, die unter der Mitwirkung der Schwerkraft arbeiten. Abhandl. der math.-phys. Klasse der sächsischen Gesellsch. der Wiss. Leipzig 1916.

Gewissermaßen die wichtigste Spezialarbeit aus dieser Zeit, nicht wegen ihren unmittelbaren Resultaten, sondern wegen der neu eingeschlagenen Richtung, war jedoch die Abhandlung

(31) V. BJERKNES: Wellenbewegungen in kompressiblen schweren Flüssigkeiten. Erste Mitteilung. Ibid. Leipzig 1916.

HELMHOLTZ' obenerwähnte Worte führten mich zu der Überlegung, daß die atmosphärischen Störungen, wie alle Störungen, notwendig als kleine Störungen anfangen und als solche durch *linearisierte Gleichungen* studiert werden können. Linearisierte Gleichungen scheinen aber durchweg *Wellenbewegungen*, stabile oder instabile, als Lösungen zu geben. *Folglich mußten auch die atmosphärischen Störungen, die Zyklonen als Wellen anfangen.* Ich hatte noch nicht die geringste Vorstellung, wie man sich den Übergang von der noch nicht beobachteten Welle zu dem bekannten zyklonischen Wirbel zu denken hat. Die Verbindung müßte sich aber finden lassen, wenn man von theoretischer Seite die Theorie der Wellen in möglichster Allgemeinheit entwickelte und von empirischer Seite den Bau und die Entwicklungsgeschichte der Zyklonen so genau wie möglich untersuchte. Die Abhandlung (31) leitete diese theoretische Arbeit ein. Die mit dem Kriege verbundenen schwierigen Verhältnisse unterbrachen jedoch die Arbeit; eine zweite Mitteilung, die schon verschiedene in Kap. VIII aufgenommene Resultate enthielt, blieb unpubliziert, und ebenso einige einleitende Resultate über die Einwirkung der Erddrehung auf die Wellenbewegung.

Die Hauptaufgabe des Instituts war jedoch die Ausarbeitung der synoptischen Darstellung atmosphärischer Zustände, die in der *Serie I* der Veröffentlichungen des Instituts publiziert wurde. Die Grundlage bildeten die von HERGESELL international organisierten aerologischen Aufstiege, auf denen die entwickelten Diagnosemethoden in Anwendung kamen. Besonders durch die aufeinanderfolgenden Serien möglichst vollständiger Diagnosen hofften wir das Geschehen in der Atmosphäre aufklären zu können, um dann die dynamisch-thermodynamischen Prognosenmethoden in Anwendung zu bringen. Dadurch mußte schließlich auch die Natur der Zyklonen hervortreten, seien sie nun von Wellennatur oder nicht.

[1] J. W. SANDSTRÖM: Meteorologische Studien im Schwedischen Hochgebirge. Göteborgs Kungl. Vetenskaps- och Vitterhetssamhälles Handlingar. Göteborg 1916.

Wir waren mit dieser großzügig angelegten Arbeit gerade so weit gelangt, daß alles gut vorwärts zu gehen schien, und wir standen im Begriff, die Arbeit in Breite und Tiefe auszudehnen, um ernstlich die Hauptprobleme angreifen zu können, als der Krieg jede Erweiterung der Arbeit unmöglich machte. Die Hilfskräfte des Instituts wurden eingezogen, von zehn Doktoranden sind fünf gefallen. Mit Hilfe zweier weiblicher Doktoranden und der beiden norwegischen Carnegieassistenten gelang es, noch einige weitere synoptische Darstellungen in knapper Form ohne die geplanten Erweiterungen auszuarbeiten. Für die mathematischen Arbeiten, die sich in Verbindung mit den Wellenproblemen in Fülle darboten, fehlten die mathematischen Hilfskräfte; die Arbeit war lahmgelegt.

Unter diesen Umständen, und ohne noch in irgendeinem Hauptpunkte Resultate von größerer Bedeutung gewonnen zu haben, siedelte ich 1917 mit meinen beiden damaligen Carnegieassistenten J. Bjerknes und H. Solberg nach Bergen an der Westküste Norwegens über. Glückliche Umstände machten es möglich, hier die Arbeit wieder aufzunehmen, obwohl in wesentlich veränderter Form, nicht als theoretische, sondern als praktische Wettervorhersage. Längs der Küste war während des Krieges eine dichte Reihe von Beobachtungsposten der norwegischen Marine in Tätigkeit, die die Grundlage eines rasch improvisierten meteorologischen Beobachtungsnetzes wurde. Auf aerologische Beobachtungen mußten wir verzichten. Dafür hatte aber das Beobachtungsnetz die von der Theorie verlangte Dichte. Die beiden aus Leipzig mitgekommenen Assistenten, denen sich bald als ebenbürtiger Mitarbeiter T. Bergeron anschloß, waren jedoch gewohnt, dreidimensional zu denken, selbst wenn Beobachtungen nur von der Erdoberfläche vorlagen. Als Ersatz für die aerologischen Aufstiege entwickelte sich eine *indirekte Aerologie*: es gelang, aus den Beobachtungen von unten weitgehende Schlüsse über die Zustände und Vorgänge in der freien Atmosphäre zu ziehen, und es ergab sich für die jetzt praktisch-empirisch arbeitenden jungen Meteorologen eine Reihe wichtiger Befunde.

Eine Erscheinung, die schon in der Leipziger Zeit unsere Aufmerksamkeit auf sich gezogen hatte, waren die *Konvergenzlinien*, die als rein geometrische Bildungen ganz zwingend auf den für die synoptischen Darstellungen ausgearbeiteten Stromlinienkarten für die Erdoberfläche auftraten. Aus den Aufstiegsresultaten hatten wir noch nicht ersehen können, wie sie sich in der Höhe fortsetzten. Der erste Doktorand, der sich gemeldet hatte, Hr. H. Pezold, hatte die Aufgabe erhalten, die Konvergenzlinien näher zu untersuchen. Er hatte schon etwas geeignetes Beobachtungsmaterial gesammelt, dabei auch ein Beispiel ausgewählt, wo am Erdboden ein wandernder Temperatursprung den wandernden Windsprung begleitete. Er beabsichtigte dieses Phänomen

nach dem Vorbild der Arbeiten KÖPPENS oder DURAND-GRÉVILLES zu untersuchen, jedoch nach dem erweiterten dreidimensionalen Programm, das jetzt dank der verbesserten aerologischen Daten ermöglicht worden war. Er wollte eben die Untersuchung anfangen, als er zum Kriegsdienst eingezogen wurde. Die Untersuchung mußte ruhen. Er fiel 1916 vor Verdun. J. BJERKNES nahm dann seine Arbeit auf, und schrieb schon 1917 eine kleine Notiz über diese Konvergenzlinien.

Dank des dichten Beobachtungsnetzes und der indirekten Aerologie gelang es in Bergen von der *geometrischen* Vorstellung der Konvergenzlinien zu der *physikalischen* Vorstellung der *Fronten* hinüberzukommen: *ist das Feld der Luftbewegung relativ zu der bewegten Front gezeichnet, so fällt die geometrische Konvergenzlinie mit der physikalischen Front zusammen.* Die Front ist die Schnittlinie zwischen einer bewegten geneigten atmosphärischen Grenzfläche — die Frontfläche — und der Erdoberfläche. Da keine wesentliche Mischung durch die Frontfläche hindurch stattfindet, trennt sie *Luftmassen*, die sich durch Temperatur, Feuchte, Beimengung von Staub usf. unterscheiden.

Durch die genaue Verfolgung dieser Fronten vom einen Beobachtungstermin zum nächsten gelang es, die Bewegung physikalisch verschiedener Luftmassen zu verfolgen. Dies wurde für die Weiterentwicklung der Methoden der praktischen Wettervorhersage von allergrößter Bedeutung. Die Prognosenarbeit nahm allmählich mehr und mehr die folgende Form an: *1. Die Bestimmung der Verschiebungen der physikalisch verschiedenen Luftmassen; 2. die Bestimmung der Zustände, in denen die Luftmassen in ihren neuen Lagen ankommen.* Dies war aber nichts Geringeres als die Verwirklichung des im Jahre 1904 aufgestellten Programmes für eine Wettervorhersage, die sich auf die Gesetze der Mechanik und der Physik gründet (Abhandlung 24), nur daß beim täglichen Wetterdienst schnelle Schätzungen die umständlicheren Berechnungen ersetzen müssen. Hier ist jetzt alles so weit durchgearbeitet, daß mit der Zeit die roheren Schätzungen durch immer genauere Berechnungen ersetzt werden können, und zwar um so mehr, als inzwischen auf diesem Gebiete eine außerordentlich bemerkenswerte Arbeit von L. F. RICHARDSON erschienen ist[1].

Die tägliche Prognosenarbeit nach den neuen Methoden führte weiterhin zu dem fundamentalen Resultat, daß die Mehrzahl der Neubildungen von Zyklonen an irgendeiner Front stattfinden. An der betreffenden Front bildet sich dabei eine wandernde Ausbuchtung, an deren Spitze das Zyklonenzentrum liegt. Dies kann nur bedeuten, daß die entsprechende Diskontinuitätsfläche in wogende Bewegung gekommen ist: *die Art der Wellen, aus denen die Zyklonen entstehen, war*

[1] L. F. RICHARDSON: Weather Prediction by Numerical Process. Cambridge 1922.

gefunden, und die stetige Entwicklung von Welle zu Wirbel ließ sich verfolgen.

Der sehr intensive Wetterdienst ließ den jungen Meteorologen nur wenig Zeit, ihre Resultate für Publikationen auszuarbeiten. Die wichtigsten empirischen Ergebnisse der ersten Jahre wurden in den folgenden Abhandlungen niedergelegt:

(32) J. BJERKNES: On the Structure of Moving Cyclones, Geofysiske Publikationer Vol. I, No. 2, Kristiania 1919;

(33) J. BJERKNES and H. SOLBERG: Meteorological Conditions for the Formation of Rain. Ibid. Vol. II, No. 3, 1921;

(34) J. BJERKNES and H. SOLBERG: Life Cycle of Cyclones and the Polar Front Theory of Atmospheric Circulation. Ibid. Vol. III, No. 1, 1922,

und sind in den Kapiteln XVIII und XIX dieses Buches wiedergegeben, wenn auch nach neueren Untersuchungen vielfach erweitert und korrigiert.

An diese empirischen Abhandlungen schloß sich meinerseits eine theoretische an:

(35) V. BJERKNES: On the Dynamics of the Circular Vortex with Application to the Atmosphere and Atmospheric Vortex- and Wavemotions. Ibid. Vol. II, No. 4, 1921,

aus welcher ein großer Teil des Stoffes von Kapitel IV und XII entnommen ist, einschließlich der Grundzüge der Wellentheorie der Zyklonen.

Es trat von jetzt an innerhalb der Bergener Schule eine Arbeitsteilung ein, in eine empirisch und eine theoretisch arbeitende Richtung. Die leitenden Empiriker blieben in Bergen, wo sich die Naturverhältnisse für ihre Forschung als außerordentlich günstig erwiesen hatten; die Theoretiker dagegen arbeiten seit 1926 an der Universität Oslo.

Die wichtigsten weiterführenden empirischen Arbeiten sind:

(36) J. BJERKNES: Diagnostic and Prognostic Application of Mountain Observations. Ibid. Vol. III, No. 6, 1924.

(37) T. BERGERON und G. SWOBODA: Wellen und Wirbel an einer quasistationären Grenzfläche über Europa, Veröff. des Geophys. Inst. Leipzig 1924.

(38) T. BERGERON: Über die dreidimensional verknüpfende Wetteranalyse. Erster Teil. Geof. Publ. Vol. V, No. 6, Oslo 1928.

(39) J. BJERKNES: Practical Examples of Polar-Front Analysis over the British Isles in 1925—26. Geophysical Memoirs No. 50, London 1930.

(40) T. BERGERON: Richtlinien einer dynamischen Klimatologie. Met. Z. 1930, S. 246.

(41) J. BJERKNES: Exploration de quelques perturbations atmosphériques à l'aide de sondages rapprochés dans le temps. Geof. Publ. Vol. IX, No. 9, 1932.

Ihre Resultate sind auch in den Kapiteln XVIII und XIX wiedergegeben. Die Abhandlungen (33), (38) und (40) enthalten Vorläufer zu dem, in **173** von J. BJERKNES aufgestellten, zellularen planetarischen Zirkulationssystem, das in diesem Buche zum ersten Mal erscheint.

Nachdem die Ausarbeitung der Prognosenmethoden im Sinne des Programmes von 1904 als vorläufig gelöst angesehen werden konnte, wurde es das Hauptziel der Theoretiker, die Lösung des Zyklonenproblems soweit wie möglich zu führen. Der Bearbeitung dieses Problems mußte, wie sich allmählich immer deutlicher zeigte, eine systematische Durcharbeitung der allgemeinen Grundlagen der physikalischen Hydrodynamik vorausgehen. Arbeiten meinerseits waren:

(42) V. Bjerknes: On quasi-static Wavemotion in Barotropic Fluid Strata. Geof. Publ. Vol. III, No. 3, Oslo 1923.

(43) V. Bjerknes: Solar Hydrodynamics, Astrophysical Journal, Chicago 1926.

(44) V. Bjerknes: Die atmosphärischen Störungsgleichungen, Beitr. zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. XIII, 1926.

(45) V. Bjerknes: Über die hydrodynamischen Gleichungen in Lagrangescher und Eulerscher Form, und ihre Linearisierung für das Studium kleiner Störungen. Geof. Publ. Vol. V, No. 11, Oslo 1929.

Die in (42) benutzte quasi-statische Methode erscheint in Kap. X in einer wesentlich verbesserten, von Solberg herrührenden Form.

Die Abhandlung (43) war eine Gelegenheitsarbeit. Während ich 1924, auf Veranlassung von Hale und Millikan, an der California Institute of Technology physikalische Hydrodynamik vortrug, hatte ich reichlich Gelegenheit, die Erscheinungen auf der Sonne mit den Astronomen des Mt. Wilson-Observatoriums zu diskutieren, und die Abhandlung erschien als ein erster Versuch, physikalisch-hydrodynamische Probleme der kosmischen Physik anzugreifen. In der Abhandlung ist die elastoide Stabilität (**46**, Kap. XI) rotierender Flüssigkeitsmassen nicht berücksichtigt, da ich auf sie erst später aufmerksam wurde. Auf eine weitere in dieser Abhandlung vorkommende Unvollständigkeit muß hier aufmerksam gemacht werden: man kann ebensowenig auf der Sonne wie auf der Erde eine Druckverteilung finden, die eine um die Rotationsachse symmetrische permanente Meridionalzirkulation unterhalten könnte. Es muß sich also eine zellular zerlegte Zirkulation einstellen, ähnlich derjenigen, die J. Bjerknes für die allgemeine Zirkulation der irdischen Atmosphäre aufgestellt hat (**173**), nur daß man auf der Sonne den zyklonischen Umlauf dort finden muß, wo man auf der Erde den antizyklonischen findet, und umgekehrt. Daß die zu Grund gelegte allgemeine Zirkulation etwas komplizierter wird, ändert aber nicht wesentlich die Voraussetzungen für den in der Abhandlung gemachten Versuch, eine Reihe von Sonnenfleckenerscheinungen von einem gemeinschaftlichen Gesichtspunkt aus zu erklären.

Die Abhandlungen (44) und (45) bildeten die Grundlage der Kap. III und VII.

Durch seine Integrationsarbeiten kam Solberg in der Abhandlung:

(46) H. Solberg: Integrationen der atmosphärischen Störungsgleichungen, Geof. Publ. Vol. V, No. 9, Oslo 1928.

zu wichtigen Resultaten. Hier treten zum ersten Male, obwohl wegen der Problemstellung in ziemlich verschleierter Form, die *zellularen Trägheitswellen* auf. Aus ihrer Existenz schloß er auf die Unvollständigkeit der früheren Gezeitentheorien (**122**), und ebenfalls auch auf die Unmöglichkeit, das Zyklonenproblem, wie wir ursprünglich gehofft hatten, nach den vorliegenden Vorbildern der Gezeitentheorie, d. h. nach der quasistatischen Methode, zu lösen. Die formale Lösung des Störungsproblems, in der die Abhandlung gipfelte, hatte jedoch die Form eines nicht leicht diskutierbaren Integrales, und die durch elementare Funktionen darstellbaren Lösungen zeigten noch nicht die Merkmale der Zyklonenwellen (**141**).

In der folgenden Zeit wurde die Natur der zellularen Trägheitswellen in der Arbeit

(47) V. BJERKNES und H. SOLBERG: Zellulare Trägheitswellen und Turbulenz. Videnskabsakademiets avhandlinger, I, No. 7, Oslo 1929.

klargelegt, und SOLBERG dehnte seine mit elementaren Funktionen durchführbaren Integrationen auf den Fall kompressibler isothermer Schichten aus, mit dem Erfolg, daß zyklonenähnliche Wellen auftraten.

(48) H. SOLBERG: Das Zyklonenproblem, Verh. III intern Kongreß für techn. Mechanik, Stockholm 1930.

Das Endergebnis sämtlicher mathematischer Untersuchungen über Wellen ist in den Kap. VIII—XI, XIII, XIV wiedergegeben. Bei dieser abschließenden Arbeit ist, wie schon im Vorwort hervorgehoben, Hrn. C. L. GODSKES Hilfe unschätzbar gewesen.

Ursprünglich waren alle seit dem Jahre 1912 erschienenen Arbeiten als Vorarbeiten zu dem Band III der „Dynamic Meteorology and Hydrography" gedacht. Sie würden aber den Rahmen dieses Bandes gesprengt haben. Deshalb erscheint in diesem Buche für sich alles, was sich als „Physikalische Hydrodynamik" hat ausscheiden lassen; wegen des Zusammenhanges ist es durch die nächstliegenden Anwendungen und Befunde im Gebiete der Meteorologie ergänzt worden, aber ohne Eingehen auf die anschließenden technisch-meteorologischen Methoden der Analyse von Wetterkarten und der Wettervorhersage.

Sachverzeichnis.